

M6. Il problema dei tre corpi ristretto

Il problema dei tre corpi

Sempre restando nel tema perturbativo, passeremo ora a discutere il classico *problema dei tre corpi*. Vediamo in primo luogo alcuni esempi tipici di questo problema.

1) Volendo studiare il moto della Terra attorno al Sole, dobbiamo tener conto dell'effetto di Giove. Una semplificazione risulta dal fatto che le masse dei pianeti non sono simili, ma anzi formano una scala molto estesa: questo ci permette di trascurare l'effetto della Terra su Giove anche se non si trascura il reciproco (fig. M6-1).

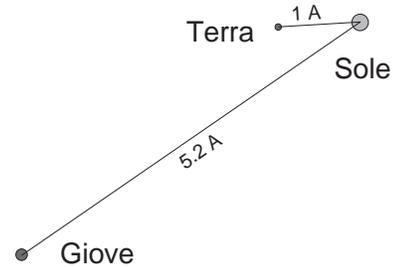


Fig. M6-1

Si è parlato solo di Giove perché è quello che di gran lunga influenza la Terra più degli altri: Marte e Venere infatti sono assai più piccoli, mentre Saturno è molto più lontano.

2) Un secondo esempio tipico è dato dal sistema Sole-Terra-Luna. Può sembrare strano che nel moto della Luna attorno alla Terra la forza di attrazione solare venga trattata solitamente come una perturbazione, mentre è parecchio superiore a quella della Terra. Mettiamoci però nel riferimento del centro di massa del sistema Terra-Luna (che per inciso è ben lontano dal centro della Terra): tale riferimento non è certamente inerziale, e sulla Luna agisce quindi una forza apparente $-m\vec{a}_G$, che compensa quasi esattamente l'attrazione solare. Non esattamente, perché il campo gravitazionale del Sole non è uniforme. Si ha dunque una forza risultante non nulla, un residuo di attrazione solare che è appunto il termine perturbativo (fig. M6-2).

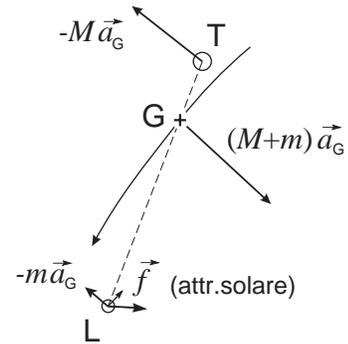


Fig. M6-2

Gli ordini di grandezza da confrontare sono, come vedremo, le masse dei primari e i cubi delle distanze, cioè M_{\odot}/a^3 e M_{\oplus}/a_{ζ}^3 . Il loro rapporto è circa 160, per cui si può parlare di perturbazione, ma certo per avere una buona approssimazione non ci si potrà fermare al primo ordine.

3) Altro esempio è quello di due pianeti di masse confrontabili: il caso classico è il sistema Giove-Saturno. C'è una particolarità che rende interessante questo sistema: i periodi di Giove e di Saturno sono in un rapporto quasi razionale semplice:

$$\frac{T_G}{T_S} \simeq \frac{2}{5}.$$

M6-1

Ciò significa che ogni 5 giri di Giove (pari a circa 2 giri di Saturno) i due pianeti si trovano vicini. Questa *risonanza* esalta la perturbazione reciproca, che ha un periodo principale di circa 58 anni.

Il problema ristretto

Si dice problema *ristretto* dei tre corpi quello in cui un corpo abbia massa trascurabile rispetto agli altri due, si consideri solo il moto piano, e la distanza tra i due primari sia supposta rigorosamente costante (moto circolare uniforme). Noi ci limiteremo a questo, salvo che per quanto possibile studieremo il moto nello spazio. Come sistemi che approssimano il problema ristretto possiamo citare Sole-Giove-asteroide, oppure Terra-Luna-satellite artificiale.

Sia \vec{a}_0 il vettore da M_1 a M_2 (fig. M6-3). Se ci poniamo in un riferimento inerziale di origine nel centro di massa G , i corpi maggiori ruotano con velocità angolare n_0 data da

$$n_0^2 a_0^3 = G(M_1 + M_2). \quad (\text{M6.1})$$

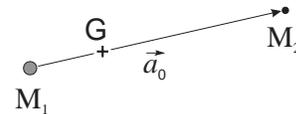


Fig. M6-3

Indicheremo con \vec{n}_0 il vettore di modulo n_0 perpendicolare al piano orbitale di M_1 e di M_2 .

