M3. Meccanica analitica del problema dei due corpi

Le coordinate canoniche

Tratteremo adesso il problema dei due corpi coi metodi della Meccanica Analitica. Faremo sempre riferimento al problema ristretto, nel senso visto nel Cap. M1. Useremo coordinate sferiche con le notazioni astronomiche (fig. M3–1): in particolare l'angolo β è contato dal piano dell'eclittica, anziché dall'asse polare. Le coordinate lagrangiane sono dunque r, β, λ. Vediamo l'espressione dell'energia.

Energia cinetica:	$T = \frac{1}{2}\,\mu\left(\dot r^2 + r^2\dot\beta^2 + r^2\cos^2\!\beta\,\dot\lambda^2\right)$
Energia potenziale:	$V = -k^2\mu/r.$

La lagrangiana sarà $L = T - V$. Definiamo ora i momenti coniugati:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot r} = \mu\,\dot r \\ p_\beta &= \frac{\partial L}{\partial \dot\beta} = \mu\,r^2\dot\beta \\ p_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \dot\lambda} = \mu r^2\cos^2\!\beta\,\dot\lambda. \end{aligned} \tag{M3.1}$$

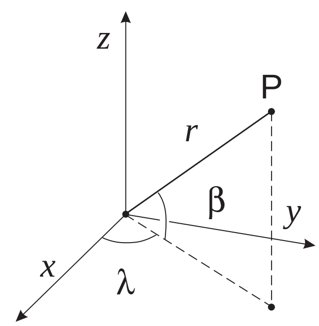

Fig. M3-1

Assumendo come variabili indipendenti le p e le q, determiniamo l'hamiltoniana del sistema

$$H = \sum p_i\dot q_i - L.$$

È noto che quando T è una funzione quadratica omogenea nelle velocità generalizzate si può scrivere

$$H = T + V.$$

Dunque nel nostro caso

$$H(q,p) = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\beta^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\!\beta}\,p_\lambda^2\right) - \frac{k^2\mu}{r}$$

e da qui si ricavano le equazioni di Hamilton:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

(tralasciamo gli indici per semplicità). Le prime forniscono $\dot{r} = p_r/\mu$ ecc. cioè le (M3.1); dalle seconde abbiamo invece:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{1}{\mu\, r^3}\, p_\beta^2 + \frac{1}{\mu\, r^3 \cos^2\beta}\, p_\lambda^2 - \frac{k^2\mu}{r^2} \\ \dot{p}_\beta &= -\frac{\sin\beta}{\mu\, r^2 \cos^3\beta}\, p_\lambda^2 \\ \dot{p}_\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{M3.2}$$

La terza equazione è ovvia perché H non dipende da λ, e ci dice che p_λ è una costante del moto, cioè che si conserva la componente del momento angolare secondo l'asse polare dell'eclittica. Infatti abbiamo $p_\lambda = \mu\, r^2 \cos^2\beta \cdot \dot{\lambda}$ dove $\mu\, r^2 \cos^2\beta = I$ è il momento d'inerzia e $\dot{\lambda}$ la velocità angolare: dunque p_λ non è altro che J_z (fig. M3–2).

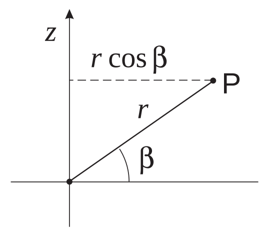

Fig. M3-2

Un altro integrale primo si trova subito ricordando che $dH/dt = \partial H/\partial t$, che nel nostro caso è nulla perché H non dipende esplicitamente dal tempo. Ne segue che $H = \text{cost.} = E$ (energia).

L'equazione di Hamilton–Jacobi

I vantaggi sostanziali del formalismo di Hamilton non sono ancora apparsi. Osserviamo intanto che le perturbazioni del moto del pianeta a causa di altri corpi celesti sono esprimibili in termini di potenziali addizionali in H. Le soluzioni che si troveranno trascurando le perturbazioni saranno allora approssimate, ma il successivo studio delle perturbazioni verrà molto facilitato.

