7. Riferimenti, spazio, vettori

Discutendo nel cap. prec. il principio di relatività, abbiamo più volte fatto uso del termine "riferimento." Poiché si tratta di uno dei concetti fondamentali della fisica, dobbiamo ora discuterlo con una certa attenzione.

Riferimenti

Come dice il termine, un riferimento serve per riferirvi il moto dei corpi (o più in generale qualsiasi fenomeno fisico). Perciò un riferimento è qualcosa di reale, di tangibile, e non un'astrazione matematica. Possiamo dire che il riferimento è un *laboratorio*, ossia un *ambiente* (corpo) *rigido*, dotato di tutto l'insieme di *strumenti necessari per le misure* (di posizione, di tempo, di velocità, ecc.) Ad es. un riferimento si potrà trovare solidale alla superficie terrestre (è il caso più comune), oppure montato su di un treno, o in una nave (il "gran navilio" di Galileo), o in una navetta spaziale...

Spesso converrà pensare a un riferimento non materialmente esistente, ma ben definito e fisicamente possibile. L'esempio più ovvio è il riferimento solidale al centro della Terra, ma orientato come le stelle fisse, di cui abbiamo parlato alla fine del Cap. 5: l'astronomia insegna come caratterizzare le misure rispetto a tale riferimento.

Attenzione: Spesso si confonde "riferimento" (sistema di riferimento) e "sistema di coordinate." Si tratta di due concetti del tutto distinti: il primo, come abbiamo già detto, è un oggetto della fisica; il secondo fa parte della descrizione matematica. In uno stesso riferimento si possono benissimo usare diversi sistemi di coordinate (cartesiane con assi scelti come fa comodo, polari, ecc.); ma ad es. il fatto che un riferimento sia *inerziale* è una sua proprietà *fisica*, che non ha niente a che fare con le coordinate che si decide di usare.

Spazio euclideo

A un riferimento si associa il suo "spazio fisico," che è lo spazio dell'intuizione comune, ma dotato di una struttura matematica: nella fisica newtoniana si tratta di uno *spazio euclideo* 3*-dimensionale* E^3. Non occorre entrare in dettagli, perché le proprietà di E^3 sono ben note dalla *geometria euclidea*, di cui possiamo presupporre i concetti base (punti, rette, distanze, angoli ...) e i teoremi fondamentali. Abbiamo già osservato che lo spazio E^3 viene abbandonato nella relatività generale (non in quella ristretta); vedremo meglio più avanti.

Vettori nello spazio euclideo

In uno spazio euclideo si definisce in modo semplice il concetto di *vettore*. Si possono seguire due strade equivalenti:

– Con la prima, si parte dall'idea di *spostamento*, o più esattamente di *traslazione*: ogni traslazione è caratterizzata dal suo *vettore* (fig. 7–1) che ne dà la *grandezza* e la *direzione* (*verso* incluso). Alla *composizione* delle traslazioni (che è *associativa*) corrisponde l'*addizione* dei vettori, secondo la ben nota legge del parallelogrammo (fig. 7–2): l'addizione di vettori è *commutativa.* È definita la traslazione *nulla* e quindi il *vettore nullo*; per ogni traslazione esiste l'*inversa*, cui corrisponde il vettore *opposto*, che ha la stessa grandezza e direzione ma verso contrario. Tutte queste proprietà delle traslazioni e dei vettori si riassumono dicendo che il loro insieme ha la struttura di un *gruppo commutativo.*

– La seconda strada parte dai *segmenti orientati*, come $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ in fig. 7–3. Tra i segmenti orientati esiste una *relazione di equivalenza*: sono equivalenti due segmenti paralleli, con la stessa lunghezza e lo stesso verso. Si chiama allora *vettore* ciascuna classe di equivalenza di segmenti orientati. Perciò a rigore $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (cioè un singolo segmento orientato) non è un vettore, ma è un comodo abuso dire anche "il vettore $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$."