Mettiamoci invece in un riferimento rotante con questa velocità (e sempre avente come origine il centro di massa): in questo riferimento i corpi principali sono fissi. Per studiare il moto del corpo di massa m vogliamo partire, se possibile, dall'integrale dell'energia (le notazioni sono quelle di fig. M6-4). In un riferimento inerziale si conserverebbe la somma $T + V$ data da

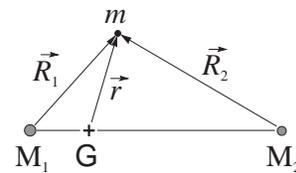


Fig. M6-4

$$\frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{GM_1 m}{R_1} - \frac{GM_2 m}{R_2}.$$

Ma il nostro riferimento non è inerziale, per cui occorre introdurre le forze apparenti: solo se queste sono conservative vale ancora l'integrale dell'energia. La forza di Coriolis chiaramente non influisce: essendo $\vec{f}_{\text{Cor}} = -2m \vec{n}_0 \times \dot{\vec{r}}$ perpendicolare a $\dot{\vec{r}}$, essa è a lavoro nullo e non altera perciò il bilancio energetico. La forza centrifuga \vec{f}_{cen} dipende solo da \vec{r} , quindi è conservativa e deducibile da un potenziale che nello spazio è $-\frac{1}{2} m |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2$.

Possiamo allora scrivere l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{GM_1 m}{R_1} - \frac{GM_2 m}{R_2} - \frac{1}{2} m |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2 = E. \quad (\text{M6.2})$$

Alla (M6.2) si dà tradizionalmente, in meccanica celeste, il nome di *integrale di Jacobi*.

M6-2

Le superfici di Hill

È interessante ricavare subito dalla (M6.2) delle limitazioni sui punti per i quali il corpo può passare. Riscriviamola in altro modo:

$$-\frac{GM_1 m}{R_1} - \frac{GM_2 m}{R_2} - \frac{1}{2} m |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2 = E - \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 \leq E.$$

Dividendo per m :

$$-\frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2} - \frac{1}{2} |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2 \leq \frac{E}{m} \quad (\text{M6.3})$$

e questa è una condizione su \vec{r} (notare che anche R_1 e R_2 dipendono da \vec{r}).

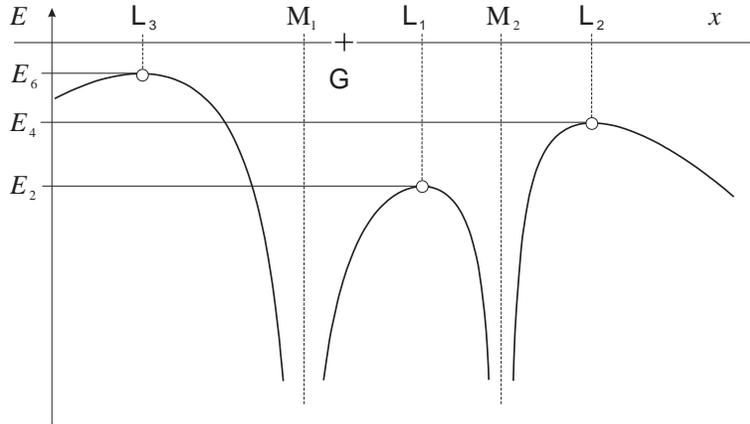


Fig. M6-5

È utile adesso costruire le superfici dette “a velocità nulla” (o *superfici di Hill*), cioè quelle per cui la (M6.3) vale come uguaglianza ($\dot{\vec{r}} = 0$). Poiché non si arriva mai a quel caso, un corpo non può mai superare la superficie a velocità nulla relativa all’energia di cui è dotato. In fig. M6-5 si vede un grafico del primo membro della (M6.3) lungo la retta M_1M_2 ; in fig. M6-6, a pagina seguente, le sezioni delle superfici di Hill corrispondenti a diversi valori di E ($E_1 \dots E_7$ sono in ordine crescente) nel piano per M_1 e M_2 perpendicolare ad \vec{n}_0 .