Altra cosa interessante è che per opportune trasformazioni di variabili (*trasformazioni canoniche*) la forma delle equazioni di Hamilton resta invariata. Si è detto trasformazioni di variabili e non di coordinate perché quest'ultime sono una piccola parte delle trasformazioni permesse, che possono generalmente coinvolgere insieme coordinate e momenti coniugati. Vedremo che con opportuna scelta della trasformazione l'hamiltoniana può assumere una forma più semplice.

Ci si può ad es. proporre di trovare una trasformazione canonica

$$(p, q) \mapsto (\xi(p, q), \eta(p, q))$$

per la quale la nuova hamiltoniana K sia identicamente nulla. Trovare una tale trasformazione è appunto il *problema di Hamilton–Jacobi* (in seguito abbreviato con H–J). Una volta trovata la trasformazione, le equazioni di Hamilton si ridurranno a

$$\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$$

cioè le ξ e le η saranno costanti del moto.

Una trasformazione qualsiasi non è a priori canonica, ma si dimostra che comunque scelta una funzione $S(q,\eta,t)$, da questa funzione (detta *generatrice*) si può ottenere una trasformazione canonica come segue. Si scrive

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial}{\partial \eta} S(q|\eta|t) \\ p &= \frac{\partial}{\partial q} S(q|\eta|t). \end{aligned} \tag{M3.3}$$

Risolvendo le seconde delle (M3.3) rispetto alle η, si ricavano queste come funzioni di (q,p); sostituendo le η nelle prime, si ottengono le $\xi(q,p)$. Si dimostra poi che nelle nuove coordinate l'hamiltoniana diventa

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Se vogliamo $K = 0$ basterà che sia $H = -\partial S/\partial t$. Si noti però che H è funzione delle q e delle p, mentre S contiene le q e le η; occorre perciò precisare meglio il discorso. Nell'hamiltoniana dobbiamo pensare sostituite alle p le espressioni $\partial S/\partial q$; avremo allora

$$H\left(q,\, \frac{\partial S}{\partial q},\, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

che è l'*equazione di* H–J.

Se dunque si riesce a trovare una soluzione S di quest'equazione, si trova subito la trasformazione $(q,p) \mapsto (\xi,\eta)$ che dà per hamiltoniana $K \equiv 0$, e le nuove coordinate forniscono altrettante costanti del moto.

Separazione dell'equazione di H–J

Tornando al nostro caso, l'equazione di H–J si scriverà:

$$\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 \right] - \frac{k^2\mu}{r} = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{M3.4}$$

Risolvere la (M3.4), ossia trovare $S(r,\beta,\lambda,t)$, è in genere tutt'altro che facile, poiché si tratta di un'equazione alle derivate parziali non lineare; tanto meno è possibile trovarne l'integrale generale. Questo non è però necessario: se infatti riusciamo a trovare un *integrale completo* dell'equazione, cioè una soluzione che contiene in maniera essenziale tanti parametri quanti sono i gradi di libertà, e al variare dei quali si ottiene così tutta una famiglia di soluzioni, allora questi parametri possono essere assunti come variabili η, per cui avremo ottenuto la cercata $S(q,\eta,t)$.

Fortunatamente la (M3.4) è *separabile*: intendiamo con questo che esiste una soluzione del tipo:

$$S(r,\beta,\lambda,t) = S_r(r) + S_\beta(\beta) + S_\lambda(\lambda) - \sigma t. \tag{M3.5}$$

La particolare dipendenza dal tempo nella forma (M3.5) è possibile se e solo se la H non dipende da t esplicitamente, come nel nostro caso; le condizioni generali di separabilità dell'equazione sono ancora oggetto di discussione e dipendono comunque dalle coordinate lagrangiane scelte all'inizio.

Come vedremo, la (M3.5) fornisce in modo naturale, come in tutti i casi di separabilità, l'integrale completo di cui abbiamo bisogno.

Con la sostituzione (M3.5) la nostra equazione (M3.4) diventa:

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\left(\frac{dS_\beta}{d\beta}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2\cos^2\beta}\left(\frac{dS_\lambda}{d\lambda}\right)^2 - \frac{k^2\mu}{r} = \sigma. \tag{M3.6}$$

La parte a primo membro è l'hamiltoniana, che è ovviamente una costante del moto e coincide con l'energia E, per cui possiamo porre $\sigma = E$.

