13. Il prodotto vettore

Per procedere con lo studio della cinematica abbiamo bisogno di un nuovo tipo di operazione fra vettori, il cui risultato è ancora un vettore: si tratta dunque di un'applicazione $V^3 \times V^3 \to V^3$. Ne daremo, per cominciare, una definizione geometrica.

Definizione di prodotto vettore

Dati due vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ il loro *prodotto vettore*

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

è il vettore così definito: è ortogonale a entrambi, orientato in modo che $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in quest'ordine formano una terna *destra*, e ha modulo

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\vartheta, \tag{13–1}$$

essendo ϑ l'angolo fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, inteso nell'intervallo $[0, \pi]$. Si può dire che il prodotto vettore misura *l'area orientata* del parallelogrammo di lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Nota: Purtroppo il simbolo più in uso attualmente tra i fisici per il prodotto vettore è lo stesso che i matematici usano per il prodotto cartesiano. In passato la scuola italiana aveva adottato il simbolo "$\wedge$" (che oggi i matematici usano con un significato simile, ma non identico); qui abbiamo preferito conformarci all'uso corrente, affidando al contesto la distinzione fra i due significati di "$\times$".

Si vede subito che il prodotto vettore è *antisimmetrico*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{13–2}$$

Infatti lo scambio di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non cambia ϑ, e quindi il modulo di $\vec{c}$; ma il verso va invertito per mantenere l'orientamento della terna. Un caso particolare della (13–2) è

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0,$$

che si ricava anche dal fatto che in tal caso $\vartheta = 0$. Più in generale, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ sse $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono *paralleli*.

Riuscirà utile fra poco la seguente identità:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)^2 \tag{13–3}$$

che si ottiene immediatamente dalla (13–1) e da $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\vartheta$.

Per dedurre altre proprietà del prodotto vettore conviene introdurre una base ortonormale (destra) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Dalla definizione seguono i prodotti fra i vettori della base:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Si verifica poi facilmente che le componenti di $\vec{a} \times \vec{b}$ sono:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned} \tag{13–4}$$

Infatti il vettore $\vec{c}$ le cui componenti sono date dalle (13–4)

- è ortogonale ad $\vec{a}$ e a $\vec{b}$
- ha il giusto modulo (basta usare la (13–3))
- ha il giusto orientamento (è vero nel caso particolare $\vec{a} = \vec{e}_1$, $\vec{b} = \vec{e}_2$; per continuità è vero in generale).

Osservazione 1: Il fatto che la base è arbitraria ci assicura che le (13–4) valgono in generale, *purché la terna sia destra.*

Osservazione 2: Dalle (13–4) si vede che $\vec{c}$ è funzione *lineare* tanto di $\vec{a}$ quanto di $\vec{b}$, cosa che non sarebbe stato facile dedurre direttamente dalla definizione.

Proprietà del prodotto vettore

Alcune proprietà del prodotto vettore sono di grande utilità, e conviene conoscerle a memoria.

Il prodotto misto: Si tratta di un'espressione della forma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \quad \text{oppure} \quad \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}, \tag{13–5}$$

dove $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sono vettori qualsiasi. Osserviamo in primo luogo che non occorrono parentesi, perché ovviamente il prodotto vettore va calcolato prima del prodotto scalare. Usando le componenti cartesiane, e sfruttando la (13–4), si vede che entrambe le espressioni (13–5) equivalgono a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{13–6}$$

Da qui, o dall'interpretazione del prodotto vettore come area, segue anche che le (13–5) danno la misura del *volume del parallelepipedo* di spigoli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, preso positivo se la terna $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ è destra, negativo nell'altro caso.

Sempre da (13–6) si vede che *il prodotto misto si annulla sse i tre vettori sono dipendenti*: spesso si fa uso di questo criterio per verificare l'indipendenza di tre vettori.

Ancora: dal comportamento del determinante per scambio delle righe, si vede che il prodotto misto resta invariato per una permutazione pari dei termini, e cambia segno per una permutazione dispari. Il tutto è riassunto nella tabella seguente, dove in ciascuna colonna sono indicate espressioni di valore uguale, mentre quelle di colonne diverse hanno valore opposto:

$$\begin{array}{ll}
\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} & \qquad \vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{b} \\
\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} & \qquad \vec{b}\cdot\vec{a}\times\vec{c} \\
\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} & \qquad \vec{c}\cdot\vec{b}\times\vec{a} \\
\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} & \qquad \vec{a}\times\vec{c}\cdot\vec{b} \\
\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a} & \qquad \vec{b}\times\vec{a}\cdot\vec{c} \\
\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b} & \qquad \vec{c}\times\vec{b}\cdot\vec{a}
\end{array}$$

