M5. Perturbazioni degli elementi orbitali

Introduzione

Vogliamo ora riprendere, come esempio dei metodi della meccanica analitica, il problema trattato nel capitolo precedente. Potremo scrivere l'hamiltoniana nella forma

$$H = H_0 + H_1$$

dove

$$H_0 = -\frac{k^4 \mu^3}{2 J_\varphi^2}$$

è l'hamiltoniana imperturbata (M3–13) e

$$H_1 = \tfrac{3}{2}\, R^2 \mathcal{J}_2\, k^2 \mu\, \frac{1}{r^3} \left(\sin^2\!\beta - \tfrac{1}{3}\right) \tag{M5.1}$$

è il termine perturbativo (M4–6), con la sola sostituzione $\beta = \pi/2 - \vartheta$. Non dimentichiamo che la (M5.1) vale in approssimazione di quadrupolo.

Teniamo inoltre presente che nell'hamiltoniana imperturbata H_0 compare J_φ, e dunque φ non è costante del moto. Infatti $\dot\varphi = \partial H_0/\partial J_\varphi = n$ è costante ma non è nulla, il che vuol dire che φ varia linearmente nel tempo. Invece J_φ, J_χ, J_ψ, χ, ψ sono costanti del moto.

Esprimiamo ora nel termine perturbativo (M5.1) β e r come funzioni delle coordinate canoniche φ, χ, ψ, J_φ, J_χ, J_ψ. In realtà β e r non dipendono da ψ: infatti β dipende da i e da w ($\sin\beta = \sin i \sin w$) e quindi da J_χ e J_ψ perché $\cos i = J_\psi/J_\chi$; e ancora da φ, χ, J_φ perché $w = \chi + v$, $v = v(\varphi, e)$, $e = e(J_\varphi, J_\chi)$. Analogamente r non dipende né da χ né da ψ.

Tutto questo si comprende osservando che cambiare ψ è come ruotare attorno all'asse z, per cui né β né r cambiano; cambiare χ significa ruotare l'orbita nel suo piano, il che cambia β ma non cambia r.

Il fatto che ψ non compaia neppure nell'hamiltoniana perturbata, implica $\dot J_\psi = \partial H/\partial\psi = 0$, cioè che J_ψ è ancora una costante del moto: in effetti la perturbazione (pianeta a forma di ellissoide anziché sferica) è a simmetria cilindrica attorno all'asse z, ed è ovvio perciò che la componente z del momento angolare resti una costante del moto. C'è però da aspettarsi che J_φ e J_χ non siano più costanti, e così pure che sia $\dot\varphi \neq n$, $\dot\chi \neq 0$, $\dot\psi \neq 0$.

Perturbazioni periodiche e secolari

Il nostro procedimento sarà perturbativo; perciò in H_1 useremo per r e β le soluzioni imperturbate (questa è l'approssimazione al primo ordine, che potrebbe essere migliorata iterando). Dato che nella soluzione imperturbata r e β

sono funzioni periodiche di t (e quindi di φ), il termine $(\sin^2\beta - 1/3)/r^3$ è anch'esso funzione periodica di φ, con periodo 2π. Potremo quindi sviluppare H_1, intesa come funzione di φ, in serie di Fourier:

$$H_1 = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cos h\varphi + \sum_{h=1}^{\infty} B_h \sin h\varphi. \tag{M5.2}$$

Calcoliamo allora

$$-\dot{J}_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = -\sum_h hA_h \sin h\varphi + \sum_h hB_h \cos h\varphi.$$

Si ottiene ancora una funzione periodica di φ, che per di più ha valor medio nullo, perché integrando le funzioni $\sin(h\varphi)$ e $\cos(h\varphi)$ su un periodo si trova zero.

Dato che la φ imperturbata è lineare nel tempo ($\varphi(t) = \varphi_0 + nt$), $\dot{J}_\varphi$ può considerarsi periodica in t, con periodo T e media nulla. Avremo perciò

$$J_\varphi(t_1 + T) - J_\varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{J}_\varphi \, dt = 0$$

ossia $J_\varphi(t_1 + T) = J_\varphi(t_1)$ qualunque sia t_1: dunque anche la J_φ, che non è più costante del moto, è periodica con periodo T. Ricordando poi che $J_\varphi = k\mu\, a^{1/2}$ si può concludere che al primo ordine *l'asse maggiore dell'orbita ha perturbazioni periodiche ma non perturbazioni secolari.*

Il ragionamento che precede è stato possibile perché abbiamo potuto esplicitare la dipendenza di H_1 da φ nella forma (M5.2), dove A_0, A_h, B_h non dipendono da φ. Vediamo ora cosa accade invece per le altre variabili.