Se risolviamo la (M3.6) rispetto a $dS_\lambda/d\lambda$ otteniamo un risultato della forma

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} = F_1(r,\beta)$$

dove il secondo membro non dipende da λ. Dunque anche $dS_\lambda/d\lambda$ non dipende da λ e si riduce a una costante:

$$\frac{dS_\lambda}{d\lambda} = J_\lambda. \tag{M3.7}$$

Riscriviamo ora la (M3.6) così:

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\left[\left(\frac{dS_\beta}{d\beta}\right)^2 + \frac{J_\lambda^2}{\cos^2\beta}\right] - \frac{k^2\mu}{r} = E.$$

Con lo stesso ragionamento si trova:

$$\left(\frac{dS_\beta}{d\beta}\right)^2 + \frac{J_\lambda^2}{\cos^2\beta} = F_2(r)$$

e di nuovo il primo membro di questa non dipende da β ma è una costante, che chiameremo J^2:

$$\left(\frac{dS_\beta}{d\beta}\right)^2 + \frac{J_\lambda^2}{\cos^2\beta} = J^2. \tag{M3.8}$$

Resta infine un'equazione differenziale per la sola S_r:

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = 2\mu E + \frac{2k^2\mu^2}{r} - \frac{J^2}{r^2}. \tag{M3.9}$$

Le (M3.7, 8, 9) sono tutte equazioni differenziali del primo ordine, i cui integrali generali conterranno costanti additive. Si vede però che possiamo porle subito uguali a zero, perché restano tutte come addendi nell'espressione di S; di questa funzione generatrice serviranno però solo le derivate rispetto ai suoi argomenti e in queste le costanti additive non compariranno. Le (M3.7, 8, 9) hanno le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= J_\lambda \lambda \\ S_\beta &= \int d\beta \left(J^2 - \frac{J_\lambda^2}{\cos^2\beta}\right)^{1/2} \\ S_r &= \int dr \left(2\mu E + \frac{2k^2\mu^2}{r} - \frac{J^2}{r^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{M3.10}$$

Nelle ultime due c'è ovviamente un'indeterminazione nel segno della radice quadrata: esaminiamo S_β. Presso il nodo ascendente, dove β cresce ($\dot\beta > 0$), anche p_β, che è legato a $\dot\beta$ dalla seconda delle (M3.1), è positivo: dunque $\partial S/\partial\beta = p_\beta > 0$ e il segno da prendere (almeno in questa zona) è quello positivo. Viceversa, attorno al nodo discendente va preso il segno negativo. Analogo ragionamento si può fare per S_r, dove si deve distinguere il moto da pericentro ad apocentro ($p_r > 0$) e quello da apocentro a pericentro ($p_r < 0$).

Soluzione esplicita

Restano da calcolare i due integrali, cosa che si può fare senza altre conoscenze, con diverse tecniche. Ma noi abbiamo già risolto il problema per altra via e ne conosciamo la geometria; faremo quindi uso di sostituzioni di variabili ispirate alla soluzione già nota.

Per il calcolo del primo integrale sono utili le seguenti posizioni:

$$J_\lambda = J\cos i \quad (\text{notare che } J_\lambda^2 < J^2)$$

$$\sin\beta = \sin i \sin w. \tag{M3.11}$$

La (M3.11) definisce w in funzione di β; differenziandola:

$$\cos\beta\, d\beta = \sin i \cos w\, dw.$$

Sempre dalla (M3.11) si ottiene facilmente

$$\sin^2 i - \sin^2\beta = \sin^2 i \cos^2 w.$$

Definiamo poi $\bar\lambda$ mediante

$$\operatorname{tg}\bar\lambda = \cos i \operatorname{tg} w. \tag{M3.12}$$

Differenziando la (M3.12):