Il doppio prodotto vettore: Con questo nome s'indicano le espressioni

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,) \qquad (\vec{a}\times\vec{b}\,)\times\vec{c},$$

dove questa volta le parentesi sono necessarie. Usando le componenti, con un po' di manipolazioni algebriche si dimostrano le identità:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,) &= (\vec{a}\cdot\vec{c}\,)\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)\,\vec{c} \\
(\vec{a}\times\vec{b}\,)\times\vec{c} &= (\vec{a}\cdot\vec{c}\,)\,\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c}\,)\,\vec{a}.
\end{aligned} \tag{13–7}$$

Destra e sinistra

Nella definizione del prodotto vettore interviene la convenzione sulla terna destra: ne segue che due fisici che usassero convenzioni diverse otterrebbero risultati opposti per $\vec{a}\times\vec{b}$. A prima vista ciò può apparire inaccettabile, perché sembra che ne segua un'incertezza circa i risultati dei calcoli. Tuttavia questo non accade, e vogliamo discutere come mai.

Distingueremo i vettori in due classi, a seconda che la loro definizione dipenda o no dalla convenzione in questione: i primi si chiamano "pseudovettori," o anche "vettori assiali"; i secondi semplicemente "vettori," oppure "vettori polari." Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono polari, $\vec{a}\times\vec{b}$ è assiale; se uno dei due è polare e l'altro assiale (come nel doppio prodotto vettore di tre vettori polari) il risultato è polare; se infine sono entrambi assiali, il risultato è assiale. In termini mnemonici vale la regola dei segni, dove "polare" sta per "$-$" e "assiale" sta per "$+$".

Un'ambiguità risulterebbe se in qualche equazione fisica venissero eguagliati vettori di tipi diversi, o se comparisse la somma di un vettore assiale e di uno polare, ecc. Affermare che ciò non accade mai equivale ad asserire l'equivalenza di destra e sinistra, di cui abbiamo già discusso. Non a caso, la prima teoria che ha reso correttamente conto dei fenomeni osservati nei decadimenti deboli fu chiamata "teoria $V-A$," perché nelle equazioni della teoria compariva la differenza tra un vettore polare e uno assiale.

14. I corpi rigidi: cinematica

Dopo il punto materiale, la schematizzazione più semplice nella meccanica newtoniana è quella di *corpo rigido*: essa precisa l'idea intuitiva di *corpo solido*, come quello che "ha forma e volume invariabili." Più esattamente, un corpo rigido è un corpo *esteso* (ossia di cui interessano le dimensioni, e di cui interessa studiare il moto delle parti che lo compongono), ma tale che le *distanze fra due qualsiasi suoi punti siano invariabili* durante il moto. Ciò vuol dire che il corpo non si deforma, né si dilata o si contrae, anche se soggetto a forze.

Nella pratica la definizione che abbiamo dato trova precisi riscontri: ad es. per verificare che un cilindro d'acciaio è sufficientemente rigido, ci assicureremo che la distanza delle basi non cambi, e che queste restino parallele; che il diametro resti lo stesso dovunque lo si misuri e in tutto il corso dell'esperimento; ecc.

Va da sé che abbiamo a che fare con una schematizzazione, perché nella realtà nessun corpo materiale è veramente rigido; i corpi reali potranno approssimare più o meno quel caso limite, a seconda

– delle forze applicate
– delle "tolleranze" richieste
– delle scale di tempi del fenomeno.

Qualche commento:

– Un bicchiere di vetro è un buon esempio di corpo rigido nelle condizioni usuali, ma non lo è più se cade per terra, perché le forze cui è soggetto durante l'urto sono di qualche ordine di grandezza superiori.
– Lo specchio di un telescopio, composto di un blocco di vetro massiccio, appare rigido se misurato con la precisione del millimetro; ma per la formazione delle immagini stellari occorre una tolleranza più stretta per 4 ordini di grandezza, e le deformazioni prodotte dalla gravità quando lo specchio si muove possono risultare eccessive, se non si prendono precauzioni opportune.
– La roccia che forma una catena di montagne appare rigida sulla scala di tempi umana, ma in qualche milione di anni può piegarsi e fratturarsi, sotto la spinta delle forze tettoniche.

Corpi rigidi e relatività

La definizione che abbiamo data di corpo rigido è strettamente *non relativistica.* Essa assume infatti che la distanza fra due punti del corpo non dipenda dal riferimento dal quale la si misura: in particolare, se dal riferimento "del laboratorio" (che supponiamo inerziale) o da un riferimento solidale al corpo. Ciò è senz'altro vero nella meccanica newtoniana, ma non è male aver presente fin d'ora che l'esatta definizione di corpo rigido è uno dei punti più delicati della relatività.

