11. Funzioni trascendenti elementari

Hanno grande importanza anche in fisica le *funzioni trascendenti elementari.* Abbiamo già detto nel cap. prec. che "trascendenti" vuol dire "non algebriche," ossia non costruite con somme, prodotti, potenze, radici; il termine "elementari" indica le più semplici di queste funzioni. Daremo ora una sommaria presentazione di alcune di queste funzioni, avendo soprattutto di mira le *proprietà differenziali.* Faremo uso, a seconda della convenienza, di una caratterizzazione più "matematica," o di una più "fisica."

Tra le funzioni trascendenti elementari l'esponenziale è la più importante, per ragioni che vedremo nel seguito del corso.

L'esponenziale vista da un matematico

Consideriamo un *reale positivo* q, e la successione (bilatera) delle sue potenze:

$$\ldots\ q^{-2},\ q^{-1},\ q^0 = 1,\ q,\ q^2, \ldots$$

Questa è una progressione geometrica di ragione q, crescente se $q > 1$, decrescente se $q < 1$, costante se $q = 1$. Possiamo anche vederla come una funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}^+$, $k \mapsto f(k) = q^k$. Non è difficile estendere il dominio di definizione di f da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$: infatti è noto che $q^{m/n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{q^m}$. Abbiamo dunque

$$f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}, \quad r \mapsto f(r) = q^r.$$

La funzione f è ancora crescente, decrescente o costante a seconda che sia $q > 1$, $q < 1$, $q = 1$.

L'ulteriore estensione del dominio da $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ si fa per continuità. Infatti:

Teorema: *In ogni intervallo* $[a, b]$ *di* $\mathbf{Q}$*, se* $r, s \in [a, b]$ *e* $|r - s| < \tau$*, la differenza* $|f(r) - f(s)|$ *ha un estremo superiore che è* $o(1)$ *in* τ (anzi è $o(\tau)$, come si vedrà). Tralasciamo la dimostrazione.

Se ora prendiamo una successione di Cauchy $\{r_n\}$ che non converge in $\mathbf{Q}$, e se chiamiamo t il reale da essa definito, segue dal teorema che anche $\{f(r_n)\} = \{q^{r_n}\}$ è di Cauchy; e detto u il suo limite, possiamo porre $f(t) = q^t = u$. In tal modo f è stata estesa a una funzione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ uniformemente continua in ogni intervallo limitato. La funzione $f : t \mapsto q^t$ si chiama *funzione esponenziale di base* q.

Anche in $\mathbf{R}$ la q^t è crescente per $q > 1$, ecc. Ne segue che *per* $q \neq 1$ *la funzione esponenziale è invertibile*: la funzione inversa $f^{-1} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ si chiama *logaritmo in base* q: $u \mapsto \log_q u$.

Proprietà caratteristiche della funzione esponenziale sono:

1) $q^0 = 1$
2) $q^{t+t'} = q^t \cdot q^{t'}$.

Da queste segue che la funzione esponenziale è un *isomorfismo* del gruppo additivo $\mathbf{R}$ sul gruppo moltiplicativo $\mathbf{R}^+$ (il logaritmo è l'isomorfismo inverso); e questa è la ragione profonda dell'importanza della funzione esponenziale, anche in fisica.

Teorema: *La funzione esponenziale è derivabile in tutto* $\mathbf{R}$, *qualunque sia la base.*

Non diamo la dimostrazione; discutiamo però un corollario. Sia k il valore della derivata per $t = 0$; dalle proprietà viste sopra segue

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} f(t)\, \frac{f(h) - 1}{h} = f(t)\, f'(0) = k\, q^t.$$

Dunque la derivata della funzione esponenziale è proporzionale alla funzione stessa, con coefficiente $k = f'(0)$. Si dimostra poi che

- $f'(0)$ è funzione *continua* e *strettamente crescente* della base q
- $f'(0) = 0$ per $q = 1$ (ovvio)
- $f'(0)$ tende a ∞ insieme con q.

Ne segue che esiste un valore di q (e uno solo) per cui $f'(0) = 1$: questo valore viene indicato universalmente con e, e quando si parla di "funzione esponenziale" senza specificare la base, s'intende sempre che questa sia e. Valore approssimato: $e = 2.718281828459\ldots$

Riassumendo: L'esponenziale è l'unica funzione C^∞ che coincide con tutte le sue derivate, e vale 1 per $t = 0$.