In primo luogo

$$-\dot{J}_\chi = \frac{\partial H}{\partial \chi} = \frac{\partial H_1}{\partial \chi} = \frac{\partial A_0}{\partial \chi} + \sum_h \frac{\partial A_h}{\partial \chi} \cos h\varphi + \sum_h \frac{\partial B_h}{\partial \chi} \sin h\varphi.$$

Anticipiamo che a conti fatti A_0 non dipende da χ; si può dire quindi che J_χ, e così pure l'eccentricità, *è periodica nel tempo e non presenta perturbazioni secolari.*

Per le altre variabili si ha:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial J_\varphi} + \frac{\partial H_1}{\partial J_\varphi} = n + \frac{\partial A_0}{\partial J_\varphi} + \sum_h \frac{\partial A_h}{\partial J_\varphi} \cos h\varphi + \sum_h \frac{\partial B_h}{\partial J_\varphi} \sin h\varphi$$

e analogamente

$$\dot\chi = \frac{\partial A_0}{\partial J_\chi} + \sum_h \left(\frac{\partial A_h}{\partial J_\chi}\cos h\varphi + \frac{\partial B_h}{\partial J_\chi}\sin h\varphi\right)$$
$$\dot\psi = \frac{\partial A_0}{\partial J_\psi} + \sum_h \left(\frac{\partial A_h}{\partial J_\psi}\cos h\varphi + \frac{\partial B_h}{\partial J_\psi}\sin h\varphi\right).$$

Come vedremo, $\partial A_0/\partial J_\varphi$, $\partial A_0/\partial J_\chi$, $\partial A_0/\partial J_\psi$ non sono nulle, per cui all'effetto già visto di perturbazioni periodiche si aggiunge una *perturbazione secolare* data da queste tre derivate.

A meno delle suddette oscillazioni si ha dunque:

1) una variazione di $\dot\varphi$, cioè della velocità angolare media del satellite attorno al pianeta
2) uno spostamento continuo della posizione del pericentro ($\dot\chi \neq 0$)
3) un avanzamento o retrogradazione della linea dei nodi ($\dot\psi \neq 0$).

Riassumendo, la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{ll} J_\psi & \text{costante del moto} \\ \left.\begin{array}{l} J_\varphi \\ J_\chi \end{array}\right\} & \text{oscill. periodiche} \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi \\ \chi \\ \psi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{oscillazioni periodiche} \\ \text{sovrapposte a un moto} \\ \text{secolare} \end{array}$$

Calcolo esplicito

Ciò che più c'interessa è la determinazione dei moti secolari, per cui è necessario determinare A_0 e calcolarne le opportune derivate. Riprendiamo $H_1(\varphi)$ e notiamo che il suo valor medio è

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_0\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_h A_h\int_0^{2\pi}\cos h\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\sum_h B_h\int_0^{2\pi}\sin h\varphi\,d\varphi = A_0.$$

Useremo pertanto, in luogo di A_0, il simbolo $\bar H_1$ che ci ricorda questa proprietà.

Si tratta in definitiva di fare un solo integrale:

$$\bar H_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1\,d\varphi = \frac{3R^2\mathcal{J}_2\,k^2\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\!\beta - 1/3}{r^3}\,d\varphi.$$

Per il calcolo faremo uso delle seguenti relazioni

$$d\varphi = \frac{r^2}{ab}\,dv = \frac{r^2\,dv}{a^2\sqrt{1-e^2}} \qquad \sin\beta = \sin i\,\sin w \qquad \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos v}{p}$$
$$p = a\,(1-e^2)$$

già viste nei capitoli precedenti. Avremo così:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\beta-1/3}{r^3}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^3p}}\int_0^{2\pi}(\sin^2 i\sin^2 w-1/3)\,\frac{dv}{r}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\,(ap)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)\,(\sin^2 i\sin^2 w-1/3)\,dv.$$

Ponendo $w=\chi+v$ e sviluppando il calcolo si vede che χ scompare e si ottiene per risultato

$$\tfrac{1}{6}\,(ap)^{-3/2}(1-3\cos^2 i)$$

in cui figurano solo a, p, i. Ricordando poi che

$$a=\frac{J_\varphi^2}{k^2\mu^2}\qquad p=\frac{J_\chi^2}{k^2\mu^2}\qquad \cos i=\frac{J_\psi}{J_\chi}$$

abbiamo che $\bar{H}_1=\bar{H}_1(J_\varphi,J_\chi,J_\psi)$: $\bar{H}_1$ non dipende da φ, χ, ψ, come si era anticipato.