Per chiarire la situazione, pensiamo al seguente esempio: in una stazione spaziale del futuro — situata a grande distanza da qualunque corpo celeste, e perciò assimilabile a un riferimento inerziale — è stata costruita un'astronave di esplorazione, dotata di tutta la strumentazione necessaria a qualunque misura fisica. L'astronave è inizialmente ferma rispetto alla stazione, e la sua lunghezza è — poniamo — 50 metri. Il varo dell'astronave consiste nel liberarla dagli ancoraggi, in modo che resti fluttuante accanto alla stazione, ma sempre ferma rispetto a questa; poi vengono accesi i motori, e l'astronave accelera, fino a raggiungere la voluta velocità di crociera; dopo di che i motori vengono spenti. A questo punto l'astronave è di nuovo un riferimento inerziale.

Anticipiamo dalla relatività un risultato (del resto ben noto): la lunghezza dell'astronave, misurata dai due riferimenti inerziali, *non è la stessa*: nel riferimento della stazione appare più corta che in quello (di quiete) dell'astronave stessa.

Ora il problema è: che cosa vuol dire l'ipotesi che l'astronave è un corpo rigido? rispetto a quale riferimento la sua lunghezza sarà ancora 50 metri? Se la risposta fosse "rispetto al riferimento della stazione," gli occupanti dell'astronave dovrebbero misurare un allungamento, che non ha alcuna causa fisica plausibile (ricordiamo il principio di relatività): dunque è *nel riferimento di quiete* che la lunghezza di un corpo rigido non deve cambiare, e di conseguenza risulterà variata se la si misura da un riferimento inerziale (quello della stazione).

Quest'osservazione ha una serie d'interessanti conseguenze, che qui non possiamo discutere; ci basti aver segnalato i limiti di validità delle considerazioni che stiamo facendo. Poiché l'effetto di contrazione è $\sim v^2/c^2$, è chiaro che in tutti i casi concreti possiamo disinteressarci del problema.

Gradi di libertà di un corpo rigido

La descrizione matematica del moto di un corpo rigido è più complessa di quella del singolo punto materiale, ma ancora relativamente semplice, se la si confronta ad es. con quella di un *fluido*, come l'acqua di un fiume. Infatti i punti di un corpo rigido *non possono muoversi indipendentemente* uno dall'altro, proprio perché le distanze non possono cambiare: ne segue che per specificare il moto di un corpo rigido basta un piccolo numero d'informazioni.

Vediamo più in dettaglio. Osserviamo anzitutto che per conoscere la posizione di un corpo rigido basta conoscere quella di 3 suoi punti non allineati: infatti la posizione di un quarto punto è determinata dalle distanze (invariabili) dai primi tre (fig. 14–1).

Nota: A stretto rigore ci sono *due* punti nello spazio che hanno le stesse distanze da tre punti dati; ma durante un moto *continuo* non si può passare dalla configurazione ABCD alla ABCD$'$, come non si può trasformare il guanto destro di un paio nel sinistro.

Però durante il moto la posizione dei tre punti A, B, C non può cambiare in modo arbitrario, perché le distanze sono costanti: dunque se A va in A', che può essere un punto qualsiasi, B' potrà stare soltanto sulla sfera di centro A' e raggio uguale ad $\overline{\mathrm{AB}}$. Quanto a C, la sua nuova posizione C' potrà trovarsi solo su di un cerchio (fig. 14–2).

Riassumendo: possiamo scegliere ad arbitrio le 3 coordinate di A', ma solo *due* coordinate di B', e soltanto *una* di C': in totale 6. Per questo si dice che un corpo rigido ha 6 *gradi di libertà*. Assegnando 6 numeri fissiamo completamente la posizione del corpo; e allo stesso modo, con 6 numeri determiniamo le velocità di tutti i suoi punti, come vedremo meglio fra poco.