Le stesse sezioni sono riportate, separatamente, anche in fig. M6-7 a pag. 5. Dalle figure si vede che un corpo che abbia energia molto bassa (E_1) è vincolato a stare vicino a uno dei due primari, oppure lontano da entrambi (per energia centrifuga). Solo per $E > E_2$ le due superfici interne si fondono nel punto L_1 .

Per esemplificare, supponiamo che M_1 sia la Terra e M_2 la Luna: se si vuol mandare un satellite attorno alla Luna occorre dargli un’energia superiore a E_2 . Se ad esempio l’energia fosse E_3 , il corpo resterebbe confinato all’interno della zona indicata: dunque con tale energia un satellite non sfuggirebbe dalle vicinanze della Terra e della Luna. Se lo si vuol mandare lontano dal sistema Terra-Luna occorrerà un’energia $E_5 > E_4$: infatti per $E > E_4$ la superficie di

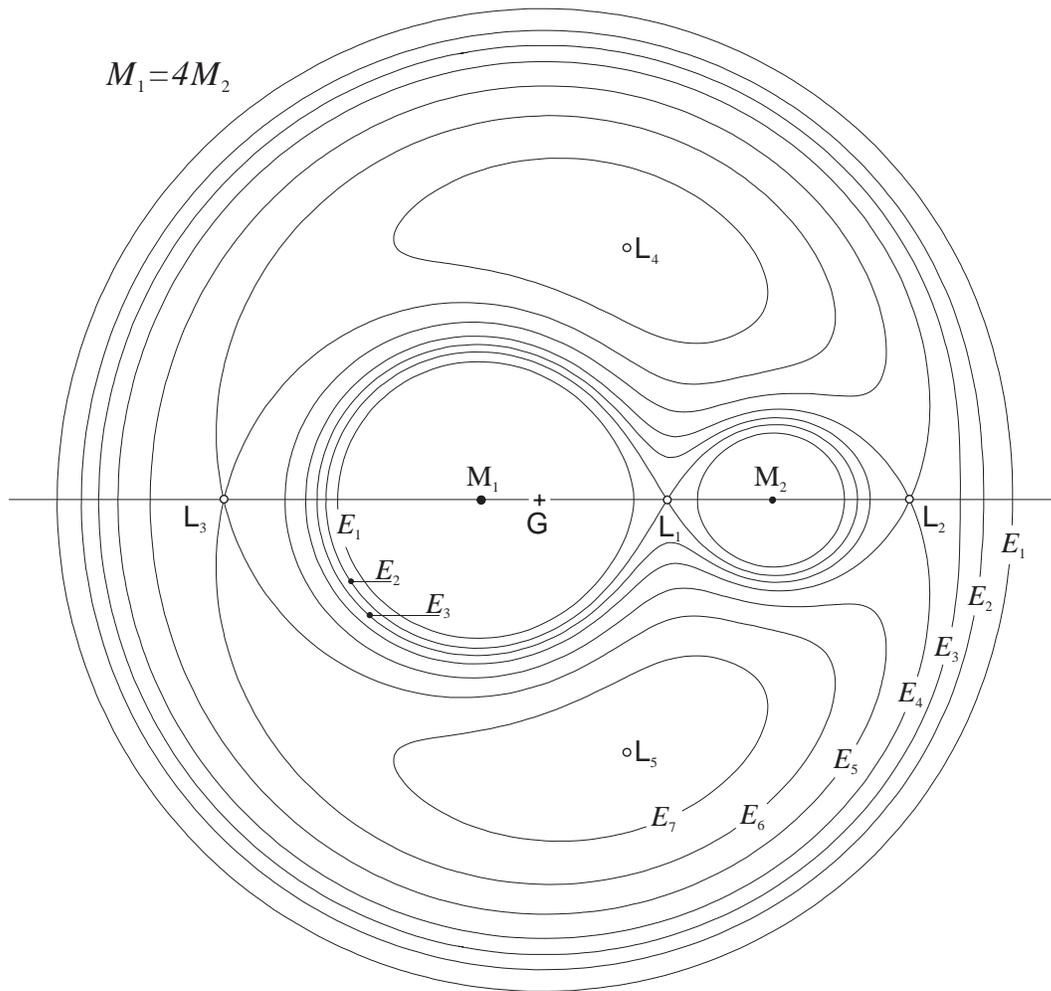


Fig. M6-6

Hill si apre nel punto L_2 . In tal caso il satellite potrà sfuggire, ma solo dalla parte destra della figura, in quanto la regione racchiusa dalla curva E_5 gli è preclusa. Infine, per energie maggiori di E_6 può sfuggire anche a sinistra, dato che la superficie si apre anche in L_3 . Le fig. M6-6 e 7 mostrano che i punti di massima energia sono L_4 e L_5 .