Tralasciamo di rendere rigorosa l'affermazione, intuitivamente evidente, che le due strade sono in sostanza la stessa cosa.

Oltre all'addizione, sui vettori è definita un'altra operazione: la *moltiplicazione per uno scalare* (in questo contesto, "scalare" significa "numero reale"). Non è necessario insistere, perché la definizione è geometricamente evidente: la lunghezza del vettore viene alterata in proporzione al moltiplicatore; la direzione resta la stessa, e il verso cambia se il moltiplicatore è negativo (fig. 7–4). Ricordiamo solo la *proprietà distributiva*:

$$c\,(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}.$$

L'insieme dei vettori in E^3 è uno *spazio vettoriale* di dimensione 3 (questo va ancora chiarito), che indicheremo con V^3.

Scelto in E^3 un punto O, a ogni vettore $\vec{r}$ corrisponde un punto P tale che $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}$, e viceversa: a ogni punto P corrisponde il vettore $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$. Abbiamo così una corrispondenza *bigettiva* fra E^3 e V^3. Perciò si usa descrivere un punto P mediante il vettore $\vec{r}$: va però tenuto presente che la corrispondenza dipende dalla scelta del punto O, che *non è intrinseca al riferimento.*

Attenzione: Molto spesso, quando siano state introdotte coordinate cartesiane, il punto O è l'origine di queste: ma in generale la corrispondenza fra punti e vettori non richiede le coordinate.

Dimensioni e basi

L'indice ^{3} in E^3 e in V^3 sta a significare che si tratta di spazi 3-*dimensionali*, il che è del tutto intuitivo; ma vediamone ora la precisa definizione matematica. Premettiamo alcune abbreviazioni terminologiche.

Definizione: Diremo che n vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sono *indipendenti* (sottinteso *linearmente*) se la relazione

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = 0$$

vale solo quando tutti i $c_1, \ldots, c_n$ sono nulli.

In particolare, se n vettori sono tra loro indipendenti, nessuno di essi può essere espresso come *combinazione lineare* degli altri: l'equazione

$$\vec{v}_1 = b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_n\vec{v}_n \tag{7–1}$$

non ha soluzioni nelle incognite $b_2, \ldots, b_n$, e lo stesso accade per le equazioni analoghe con $\vec{v}_2$, ecc. al posto di $\vec{v}_1$.

Definizione: Se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ non sono indipendenti si dicono *dipendenti*, ovvero si dice che $\vec{v}_1$ *dipende* da $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, ecc.

Osservazione: Se n vettori sono indipendenti, nessuno di essi è nullo: infatti se $\vec{v}_1 = 0$, la (7–1) è soddisfatta prendendo i b tutti nulli.

Definizione: Due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ tra loro dipendenti si dicono anche *paralleli*. Se ad es. $\vec{v} \neq 0$, sarà $\vec{u} = c\vec{v}$: i vettori si dicono *concordi* se $c > 0$.

Ciò posto, dicendo che V^3 è uno spazio (vettoriale) 3-dimensionale intendiamo questo:

– esistono 3 vettori indipendenti
– 4 (o più) sono sempre dipendenti.

Definizione: Una terna $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ di vettori indipendenti di V^3 si chiama una *base*.

Poiché ogni altro vettore $\vec{v}$ è necessariamente dipendente da $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, si potrà sempre scrivere

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3;$$

i tre numeri v_1, v_2, v_3 si dicono le *componenti* di $\vec{v}$ nella base data. Per questo motivo, una volta fissata una base, un vettore può essere visto come una *terna ordinata di numeri reali* (ossia un elemento di $\mathbf{R}^3$); ma bisogna sempre ricordare che *le componenti dipendono dalla base.*

Valgono le seguenti proprietà, che si dimostrano banalmente:

– le componenti della somma di due vettori sono le somme delle componenti
– le componenti di $c\vec{v}$ sono cv_1, cv_2, cv_3.