Il campo delle velocità di un corpo rigido

Vogliamo ora studiare più da vicino come possono essere distribuite le velocità in un moto rigido (abbreviazione per "moto di un corpo rigido"). Cominciamo col considerare due punti: P_1 e P_2. La condizione di rigidità ci dice che $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ *non dipende dal tempo.* Per brevità, poniamo temporaneamente $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$: allora possiamo scrivere

$$0 = \frac{d}{dt}\,|\vec{r}|^2 = \frac{d}{dt}\,(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\,\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Dunque:

$$\forall\ \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2: \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0. \tag{14–1}$$

A un dato istante t, i diversi punti del nostro corpo rigido hanno varie velocità; abbiamo cioè un *campo di velocità*, intendendo con ciò che ad ogni punto P (ossia a ogni vettore posizione $\vec{r}$) corrisponde un dato vettore velocità $\vec{v}(\mathrm{P})$. È questo il primo esempio che incontriamo di *campo vettoriale*; un concetto di fondamentale importanza in tutta la fisica. La (14–1) ci dice che il campo delle velocità di un corpo rigido non può essere arbitrario, ma deve obbedire a un certo *vincolo*, espresso appunto da quell'equazione.

Dobbiamo ora mettere a frutto questo risultato, per ricavarne le possibili espressioni per il campo di velocità, che — come vedremo — sono molto semplici. Ci converrà cominciare esaminando dei moti particolari che si presentano di frequente, anche allo scopo d'introdurre alcuni termini.

Moti traslatori

Esempio 1: Pensiamo a un treno che viaggi a velocità costante su di un binario rettilineo. In questo caso, non solo la velocità di ciascun punto del treno non cambia nel tempo, ma non cambia neppure da punto a punto: abbiamo a che fare con un moto *traslatorio*, *rettilineo* e *uniforme*.

Esempio 2: Se ora il treno frena, la velocità di ogni suo punto cambia nel tempo, ma resta ancora la stessa per tutti i punti: il moto è ancora *traslatorio*, ma non più uniforme (sebbene rettilineo).

Esempio 3: La cabina di una funivia (fig. 14–3), trascurando eventuali oscillazioni, mantiene orientamento costante durante il moto, ma questo non sarà in generale rettilineo (il cavo portante è curvo fra i piloni) e neanche uniforme (la cabina accelera alla partenza e decelera all'arrivo). Resta il fatto che tutti i punti della cabina *a uno stesso istante* hanno la stessa velocità, e descrivono *traiettorie parallele*: si tratta ancora di un moto *traslatorio*, sebbene non rettilineo né uniforme.

Definizione: Un moto rigido si dice *traslatorio* se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 il vettore $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ è *costante nel tempo* (non solo in modulo, il che accade in ogni moto rigido, ma anche in direzione).

Ne seguono due proprietà:

1) le traiettorie di tutti i punti sono *parallele*
2) a ogni t, tutti i punti hanno la stessa velocità.

La 1) è evidente (fig. 14–4); quanto alla 2), essendo

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

se il moto è traslatorio la derivata del primo membro è nulla, e perciò $\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Dunque se un corpo rigido si muove di moto traslatorio, *basta conoscere il moto di un solo punto* per caratterizzare completamente quello dell'intero corpo.

Moti rotatori

Sono assai frequenti i moti in cui tutti i punti di una retta (*asse di rotazione*) sono fissi, e gli altri descrivono traiettorie circolari con centro sull'asse e in piani perpendicolari all'asse.

Esempio 4: In molti casi il moto di ciascun punto è circolare uniforme (con maggiore o minore approssimazione): giradischi, ventilatori, macchine utensili di vario tipo, motori elettrici in generale, ecc. Si parla allora di moto *rotatorio uniforme con asse fisso.*

Esempio 5: Negli stessi casi può accadere che la velocità cambi nel tempo, pur restando fisso l'asse di rotazione: un motore "sotto sforzo" rallenta, ecc. Avremo allora un moto ancora rotatorio e con asse fisso, ma non più uniforme.

Si vede subito che se due punti del corpo sono fissi, tutti quelli della retta a che li unisce debbono anch'essi essere fissi: basta pensare che nel moto rigido le distanze non possono cambiare. Inoltre, se P è un punto fuori dell'asse di rotazione, la sua velocità $\vec{v}$ dev'essere ortogonale a tutti i vettori che vanno da P ai punti dell'asse (si vede dalla (14–1)) e quindi è perpendicolare al piano π che passa per a e per P. Il modulo di $\vec{v}$ è proporzionale alla distanza di P da a: il fattore di proporzionalità è la *velocità angolare* ω.

Tutti questi fatti si riassumono comodamente introducendo il vettore *velocità angolare* $\vec{\omega}$, che ha modulo ω, è parallelo all'asse di rotazione, ed è orientato in modo che il verso di rotazione sia quello antiorario. Infatti, se O è un punto qualsiasi di a, posto $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ si ha sempre

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{14–2}$$

Per dimostrare la (14–2), osserviamo che direzione e verso di $\vec{\omega} \times \vec{r}$ sono quelli giusti: infatti $\vec{v}$ riesce ortogonale a due rette del piano π (fig. 14–5), e inoltre $\vec{\omega}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$ formano una terna destra. Quanto al modulo, esso vale $\omega\, r \sin\vartheta$, e $r \sin\vartheta$ è proprio la distanza di P dall'asse di rotazione.