Il logaritmo

Abbiamo già introdotto questa funzione come inversa dell'esponenziale. Quando la base è e, il logaritmo si chiama *naturale* o *neperiano*, e s'indica con $\ln t$. Il dominio di definizione del logaritmo è $\mathbf{R}^+$.

Strettamente connesse alle proprietà caratteristiche dell'esponenziale ci sono quelle del logaritmo:

1) $\ln(tt') = \ln t + \ln t'$
2) $\ln 1 = 0$.

Inoltre dal teorema di derivazione della funzione inversa, posto $u = \ln t$ (e quindi $t = e^u$), segue:

$$\frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{t}.$$

Anche il logaritmo è C^∞ (su $\mathbf{R}^+$).

L'esponenziale vista da un fisico

Consideriamo un punto materiale che si muova lungo una retta, con un'accelerazione proporzionale alla velocità. Ciò vuol dire, se x è un'ascissa sulla retta, e posto

$$v = \dot{x}, \qquad a = \dot{v} = \ddot{x},$$

che sarà

$$\dot{v} = kv \tag{11–1}$$

dove k è una costante (con dimensioni $[k] = [t]^{-1}$).

Non ha molta importanza, per la discussione che segue, sapere quali siano le condizioni fisiche nelle quali tale moto potrebbe realizzarsi; ricordiamo tuttavia che per $k < 0$ la (11–1) descrive — almeno finché la velocità è abbastanza piccola — il moto di un corpo soggetto alla sola forza frenante del *mezzo* (aria, acqua ...) in cui si muove.

Se interessa soltanto l'andamento della velocità nel tempo, la (11–1) è sufficiente (è un'*equazione differenziale* per la v): dato il valore della velocità a un certo istante, che supporremo sia $t = 0$, resta *univocamente determinata* la funzione $v(t)$, per tutti i valori reali (anche negativi!) di t. Di questo fatto si può dare dimostrazione rigorosa, ma qui lo supporremo intuitivamente evidente.

Una proprietà molto importante della (11–1) è quella di essere un'equazione differenziale *lineare*: ciò vuol dire che se $v_1(t)$, $v_2(t)$ sono due soluzioni, lo è anche $a\,v_1 + b\,v_2$, quali che siano $a, b \in \mathbf{R}$. Anzi, dato che $v(t)$ è determinata da $v(0)$, si ha che la totalità delle soluzioni della (11–1) *è uno spazio vettoriale di dimensione* 1, ossia che tutte le soluzioni sono multiple scalari di una sola. Prendiamo allora come base la soluzione che vale 1 per $t = 0$: se la indichiamo con $w(t)$, avremo come *integrale generale* l'espressione

$$v(t) = v(0)\,w(t).$$

È ora importante studiare come le soluzioni dipendono da k. A questo scopo conviene introdurre una *variabile ausiliaria* $\sigma = kt$, e porre

$$w(t) = u(\sigma).$$

Ciò equivale a dire che w è funzione composta di $f(t) = kt$ e di u: $w = u \circ f$. Allora

$$\frac{dw}{dt} = \frac{du}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{dt} = k\,\frac{du}{d\sigma}$$

e dalla (11–1):

$$\frac{du}{d\sigma} = u. \tag{11–2}$$

La (11–2), insieme alla condizione iniziale $u(0) = 1$, definisce completamente la funzione $u(\sigma)$, che ormai non contiene più nessun parametro. Questa si chiama la *funzione esponenziale*, e la si indica con $\exp\sigma$.

Abbiamo così ritrovato, in senso inverso, le proprietà descritte alla fine del primo paragrafo di questo capitolo. Manca soltanto di verificare che $\exp\sigma$ è una potenza con σ ad esponente. Per far questo, osserviamo che l'equazione (11–1), e perciò anche la (11–2), hanno un'altra proprietà importante: sono *invarianti per traslazioni.*

Il significato fisico di questa affermazione è il seguente: assegnata la velocità v_0 al tempo $t = 0$, il moto si svolge in una certa maniera, ossia resta determinata una certa $v(t)$. Se partiamo con lo stesso valore v_0, ma a un tempo $\bar{t} \neq 0$, il moto non cambierà per questo, salvo per uno spostamento temporale costante: sarà dunque descritto da una $\bar{v}(t) = v(t - \bar{t}\,)$. Lo stesso possiamo dire ragionando sulla u: se $\exp\sigma$ è la soluzione della (11–2) che vale 1 per $\sigma = 0$, quella che invece vale 1 per $\sigma = \bar{\sigma}$ è $\exp(\sigma - \bar{\sigma})$.