$$\frac{d\bar\lambda}{\cos^2\bar\lambda} = \cos i\,\frac{dw}{\cos^2 w}.$$

Dalle (M3.11), (M3.12) si può ricavare

$$\cos^2\beta\cos^2\bar\lambda = \cos^2 w$$

che moltiplicata per la precedente dà:

$$\cos^2\beta\,d\bar\lambda = \cos i\,dw.$$

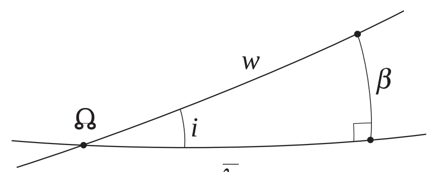

Fig. M3-3

Tutte le relazioni scritte risultano chiare pensando a w e $\bar\lambda$ come ipotenusa e cateto di un triangolo sferico rettangolo, di cui β è l'altro cateto e i l'angolo opposto (fig. M3–3).

Procediamo con il calcolo:

$$\begin{aligned}
S_\beta &= \int d\beta\left(J^2 - \frac{J_\lambda^2}{\cos^2\beta}\right)^{1/2} = J\int\frac{(\cos^2\beta - \cos^2 i)^{1/2}}{\cos\beta}\,d\beta \\
&= J\int(\sin^2 i - \sin^2\beta)^{1/2}\,\frac{d\beta}{\cos\beta} = J\int\sin i\cos w\,\frac{d\beta}{\cos\beta} = J\int\sin^2 i\cos^2 w\,\frac{dw}{\cos^2\beta} \\
&= J\int\frac{\cos^2\beta - \cos^2 i}{\cos^2\beta}\,dw = J\int\left(1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\beta}\right)dw = Jw - J\cos^2 i\int\frac{dw}{\cos^2\beta} \\
&= Jw - J\cos i\int d\bar\lambda = Jw - J_\lambda\bar\lambda.
\end{aligned}$$

Dunque il risultato è

$$S_\beta = Jw - J_\lambda\bar\lambda.$$

È utile sapere che

$$\frac{\partial S_\beta}{\partial J} = w \qquad \frac{\partial S_\beta}{\partial J_\lambda} = -\bar\lambda.$$

Queste non sono relazioni immediate: ad es. w dipende da J attraverso i nella sua definizione (M3.11). Il modo più semplice di trovarle è di eseguire le derivate sotto il segno d'integrale nella seconda delle (M3.10), e poi calcolare gli integrali che risultano in modo del tutto analogo a quello seguito per S_β.

Veniamo al secondo integrale. Poniamo:

$$E = -\frac{k^2\mu}{2a}$$

$$J^2 = k^2\mu^2 p \qquad \text{con} \quad p = a\,(1-e^2).$$

$$r = a\,(1 - e\cos u) = \frac{p}{1+e\cos v}$$

da cui

$$dr = ae\sin u\,du$$

$$e^2\sin^2 u = 1 - e^2\cos^2 u - (1-e^2)$$

$$dv = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\,du.$$

Passiamo al calcolo:

$$\begin{aligned}
S_r &= \int dr\left(2\mu E + \frac{2k^2\mu^2}{r} - \frac{J^2}{r^2}\right)^{1/2} = \int dr\left(-\frac{k^2\mu^2}{a} + \frac{2k^2\mu^2}{r} - \frac{k^2\mu^2 p}{r^2}\right)^{1/2} \\
&= k\mu\int dr\left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} - \frac{p}{r^2}\right)^{1/2} = \frac{k\mu}{\sqrt{a}}\int(-r^2 + 2ar - pa)^{1/2}\;\frac{dr}{r} \\
&= k\mu\,a^{3/2}\int e^2\sin^2 u\,\frac{du}{r} = k\mu\,a^{3/2}\int(1-e^2\cos^2 u)\,\frac{du}{r} - k\mu\,a^{3/2}\,(1-e^2)\int\frac{du}{r} \\
&= k\mu\,\sqrt{a}\int(1+e\cos u)\,du - k\mu\,\sqrt{a\,(1-e^2)}\int dv \\
&= k\mu\,\sqrt{a}\,(u + e\sin u) - k\mu\,\sqrt{p}\,v.
\end{aligned}$$