I punti di Lagrange

I punti L_i ($i = 1 \dots 5$), detti *punti di Lagrange*, sono di equilibrio: il gradiente del potenziale si annulla, e lo stesso quindi accade per la forza risultante. Questo però non ci dice nulla circa la stabilità, e non ci si può neppure basare sul consueto criterio del minimo, in quanto anche la forza di Coriolis — che non entra nel calcolo dell'energia — ha un ruolo importante nelle modalità del moto.

Vedremo infatti che si può avere stabilità addirittura dove l'energia potenziale ha un massimo.

La posizione dei punti L_1, L_2, L_3 dipende dal rapporto delle masse; risulta inoltre che essi sono di equilibrio instabile. L_4 e L_5 hanno invece posizioni fisse, che formano due triangoli equilateri con M_1 e M_2 : la cosa notevole è che sebbene — come si è visto — essi siano punti di massimo del potenziale, se un corpo si sposta da quella posizione la forza di Coriolis tende a riportarcelo (fig. M6–8, a pagina seguente), per cui risultano di equilibrio stabile (almeno se il rapporto M_2/M_1 è abbastanza piccolo).

Prima di discutere la stabilità, occorre dimostrare che L_4 e L_5 sono i vertici di due triangoli equilateri di base M_1M_2 . A questo scopo basta studiare il caso piano, in cui l'energia potenziale per unità di massa è data da

$$\frac{V}{m} = -\frac{1}{2} n_0^2 r^2 - \frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2}.$$

Calcoliamone il gradiente:

$$\frac{1}{m} \vec{\nabla} V = -n_0^2 \vec{r} + \frac{GM_1}{R_1^3} \vec{R}_1 + \frac{GM_2}{R_2^3} \vec{R}_2. \quad (\text{M6.4})$$

Poiché G è il centro di massa vale la relazione (vedere la fig. M6–4)

$$\vec{r} = \frac{M_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{M_1 + M_2}.$$

Moltiplicando la (M6.1) per \vec{r} e dividendo per a_0^3 si ottiene quindi

$$n_0^2 \vec{r} = \frac{G(M_1 + M_2)}{a_0^3} \vec{r} = \frac{G}{a_0^3} (M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2).$$

Sostituiamo questa espressione di $n_0^2 \vec{r}$ nella (M6.4) in modo da far sparire \vec{r} e imponiamo poi $\vec{\nabla} V = 0$, per trovare i punti di equilibrio:

$$-\frac{G}{a_0^3} (M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2) + \frac{GM_1}{R_1^3} \vec{R}_1 + \frac{GM_2}{R_2^3} \vec{R}_2 = 0$$

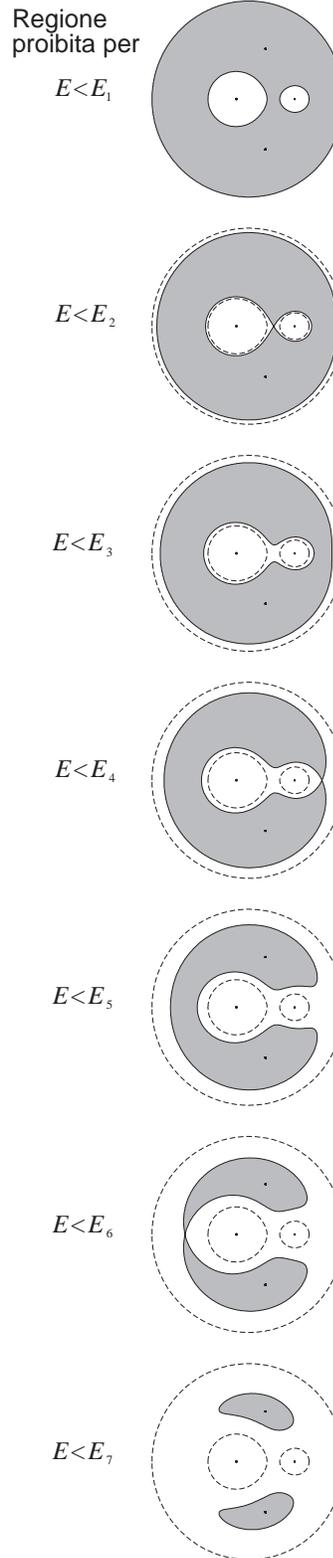


Fig. M6-7

ossia

$$M_1 \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \vec{R}_1 + M_2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{a_0^3} \right) \vec{R}_2 = 0.$$

Due casi sono ora possibili:

a) \vec{R}_1 e \vec{R}_2 non sono paralleli.

