

M2. Determinazione dell'orbita da tre osservazioni

Introduzione

Vedremo ora come si possono ricavare dalle osservazioni gli elementi dell'orbita di un pianeta. Il problema è complicato per due ragioni:

- le osservazioni sono fatte dalla Terra (geocentriche)
- solo la posizione del pianeta sulla sfera celeste (due angoli) è facilmente determinabile, mentre la sua distanza è sconosciuta.

Poiché gli elementi orbitali sono 6, è chiaro che occorrono tre osservazioni a tempi diversi t_1, t_2, t_3 , che daranno ad es. α e δ del pianeta a quei tre istanti. Avremo allora:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1(i, \psi, \chi, a, e, \varphi_0; t_1) \\ \delta_1 &= \delta_1(\dots; t_1) \\ \alpha_2 &= \alpha_2(\dots; t_2) \\ \delta_2 &= \delta_2(\dots; t_2) \\ \alpha_3 &= \alpha_3(\dots; t_3) \\ \delta_3 &= \delta_3(\dots; t_3).\end{aligned}\tag{M2.1}$$

Si tratta dunque di risolvere il sistema di 6 equazioni (M2.1), il che è tutt'altro che facile, soprattutto data la presenza di un'equazione implicita (M1–14). Occorre perciò ricorrere a un procedimento numerico.

Questo problema ebbe grande importanza tra la fine del 18-mo secolo e gli inizi del 19-mo: anni in cui si passò dalla scoperta di Urano (1781) a quella del primo asteroide (Cerere, 1801) poi via via a molti altri. Il problema occupò pertanto i maggiori astronomi e matematici del tempo, e la soluzione più completa e generale fu data da Gauss e pubblicata nel 1809 nel classico libro *Theoria motus corporum coelestium* ...

Sebbene ai nostri tempi la soluzione di problemi del genere sia stata enormemente facilitata dall'uso dei calcolatori elettronici, i metodi sviluppati allora ne costituiscono ancora la base, ed è perciò utile conoscerne almeno le linee generali.

Un metodo frequentemente usato in questi casi è quello per approssimazioni successive (*iterazione*), in cui la conoscenza di una soluzione approssimata consente di ottenerne una più corretta. Quando questo accade, e quando la successione delle approssimazioni ha un limite, il metodo iterativo si dice *convergente* e ciò rappresenta una condizione necessaria per lo scopo voluto. In pratica, tra diversi metodi che si possono escogitare sarà migliore quello che mostra una convergenza più rapida, cioè quello che richiede un minor numero d'iterazioni.

Anche per il nostro specifico problema sono stati messi a punto diversi procedimenti iterativi. Qui ne presentiamo due: uno dovuto a Laplace, l'altro a Gauss; il primo di derivazione più semplice, ma applicabile solo nei casi in

cui i tre istanti t_1, t_2, t_3 siano vicini ed equidistanti, il secondo alquanto più complesso, ma di applicazione generale e convergenza assai rapida. Come già detto in precedenza, ci limitiamo a discutere il caso di orbite ellittiche.

La fig. M2-1 mostra le notazioni che verranno usate:

$\vec{\varrho}_i$ posizioni geocentriche del Sole nei tre istanti di osservazione ($i = 1, 2, 3$); questi vettori si suppongono noti in quanto ricavabili dalle effemeridi del Sole (che danno anche le coordinate cartesiane)

\vec{u}_i direzioni geocentriche dell'oggetto in esame, ricavabili immediatamente dalle coordinate (angolari) osservate

$r'_i = |\vec{r}'_i|$ sono le distanze geocentriche, che non si ottengono direttamente dalle osservazioni, ma si troveranno come risultato secondario del calcolo

\vec{r}_i (posizioni eliocentriche) sono le incognite principali del problema.