In una parola, ciò significa che l'applicazione $V^3 \to \mathbf{R}^3$ è un *isomorfismo* fra spazi vettoriali.

Osservazione: È evidente che tutto quanto abbiamo detto fin qui si estende a spazi vettoriali con qualsiasi numero (finito) di dimensioni; questo potrà occasionalmente riuscire utile in seguito.

Per l'applicazione allo spazio fisico, è ovvio che E^3 si chiama 3-dimensionale perché è in corrispondenza biunivoca con V^3. In termini intuitivi, tenendo presente l'interpretazione dei vettori come spostamenti, possiamo dire che lo spazio fisico è 3-dimensionale perché si possono scegliere una volta per tutte tre direzioni, in modo tale che da ogni punto se ne può raggiungere qualsiasi altro componendo tre spostamenti in quelle direzioni: due sole direzioni non sono in generale sufficienti, mentre quattro non sono mai necessarie. È bene non dimenticare che la tridimensionalità dello spazio fisico *è un fatto sperimentale*, non una necessità logica o *a priori*, in nessun senso.

Distanza e prodotto scalare

Un concetto dello spazio euclideo del quale non abbiamo ancora fatto uso è quello di *distanza.* (Per questo motivo, la struttura fin qui costruita non è in realtà uno spazio euclideo, ma uno *spazio affine.*) La distanza si può introdurre alla maniera della geometria euclidea elementare, ma per il nostro uso conviene passare attraverso un arricchimento della struttura di V^3, dotandolo di *prodotto scalare.* La definizione elementare di prodotto scalare è nota: "prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso." Conviene però prendere a base della definizione alcune proprietà che da quella definizione elementare si possono dedurre: questo perché in applicazioni non geometriche non è sempre chiaro in partenza che cosa sia "modulo," e che cosa "angolo compreso."

Definizione: Prodotto scalare in V^3 (o più in generale, in V^n) è un'applicazione

$$V \times V \to \mathbf{R}, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$$

(cioè una funzione a valori reali definita sulle coppie ordinate di vettori) con le seguenti proprietà:

– è *lineare* in $\vec{v}$, ossia

$$\vec{u} \cdot (a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2) = a_1\, \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + a_2\, \vec{u} \cdot \vec{v}_2$$

– è *simmetrica*, ossia

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

– è *definita positiva*:

$$\vec{v} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{v} > 0.$$

Dalle prime due proprietà segue ovviamente anche la linearità in $\vec{u}$.

Definizione: Si chiama *norma* o *modulo* di un vettore l'espressione

$$|\vec{v}\,| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Se $|\vec{v}\,| = 1$, il vettore $\vec{v}$ si dice *unitario*. È ovvio che dato un vettore non nullo ne esiste sempre un altro unitario, ad esso parallelo e concorde.

Due conseguenze immediate di queste definizioni (che non dimostriamo) sono:

– la *disuguaglianza triangolare*

$$|\vec{u} + \vec{v}\,| \le |\vec{u}\,| + |\vec{v}\,|$$

dove il segno = vale sse (se e solo se) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono *paralleli e concordi*;

– la *disuguaglianza di Schwarz*

$$-|\vec{u}\,||\vec{v}\,| \le \vec{u} \cdot \vec{v} \le |\vec{u}\,||\vec{v}\,|$$

dove il segno = vale a sinistra sse $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli e opposti, a destra sse sono paralleli e concordi.

Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che esiste sempre uno e un solo $\vartheta \in [0, \pi]$ tale che

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}\,||\vec{v}\,| \cos\vartheta;$$

abbiamo così ritrovato l'angolo fra i vettori, e la definizione elementare di prodotto scalare.

Definizione: Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (da cui $\vartheta = \pi/2$), $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dicono *ortogonali*.

