# M7. Il problema generale dei tre corpi

## Cenno storico

Abbiamo visto nel cap. prec. alcuni risultati relativi a un caso molto particolare del problema dei tre corpi. Per le ragioni già accennate, detto problema è sempre stato di grande interesse per la meccanica celeste, ma la strada per la sua comprensione è stata lunga.

Già lo studio del problema ristretto mise in evidenza da subito la grande difficoltà, che si manifestava sotto due aspetti:

1) l'apparente impossibilità di trovarne una soluzione analitica
2) i notevoli problemi incontrati anche in un approccio numerico.

Solo verso la fine dell'800, grazie soprattutto a Poincaré, cominciò ad apparire chiaro che le due difficoltà erano in realtà strettamente legate.

Uno dei modi più naturali per arrivare a una soluzione analitica di un problema meccanico consiste nel trovarne degli integrali primi: abbiamo già parlato, alla fine del Cap. M3, del teorema di Liouville sui sistemi integrabili. Era perciò ovvio chiedersi se il problema dei tre corpi, o almeno la sua versione ristretta, sia integrabile. Uno dei risultati di Poincaré fu la risposta negativa a tale domanda.

## Non integrabilità del problema ristretto

Daremo ora una sommaria descrizione del teorema di Poincaré: nella sostanza, esso afferma che il problema dei tre corpi ristretto non possiede altri integrali primi oltre quello di Jacobi. Ma occorre precisare la tesi, perché nei termini sommari appena detti essa è palesemente falsa.

Ricordiamo che il problema ristretto ha due gradi di libertà, trattandosi del moto piano di un punto materiale. Possiamo usare come coordinate le componenti cartesiane $(x, y)$ di $\vec{r}$, e descrivere il moto nello *spazio delle fasi* $\mathcal{S}$, assumendo come coordinate $x$, $y$, $p_x$, $p_y$ (o equivalentemente $x$, $y$, $\dot{x}$, $\dot{y}$).

Assegnate condizioni iniziali $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$ il moto è determinato, ossia sono fissate le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ che definiscono una curva in $\mathcal{S}$ (*traiettoria di fase*). Dato che il sistema è autonomo, dall'unicità della soluzione segue che per ogni punto di $\mathcal{S}$ passa una e una sola traiettoria di fase.

Se ora risolviamo per es. la $x = x(t)$ rispetto a $t$ e sostituiamo in $y = y(t)$, avremo una relazione funzionale tra $x$ e $y$, che possiamo mettere nella forma

$$F(x, y) = \text{cost.}$$

valida lungo tutta una traiettoria di fase. Per di più la stessa funzione sarà ancora costante lungo ogni altra traiettoria di fase, solo con un diverso valore della costante, in dipendenza delle diverse condizioni iniziali. Abbiamo così ottenuto proprio un integrale primo.

Lo stesso si potrebbe fare scegliendo una coppia qualsiasi tra le quattro funzioni $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, e si otterrebbero in tal modo 6 integrali primi che non contengono $t$. È noto però che per un sistema con due gradi di libertà il massimo numero possibile di tali integrali primi (tra loro funzionalmente indipendenti) è 3, il che ci dice che i 6 ottenuti non potranno essere indipendenti. Inoltre abbiamo già l'integrale di Jacobi, quindi possiamo aspettarcene al più due indipendenti tra loro e da quello.

*Nota*: Per un sistema con due soli gradi di libertà, l'esistenza di un solo integrale primo oltre all'energia basta perché il sistema sia integrabile.

Ma il teorema di Poincaré sembra asserire che non ne esiste alcuno!

La soluzione è che il teorema si riferisce a integrali primi con proprietà addizionali, che ora passiamo a spiegare.

## Integrali primi uniformi

Consideriamo un punto $\mathrm{P}_0$ di $\mathcal{S}$, e la traiettoria di fase $\gamma$ che ha $\mathrm{P}_0$ come punto iniziale. Se $F$ è un integrale primo, su $\gamma$ avremo $F = c$, con $c$ costante. Pensiamo ora a una seconda traiettoria di fase $\gamma'$, sulla quale sia $F = c'$. Sappiamo che $\gamma'$ non può passare per $\mathrm{P}_0$; ma se accade che $\mathrm{P}_0$ sia punto di accumulazione per $\gamma'$, è chiaro che $F$ non può essere una funzione continua.

D'altra parte la continuità è un requisito fisicamente utile per un integrale primo, perché implica che un piccolo errore nelle condizioni iniziali non abbia conseguenze importanti sul valore di $F$. Si potrebbe credere che la situazione descritta debba essere eccezionale, ma è invece facile mostrare che non lo è: anche in casi del tutto elementari esistono integrali primi che non sono funzioni continue delle coordinate canoniche.