Allora devono annullarsi separatamente i coefficienti:

$$\frac{1}{R_1^3} = \frac{1}{a_0^3} \quad \frac{1}{R_2^3} = \frac{1}{a_0^3}$$

e ciò significa $R_1 = R_2 = a_0$. Abbiamo così trovato i punti L_4 e L_5 .

b) \vec{R}_1 e \vec{R}_2 sono paralleli (cioè sulla retta congiungente M_1 con M_2).

In questo caso si ricava un'equazione che ha tre soluzioni reali (i punti L_1, L_2, L_3). La posizione di questi punti, come già detto, dipende da M_2/M_1 .

Stabilità di L_4 e L_5 .

Riprendiamo l'espressione dell'energia potenziale per unità di massa (in tre dimensioni)

$$\frac{V}{m} = -\frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2} - \frac{1}{2} |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2.$$

Derivando due volte si ottiene ($r_i, i = 1, 2, 3$ sono le componenti di \vec{r} ecc.)

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V}{\partial r_i \partial r_j} = n_0^2 \delta_{i3} \delta_{j3} - \frac{3G}{a_0^5} (M_1 R_{1i} R_{1j} + M_2 R_{2i} R_{2j})$$

(si è usato il fatto che in L_4 e L_5 $R_1 = R_2 = a_0$, mentre $G(M_1 + M_2) = n_0^2 a_0^3$; l'asse 3 è nella direzione di \vec{n}_0). Se l'asse 1 è diretto da M_1 a M_2 , per il punto L_4 si ha:

$$R_{11} = \frac{1}{2} a_0 \quad R_{12} = R_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 \quad R_{21} = -\frac{1}{2} a_0$$

e sostituendo nella (M6.5) si può scrivere

$$\frac{1}{m} \frac{\partial^2 V}{\partial r_i \partial r_j} = n_0^2 a_{ij}$$

con

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -3/4 & -3\sqrt{3}\alpha/4 & 0 \\ -3\sqrt{3}\alpha/4 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove si è posto $\alpha = (M_1 - M_2)/(M_1 + M_2)$.

M6-6

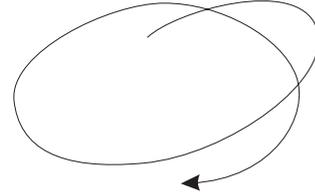


Fig. M6-8

Supponiamo ora che m si trovi in vicinanza di L_4 : detto $\vec{\varrho}$ il suo scostamento da L_4 , sviluppiamo V in potenze di $\vec{\varrho}$. Il termine di primo ordine è zero, dato che $\partial V/\partial r_i = 0$ in L_4 ; pertanto

$$\frac{1}{m} V = \frac{1}{m} V_0 + \frac{1}{2} n_0^2 \sum_{i,j} a_{ij} \varrho_i \varrho_j.$$

Le equazioni del moto, tenendo conto della forza di Coriolis, si scrivono allora:

$$\ddot{\varrho}_i = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial \varrho_i} - 2(\vec{n}_0 \times \dot{\varrho})_i = -n_0^2 \sum_j a_{ij} \varrho_j - 2(\vec{n}_0 \times \dot{\varrho})_i.$$

Cerchiamo, di questo sistema differenziale omogeneo, soluzioni del tipo $\vec{\varrho} = \vec{\sigma} e^{-i\omega t}$: queste daranno oscillazioni stabili se $\Im\omega \leq 0$. Dato che

$$\dot{\varrho}_i = -i\omega \varrho_i \quad \ddot{\varrho}_i = -\omega^2 \varrho_i$$

si ottiene un sistema lineare omogeneo per le componenti di $\vec{\varrho}$, il cui determinante deve annullarsi:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} n_0^2 - \omega^2 & -\frac{3\sqrt{3}}{4} n_0^2 \alpha + 2i n_0 \omega & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} n_0^2 \alpha - 2i n_0 \omega & -\frac{9}{4} n_0^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è un'equazione di 6° grado per ω , che fornisce in primo luogo le radici $\omega = \pm n_0$, corrispondenti a oscillazioni stabili lungo l'asse 3, e si riduce poi alla biquadratica

$$\omega^4 - n_0^2 \omega^2 + \frac{27}{16} n_0^4 (1 - \alpha^2) = 0. \quad (\text{M6.6})$$