Osservazione: Due o più vettori non nulli, e a due a due ortogonali, sono sempre indipendenti: infatti se è

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n = 0$$

il prodotto scalare con $\vec{v}_1$ porta $c_1 = 0$, ecc. Ne segue che in V^n non possono esistere più di n vettori non nulli, a due a due tra loro ortogonali. Vale poi il seguente risultato, che non dimostriamo:

Teorema: In V^n si possono trovare n vettori non nulli, a due a due tra loro ortogonali.

Definizione: Un insieme di n vettori unitari, a due a due tra loro ortogonali, si chiama una *base ortonormale* di V^n.

Le basi ortonormali sono estremamente comode, e perciò assai usate. Anzi d'ora in poi, a meno di diverso avviso, useremo soltanto basi ortonormali. Spesso una base ortonormale di V^3 si denota con $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ oppure con $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Una proprietà delle basi ortonormali, che non vale per una base generica, è la seguente. Le componenti v_1, v_2, v_3 di $\vec{v}$ si ottengono per mezzo di prodotti scalari:

$$v_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{v}, \quad v_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{v}, \quad v_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{v}.$$

Da qui segue anche subito:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

I vettori in fisica

Dobbiamo ora tornare alla fisica, per rispondere a una domanda: a che servono i vettori? Abbiamo già visto che possiamo usare un vettore per individuare un punto nello spazio, ed è perciò abbastanza evidente che i vettori riescono utili per descrivere il moto dei corpi (lo vedremo in dettaglio nel cap. seguente). Infatti non è difficile dimostrare che velocità, accelerazione, quantità di moto sono vettori; la cosa riesce però meno evidente per altre grandezze, come ad es. le forze.

Nelle presentazioni elementari si usa dire che una grandezza ha carattere vettoriale quando per determinarla occorre assegnarne *intensità*, *direzione* e *verso*. Sebbene questo sia accettabile come approccio intuitivo, non soddisferebbe un matematico; e anche dal punto di vista fisico lascia a desiderare, per due ragioni:

– non è detto che sia sempre facile definire intensità, direzione e verso di una grandezza vettoriale
– viceversa, si possono dare esempi di grandezze non vettoriali, per le quali si potrebbe assegnare in modo naturale tutte e tre queste caratteristiche: il più chiaro è quello delle rotazioni, su cui però non possiamo ora soffermarci.

In effetti la proprietà più importante dei vettori è la possibilità di *sommarli*: dunque perché una grandezza sia un vettore è necessario che si possa parlare di somma. Vediamo il caso delle forze.

Definire la somma di due forze è facile: date due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, applicate *allo stesso punto* di un dato corpo, la loro somma è quella forza che applicata sempre nello stesso punto produce lo stesso effetto dell'applicazione congiunta di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Per effetto intendiamo tanto il moto che quelle forze possono produrre, quanto eventuali deformazioni di un corpo vincolato.

Nota: È necessario che le forze siano applicate allo stesso punto. Infatti potremmo avere due forze opposte, applicate agli estremi di una molla: sebbene la somma delle forze sia zero, l'effetto delle due forze non è nullo, perché la molla si allunga. Ancora: se due forze opposte ma non sulla stessa retta agiscono su di un corpo, questo ruoterà, e di nuovo non potremo sostituirle con una forza nulla, ecc.

È un *fatto sperimentale* che una tale forza esiste sempre, e che si ottiene da $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ con la regola del parallelogramma: il che dimostra che la somma di forze ha le proprietà richieste alla somma vettoriale. Ormai siamo talmente abituati a ciò (l'abbiamo sentito dire fin da bambini) che non ci rendiamo più conto che si tratta di una verità di fatto, ossia che potrebbe anche essere diversamente. Ma non è stato così per i fondatori della meccanica: il problema della composizione delle forze ha dato da pensare — da un punto di vista logico — ancora in questo secolo.

La più forte verifica sperimentale del carattere vettoriale delle forze sta nella meccanica celeste. Per descrivere il moto di un pianeta è necessario tener conto delle attrazioni gravitazionali del Sole e di tutti gli altri pianeti. Queste forze vengono *sommate vettorialmente* nella seconda legge della dinamica, per determinare l'accelerazione del pianeta: i risultati dei calcoli concordano con le osservazioni, che sono di grande precisione (almeno 10^{-8}).