Per ragioni che sarebbe lungo spiegare, un integrale primo continuo si chiama di solito *uniforme*; e da quanto detto si capisce perché una delle condizioni che è naturale porre a un integrale primo, è che esso sia uniforme.

## Analiticità nel problema ristretto

È ovvio che se nel problema ristretto mandiamo a zero una delle masse $M_1$, $M_2$ ricadiamo in un problema dei due corpi, della cui soluzione sappiamo tutto: in particolare conosciamo un numero massimo d'integrali primi uniformi (che possiamo anche scegliere in più modi con parentesi di Poisson nulle tra loro: sistema integrabile degenere, Cap. M3). Riesce perciò naturale pensare il problema ristretto come un ampliamento di quello dei due corpi, dove lo scostamento dal caso semplice è misurato da un parametro, ad es. $\varepsilon = M_2/M_1$: il problema ristretto corrisponde a $\varepsilon = 0$.

L'idea di trattare un problema per via perturbativa suggerisce di pensare a sviluppi in serie di potenze in $\varepsilon$, ed è perciò importante indagare la convergenza di tali serie. Da qui nasce l'idea di porre anche agli integrali primi la condizione di essere funzioni analitiche di $\varepsilon$. Ad es. l'integrale di Jacobi è uniforme, ed è anche analitico.

Ora abbiamo le basi per enunciare correttamente il teorema di Poincaré (1890): *il problema dei tre corpi ristretto non ammette altri integrali primi uniformi e analitici, oltre l'integrale di Jacobi* (o le funzioni di questo). È un facile corollario del teorema che il problema ristretto *non è integrabile.*

## Il comportamento caotico

Un sistema integrabile non è soltanto semplice in quanto ammette una soluzione in termini di operazioni matematiche semplici (integrazioni): è anche semplice il suo comportamento nel tempo. Senza entrare in dettagli, ricordiamo dalla meccanica analitica che per un sistema integrabile con $n$ gradi di libertà è possibile introdurre $n$ variabili di angolo ($\varphi_i$) e altrettante variabili di azione ($J_i$): le seconde sono costanti del moto, mentre le prime variano linearmente nel tempo. Le traiettorie di fase si svolgono ciascuna in un sottoinsieme dove tutte le $J_i$ sono costanti; approfondendo il teorema di Liouville, Arnold ha dimostrato che questi sottoinsiemi hanno la struttura di tori $n$-dimensionali (*tori invarianti*). In generale una traiettoria di fase è densa sul suo toro invariante, ma non ha andamento complicato: non è che un'elica in $n$ dimensioni.

Tutt'altro è il comportamento che ci si può attendere da un sistema non integrabile. Anche qui il primo passo fu fatto da Poincaré, che riuscì a vedere e a studiare in dettaglio la straordinaria complessità che può assumere una traiettoria di fase nel problema ristretto. Nel 20-mo secolo lo studio dei sistemi non integrabili è stato approfondito, e nella seconda metà del secolo ha dato luogo alla teoria dei *sistemi caotici.*

Nel linguaggio di oggi, si può dire che Poincaré aveva scoperto il comportamento caotico del problema ristretto dei tre corpi. Non possiamo qui discutere questo tema, ma ricordiamo solo che la caratteristica principale di un sistema caotico è l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali: due traiettorie di fase che iniziano vicine quanto si vuole, divergono tra loro esponenzialmente, il che vuol dire che dopo un certo tempo è impossibile prevedere lo stato del sistema, se lo stato iniziale era dato con incertezza non nulla, com'è inevitabile.

In realtà la divergenza esponenziale non può continuare indefinitamente, almeno se la traiettoria è vincolata — per es. dalla conservazione dell'energia — a restare in una ragione compatta dello spazio delle fasi. Di fatto ciò che accade in questi casi è che la traiettoria si avvolge su se stessa in modo assai intricato, ritorna infinite volte vicino quanto si vuole a ciascun punto . . . ; si manifestano insomma più in generale quegli stessi fenomeni che Poincaré aveva visto per il problema ristretto.

Detto tutto questo, può apparire impossibile uno studio dei sistemi non integrabili, e soprattutto si potrebbe credere che non esistano relazioni semplici valide in generale. Invece, tornando al problema dei tre corpi, qualcosa di utile si può sempre dire, come mostreremo subito.

**L'integrale di Zare e la disuguaglianza di Easton**

Alcuni dei risultati che abbiamo visto nel problema ristretto possono essere estesi non solo al problema generale dei tre corpi, ma anche a quello di $n$ corpi. È questa la conseguenza di una notevole disuguaglianza, scoperta solo negli anni '70 dello scorso secolo.