Si ottengono infine questi risultati:

$$\bar{H}_1=\tfrac{1}{4}\,k^8\mu^7R^2\mathcal{J}_2\,\frac{1}{J_\varphi^3\,J_\chi^3}\left(1-3\,\frac{J_\psi^2}{J_\chi^2}\right)$$

$$\dot\varphi=\frac{\partial H_0}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial H_1}{\partial J_\varphi}\simeq\frac{\partial H_0}{\partial J_\varphi}+\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial J_\varphi}=n\left(1+\frac{3R^2}{4a^2}\,\mathcal{J}_2\,\frac{2-3\sin^2 i}{(1-e^2)^{3/2}}\right)\tag{M5.3}$$

$$\dot\chi=\frac{\partial H_1}{\partial J_\chi}\simeq\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial J_\chi}=n\,\frac{3R^2}{4a^2}\,\mathcal{J}_2\,\frac{4-5\sin^2 i}{(1-e^2)^2}\tag{M5.4}$$

$$\dot\psi=\frac{\partial H_1}{\partial J_\psi}\simeq\frac{\partial\bar{H}_1}{\partial J_\psi}=-n\,\frac{3R^2}{2a^2}\,\mathcal{J}_2\,\frac{\cos i}{(1-e^2)^2}\tag{M5.5}$$

tutti a meno di termini dovuti a perturbazioni periodiche.

Discussione

Notiamo subito che il parametro caratteristico che definisce l'ordine di grandezza della perturbazione è $(R^2/a^2)\mathcal{J}_2$. Sia ad es. $i=e=0$ (orbita circolare, perpendicolare all'asse z): allora la (M5.3) diventa

$$\dot\varphi=n\left(1+\frac{3R^2}{2a^2}\,\mathcal{J}_2\right).$$

Ciò significa che il moto è più veloce se $\mathcal{J}_2 > 0$, cioè se $C > A$ (ovvero se l'ellissoide è schiacciato): infatti in questo caso si aggiunge al potenziale newtoniano un termine attrattivo che va come $1/r^3$. Se invece l'ellissoide è allungato ($C < A$, $\mathcal{J}_2 < 0$) il moto è più lento (termine repulsivo). Dalla (M5.3) si vede poi come l'effetto in questione dipende da i: sempre con $\mathcal{J}_2 > 0$ un satellite polare, al contrario di uno equatoriale, ruota più lentamente che nel caso imperturbato.

Tornando al caso $i = 0$, la (M5.4) mostra che per $\mathcal{J}_2 > 0$ (ellissoide schiacciato) $\dot{\chi} > 0$: rispetto al ☊ il pericentro si muove nello stesso senso del satellite. Se l'ellissoide è allungato accade il contrario (fig. M5–1).

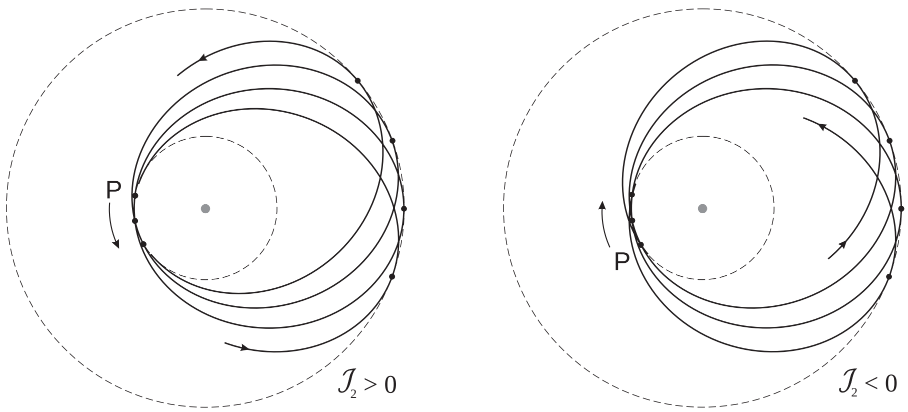

Fig. M5-1

L'effetto su ψ, dato dalla (M5.5), è invece opposto (fig. M5–2): per $\mathcal{J}_2 > 0$, $\dot{\psi} < 0$ e si avrà una retrogradazione della linea nodale (una precessione per $\mathcal{J}_2 < 0$); e questo vale per qualsiasi $i < \pi/2$. Può anche essere interessante studiare come varia l'angolo $\bar{\chi} = \chi + \psi$ per vedere come i due effetti opposti si combinano nello spazio. Si vede che in un'orbita equatoriale con $\mathcal{J}_2 > 0$ il pericentro si muove di moto complessivamente diretto.