Veniamo a un altro punto: le equazioni della fisica connettono fra loro grandezze *dello stesso tipo*: ad es. $\vec{F} = m\vec{a}$ è una relazione fra vettori, il primo principio della termodinamica è una relazione fra scalari, ecc. (Ci sono anche oggetti più complicati, ma in questo corso non avremo occasione d'incontrarli.) Non accade mai che a primo membro di un'equazione ci sia un vettore, e a secondo membro uno scalare, o altre cose del genere. Può sembrare che questa sia una banalità, più o meno come "non si possono sommare le mele con le galline," ma non è così: c'è sotto una questione profonda, sulla quale però non è il caso di fermarsi, almeno per ora.

8. Tempo e moto

In questo capitolo cominceremo a introdurre le idee fondamentali della cinematica del punto materiale. Una sommaria esposizione dei necessari concetti di calcolo differenziale si trova nel Cap. 10.

Il punto materiale

Il moto di un corpo generico può essere assai complesso. Infatti per "corpo" possiamo intendere qualsiasi cosa: un pianeta, un calciatore, un atomo, l'acqua di un lago... Occorre quindi partire da qualcosa di più semplice, e questo si fa introducendo una prima schematizzazione: quella di *punto materiale.* Con tale termine s'intende un qualsiasi oggetto di cui non interessa la "struttura interna" (in particolare perché non ha effetto sul moto).

Occorre però fare attenzione: non è affatto detto che un punto materiale debba essere "piccolo": può essere un elettrone, oppure un granello di polvere, o una palla da tennis; ma può anche essere la Terra o una galassia. Viceversa, in certe situazioni un atomo non viene trattato come punto materiale (ad es. perché viene urtato da un elettrone, che ne cambia lo stato di eccitazione: urto *anelastico*). Un esempio più banale, ma in certo senso più significativo, è quello di una pallina che rotola lungo un piano inclinato: vedremo in seguito che la sua accelerazione, indipendentemente dalle dimensioni, è sempre del 29% inferiore a quella che si calcolerebbe trattandola come punto materiale!

Traiettoria e curva oraria

Scelto un riferimento, per descrivere il moto di un punto materiale basta darne la posizione P (un punto nello spazio fisico del riferimento) in funzione del tempo. Più rigorosamente, assegneremo una *curva oraria* γ in E^3:

$$\gamma : \mathbf{R} \to E^3, \quad t \mapsto \mathrm{P} = \gamma(t).$$

Attenzione: Una curva oraria non è solo l'insieme delle posizioni occupate da P ai diversi istanti, perché è *parametrizzata* dal tempo t. L'insieme dei punti (il *sostegno* della curva oraria) è la *traiettoria.* Potremo avere ad es. traiettoria circolare, oppure rettilinea, ecc. Ma sulla stessa traiettoria il moto può essere uniforme, uniformemente accelerato, oscillante ...; e in ciascun caso la γ è diversa. Possiamo anche descrivere la situazione come segue: γ è la traiettoria con le "etichette" t (fig. 8–1).

Come abbiamo già visto, se scegliamo un punto O (origine) nel nostro riferimento, a ogni punto P corrisponde un vettore. Ne segue che a un punto che si muove corrisponde un vettore *funzione del tempo*: $\vec{r}(t)$. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1: L'espressione
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$
rappresenta (fig. 8–2) un moto uniforme con velocità $\vec{v}$ e posizione iniziale P_0 definita da $\vec{r}_0$ per mezzo della relazione $\overrightarrow{\mathrm{OP}}_0 = \vec{r}_0$.

Esempio 2: L'espressione
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,\sin\omega t$$
rappresenta invece un moto armonico lungo la retta per P_0 individuata dal vettore $\vec{a}$ (fig. 8–3). Il modulo di $\vec{a}$ dà l'ampiezza dell'oscillazione.