Si consideri un sistema isolato di $n$ punti materiali: possiamo scegliere un riferimento nel quale il centro di massa G è fermo, e assumere come asse $z$ la retta per G che ha la direzione e il verso del momento angolare totale $\vec{J}$, ovviamente costante. Avremo allora:

$$|\vec{J}| = J_z = \sum m_i \, r_i \, v_{i\perp} \tag{M7.1}$$

dove $r_i$ è la distanza dell'$i$-mo punto dall'asse $z$, $v_{i\perp}$ la componente della sua velocità ortogonale sia a $z$ che a $\vec{r}_i$ (e col verso positivo scelto in modo ovvio).

Per l'energia cinetica si ha:

$$2T = \sum m_i \, v_i^2 \geq \sum m_i \, v_{i\perp}^2.$$

Scritta la (M7.1) come segue:

$$J = \sum \left(\sqrt{m_i}\, r_i\right)\left(\sqrt{m_i}\, v_{i\perp}\right)$$

e applicando la disuguaglianza di Schwartz se ne ricava:

$$J^2 \leq 2IT \tag{M7.2}$$

dove $I = \sum m_i \, r_i^2$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $z$.

Se supponiamo

1) che le forze siano tutte attrattive (ipotesi vera nel caso gravitazionale)
2) che il sistema sia legato ($E < 0$)

abbiamo $T = E - V = |V| - |E|$, dove $V$ è l'energia otenziale totale. Dunque dalla (M7.2):

$$|V| \geq \frac{J^2}{2I} + |E| \geq \sqrt{2\,\frac{J^2}{I}\,|E|}$$

(il secondo passaggio segue da $a + b \geq 2\sqrt{ab}$). Siamo così arrivati alla *disuguaglianza di Easton*:

$$I\,V^2 \geq 2\,|E|\,J^2. \tag{M7.3}$$

L'importanza della (M7.3) discende dai seguenti fatti:

*a*) il secondo membro è una costante del moto ($E\,J^2$ si chiama *integrale di Zare*);

*b*) il primo membro dipende solo dalla configurazione del sistema e non dalle velocità.

Dunque la (M7.3), per date condizioni iniziali, restringe le possibili configurazioni del sistema in tutta la sua evoluzione: in questo senso è un'evidente generalizzazione della (M6.3).

Nel caso gravitazionale la grandezza $I\,V^2$ ha un'importante proprietà: è *invariante per trasformazioni di scala.* Se infatti tutte le distanze cambiano per uno stesso fattore $k$, si ha $I \mapsto k^2 I$, $V \mapsto V/k$, e quindi $I\,V^2 \mapsto I\,V^2$. Ne segue che mandare a infinito alcune delle distanze equivale a mandare a zero le altre, e che nello studio di $I\,V^2$ si può aggiungere una condizione addizionale (ad es. che una delle distanze resti costante, o che lo sia la loro somma) senza perdere generalità. Questo ci tornerà utile fra poco.

## Stabilità delle configurazioni gerarchiche

Studiamo ora $I\,V^2$ in funzione delle posizioni dei punti del sistema. Ci limiteremo per semplicità al caso di tre punti, e supporremo inizialmente che il loro piano sia ortogonale a $\vec{J}$. Con la notazione indicata in fig. M7–1 abbiamo subito:

$$V = -G\left(\frac{m_1 m_2}{s_3} + \frac{m_2 m_3}{s_1} + \frac{m_3 m_1}{s_2}\right)$$
$$= -G\, m_1 m_2 m_3 \sum \frac{1}{m_i\, s_i}.$$

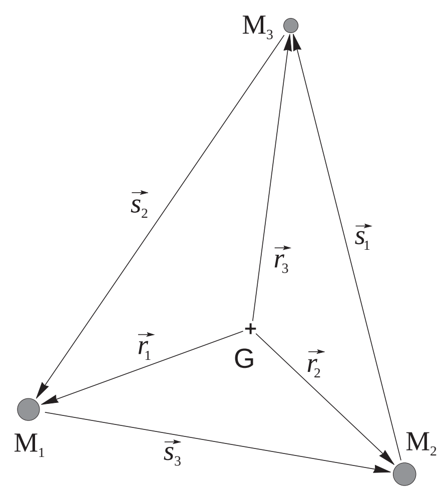


*Fig. M7-1*

Inoltre $\sum m_i\,\vec{r}_i = 0$ (def. di centro di massa), $\vec{s}_3 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, ecc., da cui si ricava