L'ultimo risultato è dunque:

$$S_r = k\mu\,\sqrt{a}\,(u + e\sin u) - k\mu\,\sqrt{p}\,v.$$

Le variabili indipendenti per la S_r sono r, E, J. Troviamo allora che

$$\frac{\partial S_r}{\partial E} = \frac{a^{3/2}}{k}\,\varphi = \frac{1}{n}\,\varphi \qquad (\varphi \text{ anomalia media, } n = k/a^{3/2})$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial J} = -v.$$

Si noti che sebbene sia $k\,\mu\,p^{1/2} = J$, anche qui la derivata non si fa direttamente: si può procedere come già detto per le derivate di S_β.

Altre variabili canoniche

Invece di usare la terna E, J, J_λ, conviene usare la terna $J_\varphi, J_\chi, J_\psi$, così definita:

$$E = -\frac{k^4\mu^3}{2J_\varphi^2} \qquad \text{ovvero} \qquad J_\varphi = \sqrt{\frac{k^4\mu^3}{2|E|}} = k\mu\,\sqrt{a}.$$

$$J_\chi = J \qquad J_\psi = J_\lambda.$$

Ricordiamo che è $S(q,\eta,t)$ e che $\xi = \partial S/\partial\eta$. Troviamo allora le nuove variabili canoniche:

$$\frac{\partial S}{\partial J_\varphi} = \frac{\partial S}{\partial E}\,\frac{dE}{dJ_\varphi} = \varphi - nt \tag{M3.13}$$

e poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial J_\chi} &= w - v = \chi \\ \frac{\partial S}{\partial J_\psi} &= \lambda - \bar\lambda = \psi. \end{aligned} \tag{M3.14}$$

La scelta di questi simboli è ovvia, dato che χ è l'argomento del perielio e ψ la longitudine del nodo ascendente. Le nuove coordinate, che sono costanti del moto, sono dunque:

$$\varphi_0 = \varphi - nt \qquad \chi \qquad \psi.$$

Riassumendo: fatte le posizioni

$\chi = w - v$ (differenza tra argomento del pianeta e anomalia vera = argomento del perielio)

$\psi = \lambda - \bar\lambda$ (differenza tra long. del pianeta e pseudolong. del ☊ = long. del ☊)

e poi

$$J_\varphi = k\mu\sqrt{a} \qquad J_\chi = J \qquad J_\psi = J_\lambda = J\cos i \qquad E = -\frac{k^4\mu^3}{2J_\varphi^2}$$

si può scrivere

$$S = J_\varphi\,(u + e\sin u) + J_\chi\chi + J_\psi\psi - Et.$$

Trovata $S(r,\beta,\lambda,J_\varphi,J_\chi,J_\psi)$ abbiamo $p = \partial S/\partial q$ e $\xi = \partial S/\partial\eta$; da queste ultime si ricavano le ξ ((M3.13), (M3.14)): queste sono φ_0, χ e ψ. L'insieme delle coordinate canoniche (che sono tutte costanti del moto, in quanto la generatrice S è soluzione dell'equazione di H–J) consiste di

$$\begin{matrix} \varphi_0 & \chi & \psi \\ J_\varphi & J_\chi & J_\psi. \end{matrix}$$

L'azione ridotta

Talvolta invece di usare la generatrice S si usa la cosiddetta "azione ridotta" $\bar{S}$ così definita:

$$\bar{S} = S + Et.$$

In tal modo in certi casi, come nel nostro, la $\bar{S}$ non contiene il tempo esplicito, è cioè puramente geometrica. Naturalmente $\bar{S}$ non è soluzione dell'equazione di H–J e le nuove variabili non saranno tutte costanti del moto. Il vantaggio però c'è: quando E non dipende dal tempo (problema conservativo) si può separare il tempo nell'equazione di H–J come si è visto: inoltre, poiché la nuova hamiltoniana è legata alla vecchia da $K = H + \partial\bar{S}/\partial t$, se $\bar{S}$ non dipende dal tempo avremo $K = H$.