Esempio 3: L'espressione
$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 \tag{8–1}$$
descrive il moto di un proiettile lanciato dal punto O con velocità iniziale $\vec{v}_0$. Osserviamo che la (8–1) esprime $\vec{r}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_0$ e di $\vec{g}$: questo basta per affermare che il moto si svolge tutto nel piano passante per O che contiene quei vettori. Com'è noto, la traiettoria è una parabola (fig. 8–4).

Esempio 4: L'espressione
$$\vec{r} = a\,(\vec{\imath}\,\cos\omega t + \vec{\jmath}\,\sin\omega t) \tag{8–2}$$
dove $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ sono vettori unitari tra loro ortogonali, rappresenta un moto circolare uniforme con velocità angolare ω: la traiettoria è un cerchio di raggio a nel piano individuato da $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ (fig. 8–5).

Esempio 5: Invece
$$\vec{r} = a\,(\vec{\imath}\,\cos\alpha t^2 + \vec{\jmath}\,\sin\alpha t^2)$$
è ancora un moto circolare, ma uniformemente accelerato: la traiettoria è la stessa di prima, ma la curva oraria è diversa!

Problema: Qual è il moto descritto dalla (8–2) se $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ non sono unitari? E se non sono neppure ortogonali?

Ascissa curvilinea e legge oraria

Quando la traiettoria di un moto è conosciuta (magari perché è fissata dai vincoli: si pensi a un pendolo) riesce spesso utile introdurre su di essa un'*ascissa curvilinea.* In termini semplici, si sceglie un punto Q della traiettoria, un verso positivo, e si associa a ogni altro punto P il reale s che misura la *distanza orientata* di P da Q *lungo la traiettoria* (fig. 8–6). (Ci sono questioni sottili da risolvere se la traiettoria è chiusa, perché a uno stesso punto P corrispondono più valori di s; ma non ce ne preoccupiamo.)

Naturalmente se il punto P si muove, la sua ascissa curvilinea varia nel tempo: $s = s(t)$. A questa funzione si dà il nome di *legge oraria* del moto. Si può allora dire che la curva oraria γ riassume la traiettoria e la legge oraria con cui è percorsa.

Abbiamo introdotto due parametrizzazioni della traiettoria: una data dal tempo t, l'altra dall'ascissa curvilinea s. Potremo quindi vedere $\vec{r}(t)$ come una *funzione composta* $t \mapsto s \mapsto \vec{r}$, e questo tornerà utile in certi casi.

Esempi: Negli esempi visti sopra, le leggi orarie sono rispettivamente:

1. $s = vt$
2. $s = |\vec{a}| \sin \omega t$
3. $s =$ espressione complicata
4. $s = a\, \omega t$
5. $s = a\, \alpha t^2$.

(lasciamo la verifica per esercizio).

Velocità media e istantanea

Lo *spostamento* di P in un certo intervallo di tempo, fra t e $t + \Delta t$, è

$$\Delta\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t);$$

la *velocità media* è

$$\vec{v}_{\text{m}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

e la *velocità istantanea* è

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

(la notazione $\dot{\vec{r}}$ è quella di Newton, mentre $d\vec{r}/dt$ è di Leibniz). Abbiamo evidentemente supposto che $\vec{r}(t)$ sia differenziabile: tale ipotesi va riveduta in casi particolari (ad es. negli *urti*).