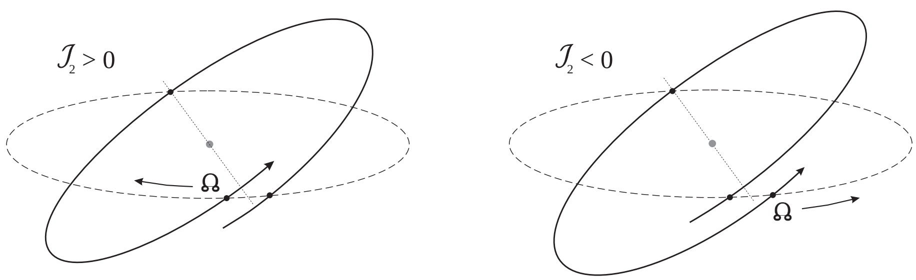

Fig. M5-2

Abbiamo visto al cap. precedente che lo schiacciamento della Terra ha effetto piccolissimo sulla Luna; ma non è così per i satelliti artificiali, che hanno R/a

dell'ordine di 1. Al contrario, proprio osservando le orbite perturbate dei satelliti artificiali si può avere una buona misura di $\mathcal{J}_2$ e anche dei termini di multipolo superiori, che sarebbe assai difficile ottenere per altra via.

Analogo quantistico

Riepilogando quanto visto fino ad ora, l'hamiltoniana di un satellite in approssimazione di quadrupolo si scrive $H = H_0 + H_1$ con

$$H_0 = -\frac{k^4 \mu^3}{2J_\varphi^2} \qquad H_1 = \tfrac{3}{2} R^2 \mathcal{J}_2\, k^2 \mu\, \frac{1}{r^3} \left(\sin^2\beta - \tfrac{1}{3}\right). \tag{M5.6}$$

La perturbazione H_1 produce due tipi di effetti: periodici, che interessano tutte le variabili tranne J_φ, che resta rigorosamente costante del moto; e secolari per φ, χ, ψ che sono di questa forma:

$$\dot\varphi = n + \mathrm{O}\left(\frac{R^2}{a^2}\,\mathcal{J}_2\right) \qquad \dot\chi = \mathrm{O}\left(\frac{R^2}{a^2}\,\mathcal{J}_2\right) \qquad \dot\psi = \mathrm{O}\left(\frac{R^2}{a^2}\,\mathcal{J}_2\right).$$

La situazione ha un analogo interessante in meccanica quantistica, ove si consideri un elettrone in un campo coulombiano cui si aggiunge un termine di quadrupolo. Il caso ha effettivo interesse fisico ogni volta che la carica che genera il campo non è sferica ma ellissoidale, e ciò capita per molti nuclei atomici.

Sappiamo dalla meccanica quantistica che gli stati stazionari imperturbati possono essere descritti da tre numeri quantici (n, l, m): vogliamo mostrare in primo luogo che questi numeri quantici sono in esatta corrispondenza con le tre variabili canoniche J_φ, J_χ, J_ψ.

Per cominciare, gli autovalori imperturbati dell'energia dell'elettrone sono dati da

$$E_n = -\frac{\mu\, e^4}{2\hbar^2 n^2} \tag{M5.7}$$

mentre l'energia del satellite è H_0 data dalla prima delle (M5.6), che si può riscrivere ricordando il significato di k:

$$H_0 = \frac{(GMm)^2 \mu}{2J_\varphi^2}. \tag{M5.8}$$

Se ora si tiene presente che l'interazione gravitazionale ha potenziale $-GMm/r$ mentre quella coulombiana è $-e^2/r$, si vede che (M5.7) e (M5.8) si corrispondono esattamente, se si fa $(n\hbar \leftrightarrow J_\varphi)$.