Osservazione: Dalla definizione è chiaro che $\vec{\omega}$ *è un vettore assiale*; la conferma sta nella (14–2), in cui $\vec{v}$ (polare) è uguagliato al prodotto $\vec{\omega} \times \vec{r}$.

Esempio 6: Le ruote di un'automobile (o quelle del treno dell'esempio 1) se non slittano, hanno a ogni istante dei punti con velocità nulla: quelli che toccano la strada (o le rotaie). Però accadono due cose:

- il punto che momentaneamente tocca la strada, poi se ne stacca, e la sua velocità non è più nulla
- i punti fermi non sono mai gli stessi, né rispetto alla ruota, né rispetto alla strada.

In questo caso si può ancora parlare di asse di rotazione: si aggiunge l'attributo "istantaneo," per ricordare che esso cambia nel tempo. Ciò che conta però è che per quanto riguarda il *campo delle velocità* "fotografato a un certo istante," tutto va come se l'asse di rotazione restasse fisso. Perciò la (14–2) vale ancora (fig. 14–6). In particolare, se l'automobile si muove in linea retta a velocità costante, la velocità angolare delle ruote *è costante come vettore.*

Nota: Per designare il campo delle velocità "fotografato a un certo istante" è in uso in italiano il termine "atto di moto," che però non ha il corrispondente in altre lingue.

Esempio 7: Il moto di una trottola poggiata su di un supporto a punta è molto più complicato dei precedenti. Esiste un punto fisso (la punta) ma non un asse fisso: l'asse di simmetria della trottola descrive un cono (a parte piccole oscillazioni).

A questo caso si applica un fondamentale

Teorema: *Se in un atto di moto rigido esiste un punto* O *con velocità nulla, esiste una retta per* O *i cui punti hanno tutti velocità nulla.* Un tale atto di moto si chiama *rotatorio.*

Dim.: Consideriamo i punti di una sfera con centro in O; le velocità di questi punti sono necessariamente tutte tangenti alla sfera. Scegliamo sulla sfera un qualsiasi punto P: se la sua velocità è nulla, il teorema è dimostrato. In caso contrario, tracciamo il cerchio massimo per P perpendicolare a $\vec{v}(\mathrm{P})$. Scegliamo ora un secondo punto Q, che non stia su quel cerchio; se $\vec{v}(\mathrm{Q}) \neq 0$, tracciamo anche il cerchio massimo per Q perpendicolare a $\vec{v}(\mathrm{Q})$. I due cerchi s'incontrano in due punti, e dico che la loro velocità è nulla. Sia infatti A uno di questi punti:

si vede, usando la (14–1), che $\vec{v}(\mathrm{A})$ dev'essere ortogonale a entrambi i cerchi, il che richiede $\vec{v}(\mathrm{A}) = 0$. ∎

Si può dunque ancora parlare di asse *istantaneo* di rotazione: esso passerà sempre per il punto fisso, ma la sua direzione può cambiare nel tempo. Conseguenza del teorema ora dimostrato è che la (14–2) è valida in generale, per qualsiasi moto rigido con un punto fisso. Si dovrà solo tener conto del fatto che $\vec{\omega}$ può dipendere dal tempo, tanto in grandezza quanto in direzione. Osserviamo poi che in un atto di moto rotatorio tutte le velocità sono *ortogonali all'asse di rotazione*.

Aggiungiamo che il teorema non richiede che O sia fermo per tutto un intervallo di tempo: basta che la sua velocità si annulli a un certo istante, perché a quello stesso istante vi sia tutta una retta di punti con velocità nulla. Nel resto del tempo, il moto potrà essere qualsiasi.

Moti rigidi piani

Esiste una classe di moti rigidi che può sembrare piuttosto generale, ma che in realtà si riduce sempre a un caso semplice: i cosiddetti *moti piani*. Di questo tipo è il moto delle ruote viste all'esempio 6. Eccone un altro:

Esempio 8: Un'automobile che slitta su di una strada ghiacciata pianeggiante, magari facendo un "testa–coda."

Definizione: Un atto di moto rigido si dice *piano* se le velocità di tutti i punti sono parallele a uno stesso piano π.