Possiamo anche vedere la cosa al modo seguente. Fissiamo un istante t_0, e sia P_0 la posizione di P a quell'istante: $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_0$. Consideriamo un altro punto materiale P_1, che si muova *di moto uniforme* con una certa velocità $\vec{v}_1$, e che all'istante t_0 occupi anch'esso la posizione P_0:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_1\,(t - t_0).$$

Lo *scostamento* di P da P_1 è dato da $\vec{r} - \vec{r}_1$: esso si annulla per $t = t_0$ (fig. 8–7) e cresce in modulo quando t si allontana da t_0. Con la sola ipotesi che il moto sia *continuo*, avremo (per una spiegazione dettagliata della notazione $o(\ )$ si veda il Cap. 10):

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_1(t) = o(1),$$

ma possiamo chiederci se scegliendo opportunamente $\vec{v}_1$ non si possa fare di meglio: più esattamente se non si possa ottenere

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_1(t) = o(t - t_0).$$

Se il moto (ossia la funzione $\vec{r}(t)$) è differenziabile, questo accade, per definizione, quando si prenda

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}(t_0).$$

Per intendere intuitivamente questo risultato, osserviamo che in generale ci sono due distinte ragioni per cui $\vec{r}(t)$ si scosta da $\vec{r}_1(t)$: una è la diversa *direzione*, l'altra la diversa *rapidità* con cui la traiettoria viene percorsa. Occorre dunque, per avere la migliore approssimazione possibile, che i due moti coincidano

– in direzione, il che vuol dire che $\vec{v}_1$ deve essere *tangente* alla traiettoria di P
– in *rapidità*, il che vuol dire che $|\vec{v}_1|$ deve coincidere col modulo della velocità istantanea di P.

Riassumendo: La velocità istantanea è la velocità del moto uniforme che meglio approssima il moto reale di P, nel senso di $o(t - t_0)$.

Ricordiamo che se è stata introdotta un'ascissa curvilinea, il vettore posizione è funzione composta del tempo, attraverso s. Avremo allora:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}. \tag{8–3}$$

Che cosa è $d\vec{r}/ds$? Possiamo scrivere:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$$

e dalla fig. 8–8 si vede che $\lim |\Delta\vec{r}|/|\Delta s| = 1$, mentre la direzione di $\Delta\vec{r}$ è quella della *tangente* alla traiettoria, e il verso è quello in cui cresce s.

Tutto questo si riassume scrivendo

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \tag{8–4}$$

dove $\vec{\tau}$ è il *vettore unitario tangente* alla traiettoria, orientato nel verso positivo (brevemente: "versore della tangente"). Allora la (8–3) diventa:

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{\tau}. \tag{8–5}$$

Attenzione: Sarebbe in generale sbagliato scrivere $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{\tau}$, perché il punto P non si muove sempre nel senso in cui s cresce: basta pensare a un moto armonico. Per questo motivo spesso $\dot{s}$ (che può benissimo essere negativa) viene chiamata *velocità scalare*, che è cosa diversa dal *modulo* v della velocità. Naturalmente $|\vec{v}| = |\dot{s}|$.

L'accelerazione

La velocità istantanea è definita a ogni istante, ed è dunque funzione di t. Come per la velocità, possiamo dunque definire un'*accelerazione media*:

$$\Delta\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) \qquad \vec{a}_\text{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

e un'*accelerazione istantanea*:

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Useremo anche la notazione:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

che mostra come $\vec{r}(t)$ debba essere differenziabile almeno due volte.

Anche dell'accelerazione possiamo dare un'interpretazione intuitiva, secondo la stessa linea vista sopra per la velocità. Abbiamo detto che

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0),$$

dove $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$, è il moto uniforme che meglio approssima il moto reale di P. Ma si può migliorare l'approssimazione se si prova un moto *uniformemente accelerato*:

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2.$$

Se $\vec{r}(t)$ è differenziabile due volte, esiste una scelta di $\vec{a}$ tale che lo scostamento

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_2(t) = o\bigl((t - t_0)^2\bigr)\,.$$

Riassumendo: L'accelerazione istantanea è l'accelerazione del moto uniformemente accelerato che meglio approssima il moto di P, nel senso di $o\bigl((t - t_0)^2\bigr)$.

