

9. Sistemi di coordinate

Fino a questo punto non abbiamo mai impiegato le coordinate, contrariamente all'uso corrente: ci sono delle ragioni per questa scelta. In molti casi non è necessario far uso di coordinate per trattare un argomento o risolvere un problema; se pensiamo ad es. alle questioni geometriche, non è un caso se dalla sistemazione euclidea della geometria all'invenzione delle coordinate cartesiane passano 19 secoli.

Anche in fisica, possiamo ricordare in primo luogo che Galileo non si serve di coordinate, il che non gl'impedisce di porre le basi della meccanica. Inoltre, oggi abbiamo imparato che questioni anche assai profonde possono essere comprese meglio se si fa ricorso a strutture matematiche che rappresentino più da vicino gli oggetti della realtà, senza sovrapporvi costruzioni artificiali, come spesso sono le coordinate. Così nell'introduzione alla meccanica è bene che si capisca che il sistema di riferimento non è la stessa cosa di un sistema di coordinate; che i vettori che rappresentano spostamenti, velocità, forze, sono altra cosa dalle loro componenti, ecc.

Ciò non toglie che un uso intelligente delle coordinate può essere utilissimo in certi casi (o addirittura fondamentale): tutto sta a rendersi conto di quale sia, in ogni singola situazione, la "scelta intelligente"! Perciò dedicheremo questo capitolo a discutere l'idea generale di "sistema di coordinate" (abbr. SC), a definire i principali, e a vedere qualche esempio concreto.

Definizione di coordinate

Sistema di coordinate è un'applicazione $\sigma : E^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Non è detto che l'applicazione sia sempre *su* \mathbf{R}^3 , ossia che tutte le terne di reali siano valori possibili per le coordinate: questo accade per le ben note coordinate cartesiane, ma ad es. non accade per le coordinate polari. Quello che invece si deve sempre richiedere, è che σ sia *iniettiva* sulla sua immagine $\sigma(E^3)$, ossia che una stessa terna di coordinate non si possa ottenere a partire da due punti diversi di E^3 . In parole semplici: a ogni punto P si associano 3 coordinate (a, b, c) e le 3 coordinate *determinano* P.

Nota: Per l'esattezza, non basta un'applicazione quale che sia per definire un SC. Occorre per lo meno che sia *continua*, e per i nostri scopi dev'essere anche *differenziabile* (magari due volte). Ma non è qui possibile approfondire, senza adeguate premesse matematiche.

Coordinate cartesiane

Sfruttando quanto già visto, possiamo definirle così: scegliamo un punto O (origine) e una base (una *terna*) di vettori $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Allora le componenti (x, y, z) di \overrightarrow{OP} in quella base:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

sono le *coordinate cartesiane* di P.

Se la terna $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ è ortonormale, le coordinate si chiamano *ortogonali* e *isometriche*. Un SC cartesiano ortogonale isometrico è del tutto definito scegliendo l'origine e tre semirette ortogonali. Per esempio, la terna cartesiana può essere costituita da tre spigoli del laboratorio: è per questo che spesso s'identifica riferimento e terna, come nella frase "sia dato un riferimento con origine nel centro della Terra e assi orientati secondo le stelle fisse." Ma questo è un *abuso di linguaggio*, che è bene cercare di evitare. Analogamente non si dovrebbe dire "un corpo si muove lungo l'asse x " oppure "sia dato un campo magnetico uniforme diretto come l'asse z ." Il moto o il campo fanno parte della situazione fisica e perciò *vengono prima*: le coordinate che scegliamo per descriverla vengono dopo.

Destra e sinistra

Un concetto assai più delicato è la distinzione tra SC *destro* e *sinistro*. È un fatto intuitivo che prese due basi ortonormali possono presentarsi due casi:

- a) le due basi possono essere portate a coincidere con una rotazione
- b) ciò non è possibile.

Naturalmente questo è un caso particolare di un fatto molto più generale: nello spazio fisico si possono costruire figure (e oggetti *reali*) che sono *uguali*, nel senso che tutte le dimensioni, angoli, ecc. coincidono nei due oggetti (il termine matematico è *congruenti*); e tuttavia le figure non sono *sovrapponibili*, ossia non esiste nessun *movimento* (traslazione, rotazione) che le porti a coincidere. L'esempio classico sono i due guanti di uno stesso paio. Diamo qui per scontato che a questa proprietà fisica corrisponde un *teorema* nella descrizione matematica: in E^3 esistono due tipi di congruenza (diretta e inversa).

Tornando alle basi ortonormali, ne abbiamo dunque di due classi: quelle di ciascuna classe sono tutte direttamente congruenti tra loro, e inversamente a quelle dell'altra classe. Perciò quando definiamo una base è necessario sapere a quale classe appartiene. Il problema acquista una luce completamente diversa, a seconda che lo si veda da un punto di vista pratico, o dal punto di vista dei principi fondamentali della fisica.