Ma quest'ultima soluzione assume un determinato valore per $\sigma = 0$, che è $c = \exp(-\bar{\sigma})$: data la linearità dell'equazione, dovrà dunque essere

$$\exp(\sigma - \bar{\sigma}) = c \exp\sigma = \exp\sigma \, \exp(-\bar{\sigma})$$

che possiamo anche scrivere, se più ci piace:

$$\exp(\sigma + \sigma') = \exp\sigma \, \exp\sigma'.$$

Questa è la stessa proprietà cui soddisfa una potenza q^σ, per q qualsiasi; ma abbiamo già visto che solo per $q = e$ la funzione esponenziale coincide con la sua derivata, come dice la (11–2). Abbiamo quindi ricostruito completamente tutte le caratteristiche della funzione esponenziale, e sappiamo anche qualcosa di più: *l'integrale generale della* (11–1) *è*

$$v(t) = v(0)\, e^{kt}. \qquad (11\text{–}3)$$

In fig. 11–1 sono rappresentati i grafici delle funzioni e^σ ed $e^{-\sigma}$. È utile tener presente che il grafico della (11–3) è sempre di uno dei due tipi, nel senso che il coefficiente $v(0)$ cambia soltanto la scala delle ordinate, e il coefficiente k a esponente cambia solo la scala delle ascisse, oppure il verso (se è negativo).

Il moto in un mezzo viscoso

Approfittiamo dei risultati ottenuti per concludere l'esame del problema fisico accennato all'inizio del par. prec. Se a un certo istante il corpo parte con velocità v_0, vogliamo sapere come si muove, e in particolare se arriverà a fermarsi, o se percorrerà uno spazio infinitamente lungo.

Scegliamo l'istante iniziale come $t = 0$, la posizione iniziale come origine dell'ascissa x, e prendiamo il verso positivo coincidente con quello della velocità iniziale. Conviene inoltre esplicitare il segno della costante k, che in questo caso è negativa: scriveremo dunque $-k$.

Sappiamo già che

$$v(t) = v_0\, e^{-kt},$$

e vogliamo determinare $x(t)$. Partiamo da

$$\dot{x} = v = v_0\, e^{-kt}, \tag{11–4}$$

che suggerisce anche per x una forma simile:

$$x(t) = a\, e^{-kt}.$$

Verifichiamo facendo la derivata rispetto a t:

$$\dot{x}(t) = a\, e^{-kt}\, (-k) = -ka\, e^{-kt}.$$

Confrontando questa con la (11–4) si vede che dobbiamo prendere $a = -v_0/k$, e arriviamo a

$$x(t) = -\frac{v_0}{k}\, e^{-kt}. \tag{11–5}$$

Abbiamo certamente trovato una soluzione della (11–4), ma non abbiamo ancora imposto la condizione iniziale per x: calcolando la (11–5) per $t = 0$ troviamo $-v_0/k$ anziché 0 come vorremmo. Il rimedio però è molto semplice: basta aggiungere a x la costante v_0/k, che non cambia $\dot{x}$. Infine:

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right). \tag{11–6}$$

Il grafico della (11–6) è rappresentato in fig. 11–2. Si vede che x cresce sempre, da 0 al limite v_0/k, che non viene mai raggiunto in tempi finiti. In pratica la differenza dal limite diventa molto piccola già per tempi non troppo grandi: ad es. quando $kt = 3$ l'esponenziale vale 0.05, il che vuol dire che il corpo ha percorso il 95% del suo cammino.

Dato che il coefficiente k è l'inverso di un tempo, si usa spesso sostituirlo con $1/\tau$, e τ prende il nome di *costante di tempo* del fenomeno. Possiamo dunque dire che dopo 3 costanti di tempo si è già realizzato il 95% dello spostamento totale del corpo.

Espressioni come la (11–6) sono assai frequenti anche al di fuori della meccanica. Alcuni esempi:

- scarica di condensatori
- propagazione del calore per conduzione
- decadimenti radioattivi
- variazione della densità in un'atmosfera isoterma, in campo gravitazionale uniforme
- in generale, molti fenomeni di "rilassamento," ossia processi irreversibili di tendenza a un equilibrio.

Questo è l'aspetto "empirico" dell'importanza della funzione esponenziale; sull'aspetto di principio torneremo più avanti.