Passiamo ora a studiare più in dettaglio l'accelerazione. Basta derivare la (8–5) rispetto a t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt}\,\vec{\tau} + \dot{s}\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \dot{s}\,\frac{d\vec{\tau}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + v^2\,\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Che cosa è $d\vec{\tau}/ds$? Sappiamo che $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, e derivando rispetto a s troviamo

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0,$$

ossia $d\vec{\tau}/ds$ è *ortogonale* alla traiettoria. Per capire il significato di $|d\vec{\tau}/ds|$ consideriamo in un primo momento il caso particolare di traiettoria circolare: allora la fig. 8–9 mostra che

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \frac{1}{\varrho} \qquad (8\text{–}6)$$

dove ϱ è il raggio del cerchio. La stessa figura fa capire che anche nel caso generale $|d\vec{\tau}/ds|$ misura la rapidità con cui la direzione di $\vec{\tau}$ cambia lungo la traiettoria; il che vuol dire che ai fini di questo problema *ogni traiettoria può essere approssimata con un cerchio* (di raggio opportuno). Questo raggio si chiama il *raggio di curvatura* della traiettoria: s'intende che se questa non è un cerchio, il suo raggio di curvatura varia da punto a punto.

Si noti che per un moto in tre dimensioni il cerchio approssimante (cerchio *osculatore*) non solo ha un raggio determinato, ma sta anche *in un piano determinato* fra tutti gli infiniti piani che passano per P e contengono la tangente alla traiettoria (piano *osculatore*). Lo scostamento della traiettoria dal piano osculatore è $o(\Delta s^2)$.

Riassumendo:

$$\vec{a} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{\varrho}\,\vec{\nu} \tag{8–7}$$

dove abbiamo introdotto il vettore unitario $\vec{\nu}$ della *normale principale* (diretto verso il *centro di curvatura*).

Conclusione: L'accelerazione consiste di due termini:

1) accelerazione *tangenziale* $\ddot{s}\,\vec{\tau}$, che misura di quanto varia la *velocità scalare*: è la sola presente se il moto è rettilineo
2) accelerazione *normale* (o *centripeta*) che dipende dalla velocità e dalla curvatura della traiettoria: questa esiste tutte le volte che la traiettoria è curva, anche se il moto è uniforme ($\ddot{s} = 0$); l'esempio più banale è il moto circolare uniforme.

Esempi

Riprendiamo gli esempi visti sopra, e calcoliamo in ciascun caso velocità e accelerazione.

Esempio 1: Questo è del tutto elementare: $\vec{r}_0$ è costante, per cui ha derivata nulla; $\vec{v}\,t$ è il prodotto di un vettore costante per lo scalare t, e la sua derivata vale $\vec{v}$. Dunque:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \qquad \ddot{\vec{r}} = 0$$

che è quanto ci si aspettava.

Esempio 2: È solo leggermente più complicato: occorre saper derivare $\sin \omega t$, che è una funzione composta: $y = \sin x$ e $x = \omega t$. La derivata è dunque il prodotto di $\cos x$ per ω, ossia $\omega \cos \omega t$. Infine:

$$\dot{\vec{r}} = \omega \vec{a} \cos \omega t, \qquad \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{a}\, \sin \omega t = -\omega^2 (\vec{r} - \vec{r}_0).$$

L'ultimo passaggio mostra la ben nota proprietà del moto armonico.

Esempio 3: Non ci sono difficoltà nuove:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}$$

e non occorrono commenti.

Esempio 4: Si trova subito

$$\dot{\vec{r}} = \omega a\,(-\vec{\imath}\sin\omega t + \vec{\jmath}\cos\omega t).$$

Questa mostra che il modulo della velocità è ωa, e che la velocità è ortogonale a $\vec{r}$ (verificare!) Derivando ancora:

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 a\,(\vec{\imath}\cos\omega t + \vec{\jmath}\sin\omega t) = -\omega^2\vec{r}.$$

Anche questo è un risultato ben noto, che mostra tra l'altro come l'accelerazione sia tutta centripeta, in quanto ortogonale a $\vec{v}$.
Esempio 5: Questo lo lasciamo per esercizio.