In pratica si può definire una terna facendo ricorso a oggetti familiari: le mani, le viti, gli orologi a lancette, i cavatappi, ecc. Naturalmente tutto dipende

dal fatto che ogni essere umano definisce la sua mano destra in accordo con gli altri, che tutti gli orologi girano nello stesso senso, ecc. (per le viti la cosa è leggermente più complicata, perché oltre alle viti comuni, che si chiamano “destre,” esistono anche quelle “sinistre”: ma per fortuna si usano molto più di rado).

Possiamo dunque dire:

- pollice indice e medio della mano destra definiscono una terna *destra*
- un uomo che abbia i piedi nell’origine, e la testa nella direzione e verso di \vec{e}_z , vedrà in senso *antiorario* la rotazione che porta \vec{e}_x su \vec{e}_y

e definizioni analoghe si possono dare con le viti e i cavatappi.

È però evidente che tutte queste definizioni hanno in comune il fatto di appoggiarsi su oggetti e/o convenzioni che non hanno una base fisica intrinseca. Sorge perciò la domanda: è possibile distinguere tra destra e sinistra *su base fisica*? O in altre parole: nella realtà fisica, destra e sinistra sono esattamente equivalenti o no?

Si può ricondurre la risposta alla discussione fatta sul principio di relatività: se in due laboratori si adottano convenzioni opposte, si tratta di vedere se sarà possibile riconoscerli in base all’esito degli esperimenti (principio del taccuino). Come al solito, soltanto l’esperienza può decidere, e l’esperienza ha mostrato che *una larghissima classe di fenomeni non permette la decisione* (destra e sinistra sono fisicamente equivalenti). Di nuovo, questa equivalenza aveva finito per essere presa come logicamente necessaria, ed è stato quindi un fatto assai sorprendente che poco più di trent’anni fa si siano scoperti fenomeni in cui invece l’equivalenza di destra e sinistra non è rispettata (i decadimenti di particelle legati alle interazioni deboli). Ma dobbiamo qui limitarci a questo breve cenno.

Nel seguito parlando di coordinate cartesiane sottintenderemo sempre *ortogonali, destre, isometriche*.

Coordinate polari nel piano

È il secondo SC in ordine d’importanza. La definizione è la seguente: in un dato piano si sceglie ancora un’origine O (che in questo caso viene anche detta *polo*) una semiretta u uscente da O e un *verso positivo* delle rotazioni (o degli angoli, il che è lo stesso). Le coordinate r e ϑ sono rispettivamente la *distanza* del punto P da O e l’angolo fra u e \overrightarrow{OP} (fig. 9–1).

In questo caso si vede che il SC *non* è un’applicazione da E^2 (piano euclideo) su \mathbf{R}^2 : infatti i valori negativi di r non vengono usati. Inoltre non servono neppure tutti i valori reali di ϑ , e due distinte convenzioni sono in uso:

- la prima restringe ϑ all’intervallo $[0, 2\pi)$
- la seconda all’intervallo $(-\pi, \pi]$

(misure in radianti); ma naturalmente infinite altre scelte sarebbero ugualmente legittime. In certi casi riesce anche comodo prendere $\vartheta \in \mathbf{R}$, il che significa usare

un SC a più valori: la ragione è che quando un punto si muove girando attorno ad O, le definizioni “ortodosse” introducono delle *discontinuità* artificiali, che è meglio evitare.

Un'altra particolarità delle coordinate polari è che per il punto O la coordinata ϑ è *indefinita*; il che vuol dire che a rigore la definizione di SC data sopra non funziona bene in questo caso, e andrebbe modificata. Ma non è il caso d'insistere, perché raramente questo fatto crea vere difficoltà.

Coordinate cilindriche

Questo SC in E^3 si definisce comodamente a partire dalle coordinate polari nel piano. Preso un piano π , e in esso le coordinate polari definite sopra, occorre aggiungere una terza coordinata. Osserviamo intanto che il piano *orientato* π individua un semispazio positivo e uno negativo: il semispazio *positivo* è quello dal quale il verso positivo di rotazione sul piano appare *antiorario*.

Ciò posto, per un punto P qualsiasi le coordinate cilindriche sono definite come segue: r e φ (si usa di solito questa lettera, in luogo di ϑ) sono le coordinate polari della *proiezione ortogonale* P' di P su π ; z è la distanza di P dal piano (fig. 9-2), presa col segno positivo se P sta nel semispazio positivo, ecc.