$$\vec{r}_1 = -\frac{1}{M}\,(m_2\,\vec{s}_3 - m_3\,\vec{s}_2) \quad \text{ecc.} \qquad \text{(M7.4)}$$

dove si è posto $M = m_1 + m_2 + m_3$. Dalla (M7.4):

$$r_1^2 = \frac{1}{M^2}\left(m_2^2\,s_3^2 + m_3^2\,s_2^2 - 2\,m_2 m_3\,\vec{s}_2\cdot\vec{s}_3\right) =$$
$$\frac{1}{M^2}\left[m_2^2\,s_3^2 + m_3^2\,s_2^2 - m_2 m_3\left(s_1^2 - s_2^2 - s_3^2\right)\right]$$

e da questa, con qualche passaggio

$$I = \frac{1}{M}\left(m_1 m_2\,s_3^2 + m_2 m_3\,s_1^2 + m_3 m_1\,s_2^2\right) = \frac{m_1 m_2 m_3}{M}\sum \frac{s_i^2}{m_i}.$$

Infine:

$$I\,V^2 = \frac{G^2}{M}\,(m_1 m_2 m_3)^3 \sum \frac{s_i^2}{m_i} \left( \sum \frac{1}{m_i\,s_i} \right)^2. \tag{M7.5}$$

Differenziando la (M7.5):

$$\begin{aligned} d(I\,V^2) &= V^2\,dI + 2I\,V\,dV \\ &= V^2\,\frac{m_1 m_2 m_3}{M} \sum \frac{2s_i\,ds_i}{m_i} + 2I\,V\,G\,m_1 m_2 m_3 \sum \frac{ds_i}{m_i\,s_i^2} \\ &= 2m_1 m_2 m_3\,V \left( \frac{V}{M} \sum \frac{s_i\,ds_i}{m_i} + GI \sum \frac{ds_i}{m_i\,s_i^2} \right) \\ &= 2m_1 m_2 m_3\,V \sum \left( \frac{V}{M}\,\frac{s_i}{m_i} + \frac{GI}{m_i\,s_i^2} \right) ds_i. \end{aligned}$$

Si otterrà $d(I\,V^2) = 0$ se e solo se

$$\frac{V}{M}\,\frac{s_i}{m_i} + \frac{GI}{m_i\,s_i^2} = 0$$

ossia

$$s_i^3 = -\frac{GMI}{V} \qquad (V < 0\,!). \tag{M7.6}$$

La (M7.6) ci dice che $s_1 = s_2 = s_3$, cioè i tre corpi formano un triangolo equilatero. Questo risultato generalizza, in un preciso senso, le configurazioni $\mathrm{L}_4$ e $\mathrm{L}_5$ di Lagrange del problema ristretto.

È facile vedere che il triangolo equilatero corrisponde a un minimo, poiché $I\,V^2$ va a $+\infty$ quando uno degli $s_i$ tende a zero. Abbiamo dunque tre picchi "infiniti" nelle tre configurazioni accennate in fig. M7–2, e una "valle" corrispondente al triangolo equilatero.

Supponiamo ora che le condizioni iniziali del sistema corrispondano a un valore dell'integrale di Zare $E\,J^2$ così grande in modulo da obbligare il sistema in una delle configurazioni di "picco": a causa della disuguaglianza di Easton (M7.3) questa situazione si mantiene nel tempo, e sebbene vi siano tre picchi compatibili con l'assegnato valore di $E\,J^2$, il sistema non può passare da uno all'altro. Abbiamo così dimostrato che le configurazioni "gerarchiche" di fig. M7–2 *sono stabili.*

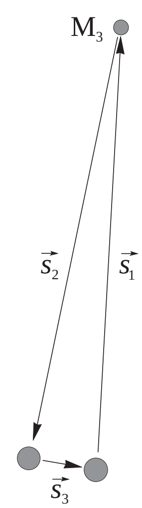

*Fig. M7-2*

Occorre ora rimuovere la restrizione che i tre punti siano in un piano ortogonale a $\vec{J}$. Se si parte dal piano, e si spostano i punti parallelamente all'asse $z$ in modo arbitrario, $I$ non cambia, mentre $V$ diminuisce perché le distanze possono solo aumentare: dunque $I\,V^2$ diminuisce. Anche un tale spostamento sarà perciò proibito, oltre un certo limite, dalla disuguaglianza di Easton.

Concludiamo osservando come un risultato di grande generalità (la stabilità delle configurazioni gerarchiche) sia stato raggiunto partendo da considerazioni del tutto elementari. Per di più, è possibile estenderlo a sistemi di più corpi.