Se il discriminante della (M6.6) è ≥ 0 , le radici sono tutte reali, e danno oscillazioni stabili; se invece è negativo, esistono due radici a parte immaginaria positiva, e c'è instabilità. La condizione di stabilità è dunque:

$$n_0^4 - \frac{27}{4} n_0^4 (1 - \alpha^2) \geq 0$$

da cui

$$\alpha \geq \sqrt{23/27}.$$

Questa condizione su α corrisponde a

$$\frac{M_2}{M_1} \leq \frac{2}{25 + \sqrt{621}} \simeq \frac{1}{25}.$$

È evidente per simmetria che la condizione di stabilità trovata per L_4 vale anche per L_5 .

Greci e Troiani

L'esistenza dei punti di Lagrange stabili L_4 e L_5 ha un'interessante applicazione nel caso Sole-Giove. Supponiamo per semplicità che l'orbita di Giove sia circolare (in realtà per Giove $e \simeq 0.05$). Se poniamo un pianettino in uno dei punti (che cadono proprio lungo l'orbita di Giove, 60° avanti e indietro rispetto al pianeta) e gli diamo la giusta velocità, in modulo pari a quella di Giove, il pianettino percorrerà esattamente l'orbita di Giove con lo stesso anticipo o ritardo iniziale.

Il fatto che l'equilibrio è stabile vuol dire che se la velocità o la posizione non è perfettamente giusta il pianettino seguirà un moto più complicato, oscillando attorno al punto di equilibrio ma sempre seguendo in media l'orbita di Giove. Anche l'eccentricità di Giove causa oscillazioni, ma non distrugge la stabilità.

Si può dunque pensare che in passato alcuni pianetini siano stati catturati con le giuste condizioni iniziali e che siano rimasti approssimativamente in L_4 e L_5 . È proprio ciò che si osserva: attorno a quei due punti sono state trovate due famiglie di pianetini (detti "Troiani" e "Greci") che seguono o precedono il moto di Giove (fig. M6-9).

Si è pensato che anche per il sistema Terra-Luna potrebbe aversi un addensamento di materia in quei due punti (micrometeoriti, polvere cosmica) ma per ora non è stato trovato nulla.

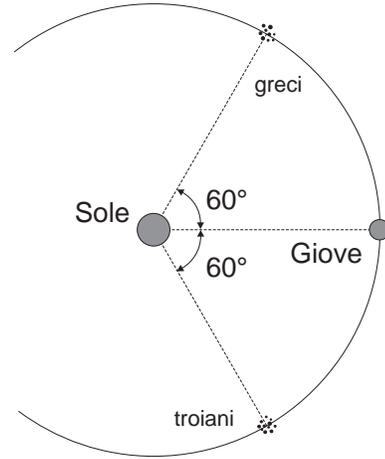


Fig. M6-9

Il criterio di Tisserand

Abbiamo visto come si scrive la costante dell'energia per un corpo di massa trascurabile in un riferimento solidale alla retta Sole-Giove. Vediamo ora come questa costante possa servire per lo studio del moto di una cometa perturbata da Giove, riferendolo però a un riferimento inerziale ed eliocentrico. Per passare al riferimento inerziale occorre cambiare la velocità, che chiameremo $d\vec{r}/dt$ per evitare equivoci. Sappiamo che

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{n}_0 \times \vec{r}$$

da cui

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{n}_0 \times \vec{r}.$$

Sostituendo nella (M6.2) abbiamo:

$$\frac{1}{2} |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 - \vec{n}_0 \times \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2} - \frac{1}{2} |\vec{n}_0 \times \vec{r}|^2 = \frac{E}{m}.$$