Le funzioni circolari

Lo studio delle funzioni circolari si riconduce facilmente a quello del cerchio in coordinate cartesiane. Preso infatti nel piano un SC cartesiane (x, y), e un cerchio di centro O e raggio unitario, se scegliamo l'ascissa curvilinea s con origine nel punto Q (intersezione del cerchio col semiasse x positivo: fig. 11–3) e verso antiorario abbiamo

$$\cos s \stackrel{\text{def}}{=} x(s), \qquad \sin s \stackrel{\text{def}}{=} y(s).$$

e quindi

$$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \vec{\imath}\,\cos s + \vec{\jmath}\,\sin s.$$

Ricordando la (8–4) abbiamo

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\,\vec{\imath} + \frac{dy}{ds}\,\vec{\jmath}.$$

Dalla figura si vede che il punto P′ tale che $\overrightarrow{\mathrm{OP}}' = \vec{\tau}$ ha coordinate $(-y, x)$. Dunque:

$$\frac{dx}{ds} = -y, \qquad \frac{dy}{ds} = x$$

che si traducono in

$$\frac{d}{ds}\cos s = -\sin s, \qquad \frac{d}{ds}\sin s = \cos s. \tag{11–7}$$

Le (11–7) risolvono il problema delle derivate. Se ne deduce anche

$$\frac{d^2}{ds^2}\cos s = -\cos s, \qquad \frac{d^2}{ds^2}\sin s = -\sin s$$

e si dimostra che *la più generale funzione la cui derivata seconda dà la funzione cambiata di segno, è una combinazione lineare di* sin *e* cos.

Tutte le altre proprietà delle funzioni circolari: sia quelle della trigonometria, sia quelle delle funzioni ausiliarie come la tangente, sia quelle delle funzioni inverse (arcoseno, ecc.) discendono da ciò che abbiamo già visto, e non è qui il caso di dare altri dettagli.

12. Un'applicazione: il moto su spirale logaritmica

Vogliamo ora applicare, a titolo di esercizio, tutte le idee trattate fin qui a un esempio interessante di moto. Supponiamo la seguente situazione: si vuole portare un'astronave A dai pressi della Terra a quelli di Marte, facendole seguire una traiettoria piana, che formi angolo costante α (fissato) col raggio vettore $\overrightarrow{\mathrm{SA}}$ (fig. 12–1). Si tratta di calcolare la velocità iniziale quando l'astronave parte, a distanza r_0 dal Sole, e l'accelerazione (concorde a $\vec{v}$) che debbono fornire a ogni istante i motori. Si vuole inoltre sapere quanto tempo occorre per raggiungere la distanza r_1, e quanti giri intorno al Sole saranno stati compiuti.

Le equazioni

Osserviamo anzitutto che la traiettoria è *prestabilita*: la condizione che α sia costante caratterizza la *spirale logaritmica*. Tuttavia non avremo bisogno di conoscere le proprietà di questa curva.

In questo problema conviene usare coordinate polari: prendiamo come polo il Sole, come asse polare la semiretta SA_0 che passa per la posizione iniziale di A, e chiamiamo r, ϑ le due coordinate. Riprendiamo dal Cap. 9 le espressioni per le componenti di $\vec{v}$ e di $\vec{a}$:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\vartheta = r\dot{\vartheta}. \tag{12–1}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2, \qquad a_\vartheta = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\vartheta}). \tag{12–2}$$

Le relazioni scritte fin qui sono del tutto generali; ora dobbiamo usare le informazioni del problema.

In primo luogo, la conoscenza di α ci permette di scrivere

$$v_r = v\cos\alpha, \qquad v_\vartheta = v\sin\alpha \tag{12–3}$$

(il moto si svolge sempre nello stesso verso, che possiamo prendere come verso positivo sulla traiettoria: dunque in questo caso $\dot{s}$ coincide col modulo v della velocità).

In secondo luogo, dobbiamo sfruttare le informazioni che abbiamo sull'accelerazione. Se indichiamo con $\vec{g}$ l'accelerazione (di gravità) dovuta al Sole, e con $\vec{b}$ quella dovuta ai motori, avremo

$$\vec{a} = \vec{g} + \vec{b},$$

dove sappiamo che g è inversamente proporzionale a r^2, e che $\vec{b}$ è diretta come $\vec{\tau}$:

$$\vec{g} = -\frac{k^2}{r^2}\,\vec{e}_r, \qquad \vec{b} = b\,\vec{\tau}$$

(la costante k^2 non è altro che il prodotto GM della costante di gravitazione per la massa del Sole). Dunque

$$\vec{a} = -\frac{k^2}{r^2}\,\vec{e}_r + b\,\vec{\tau}. \tag{12–4}$$

Poiché abbiamo scelto le coordinate polari, ci converrà ricavare dalla (12–4) le componenti polari di $\vec{a}$. Dalle (12–2), e ricordando il significato di α, si trova:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2 = -\frac{k^2}{r^2} + b\cos\alpha \tag{12–5}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\vartheta}) = b\sin\alpha. \tag{12–6}$$