Ancora più semplice vedere la corrispondenza per le altre variabili: J_χ è il modulo del momento angolare, il cui quadrato nel caso quantistico ha autovalori $l(l+1)\,\hbar^2$; infine J_ψ e $m\hbar$ rappresentano la componente z. Nel problema quantistico si ha degenerazione su l e m (l'energia dipende solo da n e non da l

e m); così nel caso classico l'hamiltoniana imperturbata non dipende da J_χ né da J_ψ.

Proviamo ora ad accennare al calcolo quantistico (teoria delle perturbazioni al primo ordine) per un elettrone in un campo coulombiano più quadrupolo, espresso quindi (*mutatis mutandis*) dalle (M5.6). Se calcoliamo gli elementi di matrice della perturbazione tra gli stati stazionari $|nlm\rangle$, troviamo che alcuni sono nulli: ad es. dato che H_1 commuta con J_z si ha subito $\langle m|H_1|m'\rangle = 0$ se $m \neq m'$.

Nella teoria quantistica delle perturbazioni su stati degeneri si trascurano al primo ordine gli elementi di matrice tra stati di diverso n, e si considerano solo quelli relativi a una stessa energia imperturbata. Dimostriamo ora che trascurare nel calcolo quantistico gli altri blocchi della matrice H_1 (fig. M5–3) corrisponde nel calcolo classico a trascurare gli effetti periodici, prendendo solo le medie temporali, cioè a considerare solo eventuali perturbazioni secolari.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$n=1$ $l=m=0$	idem con $n=1$		
$n=2$ $l=m=0$ $l=1$ $m=-1$ $m=0$ $m=1$		elementi di matrice tra stati degeneri con $n=2$	
$n=3$			idem con $n=3$

Fig. M5-3

Lo stato di energia E_n avrà infatti una dipendenza temporale periodica, del tipo $\exp(-iE_n t/\hbar)$: dunque

$$\langle E_n|H_1|E_{n'}\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})\,t\right) \cdot \langle \text{elem. di matrice indip. da } t\rangle.$$

Ne segue che integrando su un periodo (media temporale) si otterrà valor medio nullo ogni volta che $n \neq n'$. Solo nei blocchi diagonali, dove $E_n = E_{n'}$, la dipendenza dal tempo sparisce e la media temporale è diversa da zero.

L'intervallo di tempo su cui si fa tale media è $h/(E_n - E_{n'})$, che rappresenta proprio (regola di Bohr) il periodo $T = 1/\nu$ dove ν è la frequenza di transizione dallo stato $|E_n\rangle$ allo stato $|E_{n'}\rangle$. Si è così ritrovato che il periodo classico del moto imperturbato coincide col periodo della radiazione emessa.

Un'apparente incongruenza sembra nascere dal fatto che classicamente abbiamo sempre delle oscillazioni oltre al moto secolare, mentre quantisticamente queste spariscono; ma ciò è dovuto al modo in cui si è affrontato il problema. Noi infatti ci siamo chiesti come vengono perturbati gli stati stazionari, ed è ovvio che non potremo mai trovare oscillazioni con questo metodo. Occorrerebbe affrontare lo studio dell'evoluzione temporale di uno stato qualsiasi (non stazionario):

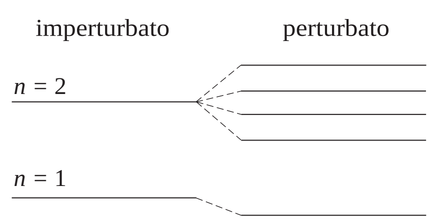

Fig. M5-4

facendo questo, le perturbazioni periodiche si troverebbero anche nel calcolo quantistico.

Vediamo ora i cambiamenti di $\dot\varphi$, $\dot\chi$, $\dot\psi$. Dato che $\dot\varphi$ è legato alla frequenza del moto orbitale, e il suo corrispondente quantistico è la separazione tra due livelli, l'analogo quantistico del cambiamento di $\dot\varphi$ dovuto alla perturbazione è che i livelli del sistema vengono modificati. Il fatto che la perturbazione in $\dot\varphi$ (M5.3) dipende da e e da i, ossia da J_χ, J_ψ, mostra che i livelli perturbati dipenderanno anche da l e m, e non più soltanto da n: si ha quindi una *risoluzione* della degenerazione iniziale. Ad es. per $n = 2$ (livello 4 volte degenere) ci si potrebbero aspettare 4 livelli separati (fig. M5–4). In realtà si dimostra che la perturbazione di quadrupolo non sposta il livello $n = 1$, e risolve soltanto in 3 il livello $n = 2$.