Il metodo di Laplace

Supponiamo che le tre osservazioni siano state fatte in tempi abbastanza vicini: ciò permetterà di ottenere senza troppo errore i valori della velocità e dell'accelerazione, trascurando infinitesimi di ordine superiore al secondo nel tempo. Per la stessa ragione, invece di $\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, \vec{\varrho}_3$ consideriamo noti $\vec{\varrho}, \dot{\vec{\varrho}}$ e $\ddot{\vec{\varrho}}$, anch'essi ricavabili dalle effemeridi.

Nelle ipotesi fatte, e ponendo $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$, avremo:

$$\dot{\vec{u}}_2 = \frac{\vec{u}_3 - \vec{u}_1}{2\Delta t}, \quad \ddot{\vec{u}}_2 = \frac{\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3}{\Delta t^2}.$$

Questo si può vedere con lo sviluppo in serie di Taylor di \vec{u} intorno a \vec{u}_2 :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 - \dot{\vec{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{u}}_2 \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \dot{\vec{u}}_2 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{u}}_2 \Delta t^2 + O(\Delta t^3).$$

Supporremo dunque noti $\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}$. Il nostro problema sarà risolto quando avremo trovato \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$.

Procediamo come segue: derivando due volte rispetto al tempo la relazione

$$r' \vec{u} = \vec{\varrho} + \vec{r} \tag{M2.2}$$

e usando l'equazione del moto (M1-2) otteniamo

$$\ddot{r}' \vec{u} + 2\dot{r}' \dot{\vec{u}} + r' \ddot{\vec{u}} = \ddot{\vec{\varrho}} - k^2 \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{M2.3}$$

nella quale, ponendo $\vec{r} = r' \vec{u} - \vec{\varrho}$, restano tre incognite: r', \dot{r}', \ddot{r}' .

M2-2

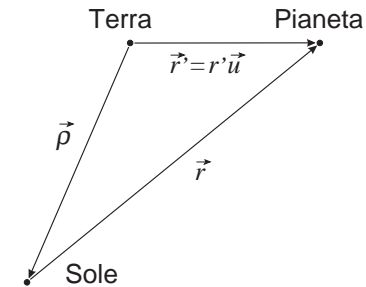


Fig. M2-1

Per farne sparire due si moltiplica scalarmente la (M2.3) per il vettore $\vec{v} = \vec{u} \times \dot{\vec{u}}$. Allora:

$$r'(\ddot{\vec{u}} \cdot \vec{v}) = \ddot{\vec{\varrho}} \cdot \vec{v} - \frac{k^2}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{v}. \quad (\text{M2.4})$$

Facendo lo stesso nella relazione di partenza (M2.2):

$$r'(\vec{u} \cdot \vec{u} \times \dot{\vec{u}}) = \vec{\varrho} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{\varrho} \cdot \vec{v} = -\vec{r} \cdot \vec{v}.$$

Si sostituisce nella (M2.4), ponendo per brevità

$$\tau = \vec{v} \cdot \ddot{\vec{u}} = \vec{u} \times \dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{u}}$$

e si arriva a

$$r' = \frac{1}{\tau} (\vec{v} \cdot \ddot{\vec{\varrho}}) + \frac{k^2}{\tau r^3} (\vec{v} \cdot \vec{\varrho}). \quad (\text{M2.5})$$

A questo punto potremmo sostituire la (M2.5) nella (M2.2), ma otterremmo un'equazione

$$\vec{r} = \frac{1}{\tau} (\vec{v} \cdot \ddot{\vec{\varrho}}) \vec{u} + \frac{k^2}{\tau r^3} (\vec{v} \cdot \vec{\varrho}) \vec{u} - \vec{\varrho}$$

che non si risolve con metodi elementari. Convieni allora procedere per iterazione.

Se il pianeta è abbastanza lontano dal Sole, r è grande e nella (M2.5) il termine proporzionale a $1/r^3$ è trascurabile rispetto al resto: ciò è come porre in partenza $r = \infty$. Si ricava così un valore r'_1 di r' , e anche \vec{r}'_1 . Dalla (M2.2) si troverà in corrispondenza un certo \vec{r}_1 . Posto questo nuovo valore al posto di \vec{r} nella (M2.5) si ottiene una seconda approssimazione r'_2 , poi \vec{r}'_2 , ecc. Se r è grande il procedimento converge e fornisce \vec{r} (e anche \vec{r}') all'istante t_2 .