La semplicità dei moti piani deriva dal seguente

Teorema: *Un atto di moto piano o è traslatorio o è rotatorio, con asse di rotazione ortogonale al piano.*

Dim.: Sia P_1 un punto del piano π e $\vec{v}_1$ la sua velocità. Due casi sono possibili:

– tutti i punti di π hanno velocità parallele a $\vec{v}_1$
– esiste in π un punto P_2 la cui velocità $\vec{v}_2$ non è parallela a $\vec{v}_1$.

Nel primo caso le velocità sono tutte uguali, anche per i punti fuori di π; altrimenti la (14–1) non può essere soddisfatta: il moto è dunque *traslatorio*. Nel secondo caso, sia O il punto di π intersezione delle rette condotte per P_1, P_2 perpendicolarmente alle rispettive velocità (fig. 14–7): dico che $\vec{v}(\mathrm{O}) = 0$. Infatti dev'essere ortogonale a entrambe le rette, sempre per la (14–1). Abbiamo dunque un atto di moto rotatorio, e l'asse di rotazione, dovendo essere perpendicolare a tutte le velocità, è perpendicolare a π. ∎

I moti piani sono molto importanti nella pratica, perché sono più semplici da realizzare del moto rigido generico: trovano quindi molte applicazioni nei più diversi tipi di macchine. Un esempio comunissimo sono le bielle dei motori a pistoni.

Moti rigidi in generale

Nel moto rigido più generale non esiste nessun punto fisso; gli esempi potrebbero essere innumerevoli.

Esempi 9:

– un motoscafo che fa evoluzioni in uno specchio d'acqua

– il rotore di un elicottero in volo

– il disco lanciato da un discobolo...

Attenzione: Un possibile equivoco sta nel credere che il punto fisso, quando esiste, debba essere un punto materialmente appartenente al corpo. Questo però non è necessario perché valgano le proprietà viste sopra: quando parliamo di moto di un corpo rigido dobbiamo sempre immaginare il corpo come *infinitamente esteso*, così da includere anche punti che nella realtà sono *esterni* al corpo.

Esempio 10: Basta pensare a un'automobile che percorre una curva orizzontale di raggio costante (fig. 14–8): il centro C della curva è un punto fisso. Anzi, la verticale per C è l'asse di rotazione, che in questo caso è fisso.

Invece negli esempi 9 il punto fisso non esiste affatto. Possiamo tuttavia analizzare il moto secondo le stesse linee, come segue. Scegliamo un punto qualsiasi Q del corpo, e per ogni altro punto P poniamo:

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}, \qquad \vec{w} = \vec{v}(\mathrm{P}) - \vec{v}(\mathrm{Q}).$$

Se riportiamo i vettori $\vec{r}$ a partire da un punto fisso O, i loro estremi descrivono un moto rigido il cui campo di velocità è $\vec{w}$, e che ha il punto fisso O: per tale moto vale dunque la (14–2). Allora:

$$\vec{v}(\mathrm{P}) = \vec{v}(\mathrm{Q}) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{QP}}, \tag{14–3}$$

che si chiama la *formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.* Si tenga presente che per il modo come la (14–3) è stata dimostrata, essa vale per due punti P e Q qualsiasi, e sempre *con la stessa* $\vec{\omega}$. Infatti per un altro punto Q′ avremo:

$$\vec{v}(\mathrm{Q}') = \vec{v}(\mathrm{Q}) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{QQ}'}$$

e sottraendo dalla (14–3):

$$\vec{v}(\mathrm{P}) - \vec{v}(\mathrm{Q}') = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{\mathrm{QP}} - \overrightarrow{\mathrm{QQ}'}) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\mathrm{Q'P}}.$$

Dalla (14–3) si vede, come caso particolare, che i moti traslatori sono quelli in cui la velocità angolare è nulla. Nel caso generale, *un atto di moto rigido è completamente caratterizzato dalla velocità di un punto qualsiasi e dalla velocità angolare*; ossia da 6 parametri, come avevamo anticipato.

15. Il moto con punto fisso "alio modo"

Vogliamo qui approfondire lo studio del moto rigido con punto fisso, per ritrovare risultati già noti da un diverso punto di vista, che chiarirà meglio l'esatto significato della velocità angolare, e spiegherà anche l'origine dell'operazione di prodotto vettore.

Per abbreviare il discorso, iniziamo con un banale

Lemma: Se sono nulli i prodotti scalari di un vettore dato $\vec{a}$ con tre vettori tra loro indipendenti, $\vec{a}$ è nullo.