Si può anche definire la coordinata z come segue: si prende come asse z la perpendicolare a π condotta per O, e orientata verso il semispazio positivo; z è l'ascissa della proiezione ortogonale P'' di P sull'asse z .

Valgono naturalmente per le coordinate cilindriche tutte le osservazioni fatte per quelle polari nel piano.

Coordinate polari nello spazio

È questo il terzo e ultimo esempio di SC di uso frequente. Per definire le coordinate polari nello spazio occorre assegnare:

- un *polo* O
- una semiretta u per O (*asse polare*)
- un semipiano α avente u come origine.

La definizione delle coordinate è la seguente:

- ρ è la distanza OP
- ϑ (*colatitudine*) è l'angolo fra u e \overrightarrow{OP} , inteso nell'intervallo $[0, \pi]$
- φ (*azimut*) è l'angolo fra α e il semipiano di origine u e passante per P, inteso positivo nel senso antiorario attorno a u , e con le stesse convenzioni quanto all'intervallo viste per le coordinate polari piane (fig. 9-3).

Il nome “colatitudine” viene dalle coordinate geografiche: infatti ϑ è il complemento della latitudine geografica. In luogo di “azimut” sarebbe più coerente parlare di “longitudine,” ma quello indicato è l'uso più comune.

Come per le coordinate polari piane, esistono delle anomalie: i punti della semiretta u (per i quali $\vartheta = 0$) e quelli della semiretta opposta (dove $\vartheta = \pi$) hanno una φ indefinita; il punto O è ancora più anomalo, perché non vi sono definite né φ né ϑ .

Coordinate associate

I tre SC sopra descritti (cartesiane, cilindriche, polari) sono spesso usati insieme (*associati*). Per questo esistono precise convenzioni, che occorre rispettare, per evitare errori. Eccole:

- l'asse polare viene sempre preso come asse z nelle coordinate cartesiane e cilindriche
- l'asse x sta sempre nel semipiano α , origine della coordinata φ .

Ne seguono le *formule di trasformazione*, che riportiamo senza dimostrarle in dettaglio:

Da coordinate cilindriche a cartesiane:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z.$$

Nota: A parte la z , queste sono anche le trasformazioni da polari a cartesiane nel piano.

Da coordinate polari a cartesiane:

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \vartheta.$$

Da coordinate polari a cilindriche:

$$r = \rho \sin \vartheta$$

$$\varphi = \varphi$$

$$z = \rho \cos \vartheta.$$

Le trasformazioni inverse sono più delicate, in quanto richiedono l'impiego delle funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcotangente). Vediamo un solo esempio:

Da coordinate cartesiane a cilindriche:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$z = z.$$

Il problema è che la funzione \arctg , avendo come argomento y/x , non può distinguere due punti opposti, che invece dovrebbero avere coordinate φ differenti di π (fig. 9-4). Inoltre la formula così com'è non va bene se $x = 0$, sebbene i punti dell'asse y siano buoni come gli altri.

La soluzione sta nell'usare un'espressione diversa:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arg(x, y) \\ z &= z. \end{aligned}$$

dove si è introdotta la funzione \arg , la cui definizione è illustrata in fig. 9-5.

Lasciamo per esercizio le altre trasformazioni: da cartesiane a polari e da cilindriche a polari.

Linee coordinate, base ortonormale associata

Dato un SC, si chiamano *linee coordinate* le curve su cui varia una sola coordinata. Il SC si dice *ortogonale* se le linee coordinate sono sempre ortogonali tra loro. Tutti i SC più usati sono ortogonali.

Esempio 1: In coordinate cartesiane (x, y, z) le linee coordinate x sono le rette parallele all'asse x , ecc.

Esempio 2: In coordinate polari (r, φ) nel piano le linee coordinate r sono le semirette uscenti dal polo O; le linee coordinate φ sono i cerchi di centro O (fig. 9-6).

Esempio 3: In coordinate polari $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ nello spazio le linee coordinate ϱ sono ancora le semirette uscenti dal polo; le linee coordinate ϑ sono i semicerchi di centro O con diametro lungo l'asse polare; le linee coordinate φ sono i cerchi con centro sull'asse polare (o sul suo prolungamento) e ad esso perpendicolari (fig. 9-7).

D'ora in poi ci occuperemo solo di SC ortogonali. Siano (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le coordinate. In ogni punto P si associano al SC tre vettori unitari, tangenti alle linee coordinate, e orientati nel verso in cui ciascuna coordinata cresce: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (fig. 9-8). Questa si chiama la *base ortonormale associata* al SC (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

Attenzione: Solo per le coordinate cartesiane la base ortonormale associata è la stessa in tutti i punti!