Da una trasformazione geometrica come quella definita da $\bar{S}$ si può sempre ricavare l'orbita, anche se non si sa nulla del moto lungo l'orbita. Infatti valgono ancora le (M3.14), nella forma

$$\frac{\partial\bar{S}}{\partial J_\chi} = \chi \qquad \frac{\partial\bar{S}}{\partial J_\psi} = \psi$$

(questo perché la dipendenza dal tempo coinvolge solo E che dipende solo da J_φ). È facile convincersi che il termine φ nella (M3.13) deriva dalla prima parte di S che non dipende dal tempo (quella che abbiamo chiamato $\bar{S}$) mentre il termine $-nt$ deriva da $-Et$; infatti

$$\frac{dE}{dJ_\varphi} = \frac{k^4\mu^3}{J_\varphi^3} = \frac{k^4\mu^3}{k^3\mu^3 a^{3/2}} = \frac{k}{a^{3/2}} = n.$$

Si ottiene allora

$$\frac{\partial\bar{S}}{\partial J_\varphi} = \varphi$$

che *non* è una costante del moto. Dall'equazione $\dot{q} = \partial H/\partial p$ ricaviamo

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial J_\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{dE}{dJ_\varphi} = n \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 + nt$$

e infine ritroviamo

$$\dot{\chi} = \frac{\partial H}{\partial J_\chi} = 0$$

da cui χ costante del moto, come pure ψ.

In breve: se si usa come generatrice l'azione ridotta, si arriva a variabili canoniche

$$\begin{matrix} \varphi & \chi & \psi \\ J_\varphi & J_\chi & J_\psi. \end{matrix}$$

che sono tutte costanti del moto, a eccezione di φ.

Sistemi integrabili e degenerazione

Abbiamo dimostrato, mediante calcoli diretti e grazie alla separabilità dell'equazione di H–J, che esistono nuove coordinate canoniche, tutte costanti del moto, ricavabili da quelle di partenza mediante sole integrazioni. È utile ricordare che questo è solo un esempio particolare di un teorema generale di Liouville.

Nel nostro caso, tutto dipende dall'esistenza di certe costanti del moto: energia (hamiltoniana) e momento angolare. Richiamando la definizione di *parentesi di Poisson* — che qui dobbiamo dare per nota — e le sue proprietà, è evidente che le parentesi di Poisson di H con le componenti di $\vec{J}$, e anche quella col modulo J, sono nulle. Inoltre è anche $\{J, J_z\} = 0$ (e lo stesso per le altre componenti).

Siamo dunque nelle ipotesi del teorema di Liouville: il problema ha tre gradi di libertà, ed esistono tre costanti del moto con parentesi di Poisson nulle tra loro: ad es. H, J, J_z. Allora il problema del moto *si riduce al calcolo d'integrali* ("quadrature"). Si dice che il sistema è *integrabile*.

È infatti facile verificare che la conoscenza delle 6 costanti del moto e delle relazioni che le legano alle coordinate originarie r, β, λ permettono di trovare la dipendenza dal tempo di queste.

Il problema dei due corpi ha poi un'altra particolarità: le orbite (ellittiche) sono *chiuse*, il che vuol dire che il moto è *periodico*: tutte e tre le coordinate variano periodicamente nel tempo, con lo stesso periodo. Questa non è la condizione generale per un sistema integrabile: di solito accade che compaiano più periodi, in numero anche pari al numero di gradi di libertà.

Quando i periodi indipendenti sono meno del numero dei gradi di libertà si parla di *degenerazione*; si dimostra che la degenerazione è connessa con la possibiltà di scegliere in più di un modo le tre costanti del moto del teorema di Liouville. Nel nostro caso la (doppia) degenerazione dipende dal poter prendere J_x o J_y in luogo di J_z, e poi dall'esistenza del vettore di Lenz: infatti si può verificare che un'altra scelta possibile è H, J_z, L_z (e analoghe in altre direzioni).

Nel seguito, quando useremo la teoria di H–J per studiare le perturbazioni al problema dei due corpi, avremo modo di verificare come le perturbazioni risolvano di solito la degenerazione, e potremo constatare il conseguente effetto sulle orbite.