Dim.: È certamente $\vec{a} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3$, e ne segue

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = c_1\,(\vec{a}\cdot\vec{b}_1) + c_2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}_2) + c_3\,(\vec{a}\cdot\vec{b}_3) = 0. \ \blacksquare$$

Il campo delle velocità come omomorfismo

È naturale prendere il punto fisso come origine: allora la (14–1) con $\mathrm{P}_1 = \mathrm{O}$ e $\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}$ si scrive semplicemente

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = 0 \tag{15–1}$$

e grazie a questa la stessa (14–1) si semplifica come segue:

$$\vec{r}_1\cdot\vec{v}_2 + \vec{r}_2\cdot\vec{v}_1 = 0. \tag{15–2}$$

Per capire il significato della (15–2) fissiamo P_2, indicandolo con P_0, e poniamo anche $\vec{v}(\mathrm{P}_0) = \vec{v}_0$. Dunque

$$\vec{r}\cdot\vec{v}_0 + \vec{r}_0\cdot\vec{v} = 0. \tag{15–3}$$

Se prendiamo un altro punto P', tale che sia $\vec{r}\,' = c\,\vec{r}$, per la corrispondente $\vec{v}\,'$ avremo, dalla (15–3)

$$\vec{r}\,'\cdot\vec{v}_0 + \vec{r}_0\cdot\vec{v}\,' = 0$$
$$c\,\vec{r}\cdot\vec{v}_0 + \vec{r}_0\cdot\vec{v}\,' = 0$$

e confrontando con la stessa (15–3)

$$\vec{r}_0\cdot\vec{v}\,' = c\,\vec{r}_0\cdot\vec{v}$$
$$\vec{r}_0\cdot(\vec{v}\,' - c\,\vec{v}) = 0.$$

Poiché $\vec{r}_0$ è arbitrario, questa ci dice che $\vec{v}\,' = c\,\vec{v}$.

In maniera analoga, se $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, riscriviamo la (15–3) per $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1\cdot\vec{v}_0 + \vec{r}_0\cdot\vec{v}_1 = 0$$
$$\vec{r}_2\cdot\vec{v}_0 + \vec{r}_0\cdot\vec{v}_2 = 0.$$

Sommando:

$$\vec{r} \cdot \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 0$$

che confrontata con la (15–3) dà

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{v} = \vec{r}_0 \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$
$$\vec{r}_0 \cdot (\vec{v} - \vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0,$$

e infine

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

sempre perché $\vec{r}_0$ è arbitrario.

Concludendo: $\vec{v}$ è funzione *lineare* di $\vec{r}$. O in altre parole: l'applicazione $\Omega : \vec{r} \mapsto \vec{v}$ è un *omomorfismo* dello spazio vettoriale delle posizioni $\vec{r}$ in quello delle velocità $\vec{v}$. La relazione (15–1) ci dà poi un'altra proprietà di Ω:

$$\vec{r} \cdot \Omega(\vec{r}) = 0 \tag{15–4}$$

e si dimostra facilmente che la (15–4) implica anche

$$\vec{r}_1 \cdot \Omega(\vec{r}_2) + \vec{r}_2 \cdot \Omega(\vec{r}_1) = 0 \tag{15–5}$$

(e viceversa). Un omomorfismo con questa proprietà si dice *antisimmetrico.*

Dunque: *il vettore velocità in un moto rigido con punto fisso è legato da un omomorfismo antisimmetrico al vettore posizione*; ma è anche vero il viceversa: *ogni omomorfismo antisimmetrico definisce un moto rigido con punto fisso.* La prova sta nel fatto che dalla (15–4) si deduce subito la (14–1), che è la proprietà caratteristica del moto rigido.

L'asse di rotazione come nucleo di Ω

Dimostriamo ora il seguente

Teorema: *L'omomorfismo Ω, se non è nullo, ha un nucleo unidimensionale.*

Dim.: Dimostriamo anzitutto che $\dim(\ker \Omega) \le 1$. Siano infatti $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ due vettori indipendenti e tali che $\Omega(\vec{r}_1) = \Omega(\vec{r}_2) = 0$. Prendiamo un vettore $\vec{r}$ indipendente da entrambi, e calcoliamo $\vec{v} = \Omega(\vec{r})$. Sarà $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ per la (15–4), e anche $\vec{v} \cdot \vec{r}_1 = 0$, perchè la (15–5), applicata a $\vec{r}$ e $\vec{r}_1$, ci dice $\vec{v} \cdot \vec{r}_1 + \Omega(\vec{r}_1) \cdot \vec{r} = 0$. Lo stesso accade per $\vec{v} \cdot \vec{r}_2$, e quindi $\vec{v} = 0$, per il lemma. Ne segue $\Omega = 0$.