Allora per un vettore definito in P (ad es. la velocità di un punto materiale che passa per P) potremo scrivere:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

e poi

$$v_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{v}, \quad \text{ecc.}$$

I tre numeri v_1, v_2, v_3 si chiamano brevemente le *componenti di \vec{v} nel SC* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ; ma bisogna tener presente che — con la sola eccezione delle coordinate cartesiane — queste componenti *dipendono anche dal punto P*.

Nota: I versori della base ortonormale sono intesi come *numeri puri*; in tal modo se \vec{v} è una grandezza fisica qualsiasi, il vettore e le sue componenti hanno le stesse dimensioni, il che semplifica tutti i ragionamenti.

Applicazione: velocità e accelerazione in coordinate polari

È spesso utile esprimere velocità e accelerazione in coordinate polari, sia nel piano, sia nello spazio. Qui ci limiteremo a trattare il primo caso.

Con riferimento alla fig. 9-9, se P è la posizione del punto all'istante t , e P' quella all'istante $t + \Delta t$, abbiamo

$$\Delta\vec{r} = \overline{P\vec{P}'} = \overline{P\vec{P}_1} + \overline{P_1\vec{P}'}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\overline{P\vec{P}_1} &= r \Delta\vartheta \vec{e}_\vartheta + o(\Delta\vartheta) \\ \overline{P_1\vec{P}'} &= \overline{P_1\vec{P}_2} = \overline{P_1\vec{P}_2} + O(\Delta r \Delta\vartheta) = \Delta r \vec{e}_r + O(\Delta r \Delta\vartheta)\end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta\vec{r} = \Delta r \vec{e}_r + r \Delta\vartheta \vec{e}_\vartheta + O(\Delta r \Delta\vartheta) + o(\Delta\vartheta).$$

Poiché tanto Δr quanto $\Delta\vartheta$ sono al massimo $O(\Delta t)$, si può anche scrivere

$$\Delta\vec{r} = \Delta r \vec{e}_r + r \Delta\vartheta \vec{e}_\vartheta + o(\Delta t)$$

e infine:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta, \quad (9-1)$$

che risponde al primo problema: le componenti della velocità sono

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\vartheta = r\dot{\vartheta}. \quad (9-2)$$

Possiamo interpretare le (9-1), (9-2) nel modo seguente: un moto generico può sempre essere scomposto (per piccoli Δt) nella sua *parte radiale* e nella sua *parte trasversale*. Alla prima corrisponde la *velocità radiale* \dot{r} , alla seconda la *velocità trasversale*, che è la stessa che si avrebbe nel moto circolare uniforme con velocità angolare $\dot{\vartheta}$, ossia $r\dot{\vartheta}$.

Passiamo ora all'accelerazione. Basta partire dalla (9-1), e derivarla rispetto a t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r\dot{\vartheta} \dot{\vec{e}}_\vartheta. \quad (9-3)$$

Per ottenere la (9-3) abbiamo fatto semplicemente uso della regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{d}{dt} fg = \dot{f}g + f\dot{g},$$

che vale anche quando f è uno scalare e g un vettore, o viceversa. Inoltre abbiamo tenuto conto del fatto che i vettori \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ della base associata alle coordinate polari cambiano da punto a punto, e perciò dipendono da t se li calcoliamo seguendo un punto che si muove. Resta però da scoprire che cosa siano $\dot{\vec{e}}_r$, $\dot{\vec{e}}_\vartheta$.

Osserviamo la fig. 9-10, dove abbiamo riportato alla stessa origine le due basi relative ai due istanti t e $t + \Delta t$. La base nel tempo Δt ruota dell'angolo $\Delta\vartheta$, e perciò le variazioni dei due vettori sono:

$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta \Delta\vartheta + o(\Delta t), \quad \Delta\vec{e}_\vartheta = -\vec{e}_r \Delta\vartheta + o(\Delta t).$$

Ne segue

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta, \quad \dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \vec{e}_r$$

e sostituendo nella (9-3):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r\ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta - r\dot{\vartheta}^2 \vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) \vec{e}_\vartheta. \end{aligned} \quad (9-4)$$

ossia:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2, \quad a_\vartheta = r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}. \quad (9-5)$$

Alla componente trasversale dell'accelerazione si può dare un'altra espressione, molto utile in certi casi:

$$a_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}). \quad (9-6)$$

La verifica è immediata.

Attenzione: È importante non confondere la decomposizione (9-4) dell'accelerazione, in componenti *radiale* e *trasversale*, con quella data dalla (8-7), in componenti *tangenziale* e *normale*. Le basi sono in generale diverse: \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ nel primo caso, $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ nel secondo (fig. 9-11). Sfortunatamente la componente normale viene talora chiamata *centripeta*: denominazione ragionevole, ma che può accrescere il rischio di confusione.