M6-8

Come ci si aspettava sparisce il termine del potenziale centrifugo. Si tratta ora di passare a coordinate eliocentriche usando le opportune relazioni. Il vettore $\overline{M_1 G}$ vale $M_2 \vec{a}_0 / (M_1 + M_2)$ per come è definito il centro di massa G. Allora

$$\vec{R}_1 = \vec{r} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{a}_0$$

$$\frac{d\vec{R}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{d\vec{a}_0}{dt}.$$

Bisogna notare che \vec{a}_0 non è più costante, ma ruota uniformemente: dunque

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_1}{dt} - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{n}_0 \times \vec{a}_0.$$

Ricordando che

$$\vec{n}_0 \times \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{n}_0 \cdot \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

si ottiene, riordinando,

$$E = E_1 + c$$

dove

$$\frac{E_1}{m} = \frac{1}{2} \left| \frac{d\vec{R}_1}{dt} \right|^2 - \frac{GM_1}{R_1} - \frac{GM_2}{R_2} - \vec{n}_0 \cdot \vec{R}_1 \times \frac{d\vec{R}_1}{dt} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} n_0^2 \vec{a}_0 \cdot \vec{R}_1. \quad (M6.7)$$

e c è un'inessenziale costante additiva.

Non è immediato capire da dove provengano gli ultimi due termini, ma si può dimostrare che essi tengono conto delle variazioni di energia del sistema dovute all'azione della cometa sul Sole e su Giove.

Per capirlo, pensiamo a un esempio semplice: l'urto elastico frontale di due palle di masse molto diverse. Se supponiamo che dopo l'urto la palla più grande proceda indisturbata, nel riferimento di M avremo (fig. M6-10):



Fig. M6-10

- prima dell'urto $v' = v + V$
- dopo l'urto $\bar{v}' = -v' = -v - V$.

Perciò la velocità dopo l'urto nel riferimento del laboratorio è

$$\bar{v} = \bar{v}' - v = -v - 2V.$$

Nell'urto la pallina piccola inverte la sua velocità e l'incrementa del doppio della velocità della palla grande: apparentemente l'energia non si conserva. La spiegazione è che abbiamo trattata come infinita la massa della palla maggiore, e così facendo abbiamo trascurato che nell'urto essa viene rallentata, anche se di poco.

Tornando alla cometa, faremo ora due approssimazioni:

- 1) $M_2 \ll M_1$
- 2) R_2 abbastanza grande.

Nel nostro caso $M_2/M_1 = M_2/M_\odot \simeq 1/1000$ per cui la 1) è certo soddisfatta, e basta supporre che la cometa non si avvicini troppo a Giove. Possiamo allora trascurare il terzo e l'ultimo termine della (M6.7), e abbiamo:

$$E_1 = E_S - \vec{n}_0 \cdot \vec{J}_S$$

essendo E_S l'energia della cometa e \vec{J}_S il suo momento angolare intorno al Sole. L'intera espressione è una costante, che in termini di elementi dell'orbita si scrive

$$\frac{1}{2a} + \left[\frac{a(1 - e^2)}{a_0^3} \right]^{1/2} \cos i = \text{cost.} \quad (\text{M6.8})$$

dove: a_0 = distanza Sole-Giove, a = semiasse maggiore dell'orbita della cometa, e = eccentricità, i = inclinazione dell'orbita della cometa sull'orbita di Giove.

Dunque Giove perturba il moto, ma in prima approssimazione la quantità scritta è costante. In questo consiste il *criterio di Tisserand*, che è stato di grande utilità per riconoscere le comete ai loro ritorni. Infatti a ogni giro l'orbita della cometa può variare notevolmente (fig. M6-11), ma la (M6.8) connette gli elementi a due passaggi successivi, e permette quindi di riconoscere se una nuova cometa non sia una cometa già nota, la cui orbita è stata perturbata da Giove.

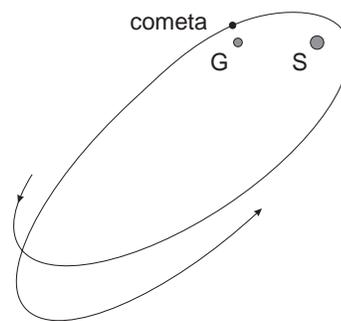


Fig. M6-11

Volendo essere più precisi, si potrebbe tener conto dei termini che si sono trascurati in prima approssimazione; ma oggi il criterio di Tisserand è di fatto superato dalla possibilità di un'integrazione numerica dell'orbita, resa facile dalla disponibilità dei calcolatori elettronici.