La velocità

A questo punto abbiamo due equazioni con molte incognite: r, ϑ, b (che sono tutte grandezze variabili durante il moto). Fortunatamente però non sono tutte indipendenti: infatti non abbiamo ancora usato le (12–3). Queste con le (12–1) portano a

$$\frac{r\dot{\vartheta}}{\dot{r}} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vartheta} = \frac{\dot{r}}{r}\,\operatorname{tg}\alpha \tag{12–7}$$

che useremo per eliminare $\dot{\vartheta}$ dalle (12–5), (12–6).

Il risultato della sostituzione è:

$$b\cos\alpha = \frac{k^2}{r^2} + \ddot{r} - \frac{\dot{r}^2}{r}\,\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$b\cos\alpha = \ddot{r} + \frac{\dot{r}^2}{r}. \tag{12–8}$$

Per confronto (e usando la prima delle (12–3)) si trova subito

$$v^2 = \frac{k^2}{r} = gr$$

che non contiene α, e quindi è la stessa relazione valida per l'orbita circolare! Abbiamo dunque trovato la velocità in ogni punto della traiettoria, e in particolare la velocità iniziale, che sarà $k/\sqrt{r_0}$.

L'accelerazione

Per andare avanti occorre determinare $\ddot{r}$, cosa che si può fare come segue:

$$\dot{r} = v \cos\alpha = k \cos\alpha \, r^{-1/2} \tag{12–9}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -\tfrac{1}{2} k \cos\alpha \, r^{-3/2} \, \dot{r} = -\frac{k^2 \cos^2\alpha}{2r^2}.$$

Sostituendo questa nella (12–8) si arriva a

$$b = \frac{k^2 \cos\alpha}{2r^2} = \tfrac{1}{2} g \cos\alpha, \tag{12–10}$$

che risolve il problema dell'accelerazione richiesta ai motori.

Tempo e giri

Per rispondere alle altre domande, occorre trovare la dipendenza da t delle due coordinate r e ϑ. Dalla (12–9):

$$r^{1/2} \, \dot{r} = k \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \tfrac{2}{3} r^{3/2} = \tfrac{2}{3} r_0^{3/2} + kt \cos\alpha$$

$$r = r_0 \left(1 + \frac{t}{t_*}\right)^{2/3} \tag{12–11}$$

avendo posto per brevità

$$t_* = \frac{2\, r_0^{3/2}}{3k \cos\alpha}.$$

Si verifica che t_* ha le dimensioni di un tempo; anzi $2\pi\, r_0^{3/2}/k$ è esattamente un anno, se r_0 è la distanza Terra–Sole (basta ricordare che la velocità sull'orbita circolare è $k/\sqrt{r_0}$).

Per quanto riguarda ϑ, la (12–7) porta immediatamente a

$$\dot{\vartheta} = k \sin\alpha \, r^{-3/2} = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{3\,(t + t_*)}$$

da cui

$$\vartheta = \tfrac{2}{3} \operatorname{tg}\alpha \, \ln\!\left(1 + \frac{t}{t_*}\right) = \operatorname{tg}\alpha \, \ln\frac{r}{r_0}. \tag{12–12}$$

Nel viaggio Terra–Marte avremo $r_1/r_0 = 1.52$, e la (12–11) dà $t_1 = 0.87\, t_*$; poi dalla (12–12) si ottiene $\vartheta_1 = 0.42 \operatorname{tg}\alpha$. Scegliamo ad es. $\alpha = 85°$, e otteniamo $\vartheta_1 = 4.8\,\text{rad} = 0.76\,\text{giri}$. Infine $t_1 = 1.06\,\text{anni}$. Lasciamo al lettore il calcolo di b.

Come ultimo risultato, usiamo la (8–7) per calcolare $\ddot{s}$ e ϱ (raggio di curvatura). Si vede subito che

$$\ddot{s} = b - g\cos\alpha = -\tfrac{1}{2} g\cos\alpha$$

per la (12–10). Dunque i motori dimezzano la decelerazione dovuta all'attrazione solare. Infine

$$g\sin\alpha = \frac{v^2}{\varrho}$$

e quindi

$$\varrho = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

L'interpretazione geometrica è indicata in fig. 12–1.