Per χ e ψ si ha nel problema imperturbato

$$\langle nlm\,|\,\chi\,|\,n'l'm'\rangle = 0 \qquad \langle nlm\,|\,\psi\,|\,n'l'm'\rangle = 0 \qquad \text{se} \quad n \neq n'$$

perché χ e ψ sono costanti del moto; per la stessa ragione $\langle nlm\,|\,\chi\,|\,nl'm'\rangle$ e $\langle nlm\,|\,\psi\,|\,nl'm'\rangle$ non dipendono da t. Con la perturbazione ogni livello si scinde in vari livelli, perciò $\langle nlm\,|\,\chi\,|\,nl'm'\rangle$ non è più indipendente dal tempo. La frequenza dipende però dalle differenze di energia ΔE tra livelli con uguale n, che sono molto piccole; ne segue che le corrispondenti velocità angolari sono anch'esse piccole. In altre parole: χ, ψ non sono più costanti del moto, ma la loro dipendenza dal tempo (secolare) è dell'ordine perturbativo.

Si potrebbe vedere che già $\langle nlm\,|\,\chi\,|\,nl'm\rangle \neq 0$: il moto del pericentro corrisponde alla rottura della degenerazione su l. Si può fare un discorso analogo con $\langle nlm\,|\,\psi\,|\,nlm'\rangle$: dato che un potenziale non centrale non ha degenerazione su m, l'elemento di matrice di ψ fra stati perturbati con diverso m dipende dal tempo: si ha perciò un moto dei nodi.

Perturbazioni in generale; elementi osculanti

La presentazione fatta fin qui non è del tutto esatta, perché si è trascurato un effetto che può essere importante. Se proviamo a fare un calcolo al secondo ordine perturbativo, ci aspettiamo un effetto su J_φ dovuto al moto secolare di φ, χ, ψ: ebbene tale effetto non è del secondo ordine, ma a conti fatti risulta del primo ordine. Così accade anche per J_χ, mentre J_ψ naturalmente rimane costante a ogni ordine. Riassumendo abbiamo:

J_φ, J_χ, φ, χ, ψ: oscillazioni a breve periodo e adesso anche oscillazioni a lungo periodo (a causa del moto secolare degli angoli)

φ, χ, ψ: moto secolare.

Questi sono tutti effetti al primo ordine. Resta però vero anche al secondo ordine che J_φ non ha perturbazioni secolari (e da J_φ dipende il semiasse maggiore a).

Il problema analogo nel moto di un pianeta del sistema solare è noto come "problema della stabilità del sistema solare": se J_φ per un pianeta non potesse avere perturbazioni secolari a ogni ordine, tutti gli assi maggiori potrebbero solo oscillare, ma non crescere o decrescere continuamente, e perciò il sistema solare sarebbe stabile. Poincaré ha dimostrato che ciò è vero fino al secondo ordine, ma al terzo le cose cambiano. Tuttavia l'effetto calcolato è così piccolo, che ad es. l'orbita della Terra mostrerà un allargamento apprezzabile solo in 10^{11} anni!

Affrontiamo ora brevemente un altro problema. In presenza di perturbazioni non si può più parlare di orbita ellittica, quindi neppure dei suoi elementi. Ma allora quando parliamo di eccentricità, semiasse, ecc. a che cosa ci riferiamo?

Per capirlo, si supponga che all'istante che c'interessa cessi istantaneamente l'effetto perturbativo: da questo punto in poi il corpo si muoverà secondo le leggi di Keplero su un'orbita perfettamente ellittica. Tale orbita è detta *orbita osculatrice*, ed è quella che meglio approssima l'orbita reale perturbata intorno all'istante considerato. Quando si parla di "elementi" per un'orbita perturbata, s'intendono in genere quelli dell'orbita osculatrice, e per chiarezza vengono denominati *elementi osculanti*.

Gli elementi osculanti possono essere calcolati esattamente a partire dalla posizione e velocità del corpo a un dato istante. Dato che il moto perturbato non segue le leggi di Keplero, è ovvio che gli *elementi osculanti cambiano nel tempo*. Così ad es. variazioni periodiche di J_φ, J_χ producono variazioni periodiche nel semiasse maggiore e nell'eccentricità dell'orbita osculatrice, ecc.

Si trovano spesso indicati (specie per i pianeti interni del sistema solare) degli *elementi medi*. Questi sono elementi osculanti ottenuti però trascurando le perturbazioni periodiche a breve periodo (periodi dell'ordine di quello orbitale).