Dimostriamo ora che il nucleo esiste. Scelti a caso due vettori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, tra loro indipendenti, due casi sono possibili per $\Omega(\vec{r}_1)$, $\Omega(\vec{r}_2)$: o sono tra loro dipendenti, oppure no. Nel primo caso, sia ad es. $\Omega(\vec{r}_2) = c\,\Omega(\vec{r}_1)$: si vede subito che $\Omega(\vec{r}_2 - c\,\vec{r}_1) = 0$, e abbiamo trovato il nucleo di Ω. Nel secondo caso, osserviamo anzitutto che non può essere $\Omega(\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_2 = 0$: infatti per la (15–5) ne seguirebbe anche $\Omega(\vec{r}_2) \cdot \vec{r}_1 = 0$ e perciò $\Omega(\vec{r}_1)$, $\Omega(\vec{r}_2)$ sarebbero entrambi ortogonali alla stessa coppia di vettori indipendenti, cosa impossibile se $\Omega(\vec{r}_1)$, $\Omega(\vec{r}_2)$

sono indipendenti. Inoltre, a meno di un fattore scalare esiste un unico vettore $\vec{r}$ ortogonale a entrambi (e perciò indipendente). Allora $\Omega(\vec{r}) \cdot \vec{r}_1 = -\vec{r} \cdot \Omega(\vec{r}_1) = 0$, e lo stesso con $\vec{r}_2$; ed è anche $\Omega(\vec{r}) \cdot \vec{r} = 0$. Ma $\vec{r}$ è indipendente da $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$: se fosse infatti $\vec{r} = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2$ si avrebbe che ad es. $\Omega(\vec{r}_1)$, che è ortogonale a $\vec{r}$, lo sarebbe anche a $\vec{r}_2$, cosa che abbiamo escluso. Concludendo: abbiamo visto che $\Omega(\vec{r})$ è ortogonale a tre vettori indipendenti, e perciò è nullo. ∎

La velocità angolare

Per studiare l'omomorfismo Ω ci conviene introdurre una base ortonormale $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Allora tanto $\vec{r}$ quanto $\vec{v}$ saranno rappresentati dalle loro componenti, e la relazione $\vec{v} = \Omega(\vec{r})$ diventerà

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \tag{15–6}$$

Si vede subito che le (15–4), (15–5) richiedono

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0$$
$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} \qquad \Omega_{23} = -\Omega_{32} \qquad \Omega_{31} = -\Omega_{13}$$

e viceversa: queste implicano le (15–4), (15–5). Conviene dunque porre:

$$\Omega_{32} = \omega_1 \qquad \Omega_{13} = \omega_2 \qquad \Omega_{21} = \omega_3,$$

col che la (15–6) si semplifica:

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ v_2 &= \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ v_3 &= \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1. \end{aligned} \tag{15–7}$$

Le (15–7) si scrivono brevemente

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \tag{15–8}$$

dato che $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, si vede che $\vec{\omega} \in \ker \Omega$: abbiamo dunque dimostrato il *Teorema*: *Ogni omomorfismo antisimmetrico* Ω *ha la forma* (15–8), *dove il vettore* $\vec{\omega}$ *genera il nucleo di* Ω.

Il prodotto vettore come omomorfismo antisimmetrico

Viceversa, sia dato un vettore $\vec{\omega}$, e per tutti i punti P (ossia per tutti i vettori $\vec{r}$) definiamo

$$\vec{v} = \Omega(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{15–9}$$

Vale allora il

Teorema (inverso del precedente): Ω, *definito dalla* (15–9), *è un omomorfismo antisimmetrico, e il suo nucleo è generato da* $\vec{\omega}$.

Dim.: Si tratta certo di un omomorfismo, in quanto il prodotto vettore è lineare in $\vec{r}$. Vogliamo poi far vedere che $\vec{r}_1 \cdot \Omega(\vec{r}_2) + \vec{r}_2 \cdot \Omega(\vec{r}_1) = 0$. Per la (15–9) questa equivale a

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = 0,$$

che segue dalle proprietà del prodotto misto. Quanto al nucleo,

$$\Omega(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0. \blacksquare$$

Questa relazione fra omomorfismi antisimmetrici e prodotti vettori illumina in altro modo il problema “destra–sinistra”: chiaramente l’omomorfismo in sé non dipende dalle convenzioni sulla destra, che invece entrano quando si stabilisce la corrispondenza $\Omega \rightleftharpoons \vec{\omega}$. Si potrebbe quindi evitare del tutto il problema non usando mai i prodotti vettori, e sostituendo i vettori assiali, tutte le volte che capitano, con i corrispondenti omomorfismi antisimmetrici (o *tensori* antisimmetrici, come anche si chiamano).