Per determinare l'orbita occorrono però 6 elementi. Sarebbe utile la conoscenza di $\vec{J} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ (o meglio di \vec{J}/μ). Per trovare $\dot{\vec{r}}$ si riparte dalla (M2.3), moltiplicando stavolta per $\dot{\vec{u}}$. Allora:

$$\ddot{r}'(\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}) + 2\dot{r}' |\dot{\vec{u}}|^2 + r'(\dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{u}}) = \dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{\varrho}} - \frac{k^2}{r^3} (\dot{\vec{u}} \cdot \vec{r})$$

$$2\dot{r}' |\dot{\vec{u}}|^2 + r'(\dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{u}}) = \dot{\vec{u}} \cdot \ddot{\vec{\varrho}} + \frac{k^2}{r^3} (\dot{\vec{u}} \cdot \vec{\varrho})$$

($\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 0$ perché \vec{u} è un versore). Questa dà \dot{r}' ; ricordando poi che

$$\dot{\vec{r}} = r' \vec{u} + r \dot{\vec{u}} - \vec{\varrho}$$

si determina $\dot{\vec{r}}$.

Trovati \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ si ricavano subito \vec{J} , E , \vec{L} e tutti i parametri del moto. Naturalmente per applicare questo metodo occorrerà sempre controllare a posteriori la validità delle ipotesi semplificative che si sono fatte.

Elementi dell'orbita, noti tre vettori eliocentrici

Come introduzione al metodo di Gauss affrontiamo in via preliminare il problema di calcolare gli elementi dell'orbita di un pianeta essendone note tre posizioni eliocentriche: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.

Faremo uso nel seguito delle seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j &= r_i r_j \cos w_{ij} \\ \vec{r}_i \times \vec{r}_j &= r_i r_j \sin w_{ij} \vec{\kappa}\end{aligned}\tag{M2.6}$$

dove si è posto $w_{ij} = v_j - v_i$, e $\vec{\kappa}$ è il versore del momento angolare del corpo in esame.

Consideriamo il sistema di tre equazioni (M1-8)

$$\frac{p}{r_i} = 1 + e \cos v_i \quad (i = 1, 2, 3)\tag{M2.7}$$

che rappresentano il moto kepleriano ellittico ipotizzato nel nostro calcolo. Poiché gli angoli w_{ij} sono noti tramite le (M2.6), nel sistema (M2.7) si può porre $v_1 = v_2 - w_{12}$ e $v_3 = v_2 + w_{23}$ con che rimangono incognite v_2, p, e .

Visto così il sistema si risolve male; conviene assumere invece come incognite $p, e \cos v_2, e \sin v_2$ per le quali il sistema è lineare. Il risultato si può esprimere in termini dei prodotti degli \vec{r}_i eliminando le funzioni $\sin w_{ij}$ e $\cos w_{ij}$; si arriva così a:

$$\begin{aligned}p &= \frac{\vec{t} \cdot \vec{q}}{q^2} \\ e \cos v_2 &= \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s} \times \vec{q}}{q^2} \\ e \sin v_2 &= \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s}}{q}\end{aligned}\tag{M2.8}$$

dopo aver definito

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 \\ \vec{t} &= r_1 (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + r_2 (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) + r_3 (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \\ \vec{s} &= (r_1 - r_2) \vec{r}_3 + (r_2 - r_3) \vec{r}_1 + (r_3 - r_1) \vec{r}_2.\end{aligned}$$

Si noti che mentre \vec{q} e \vec{t} sono paralleli tra loro e ortogonali al piano dell'orbita, \vec{s} sta in questo piano, come pure $\vec{s} \times \vec{q}$.

Nota: Il caso $e = 0$ richiederebbe una trattazione particolare che viene omessa essendo un caso estremamente improbabile.

Detta $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ una terna ortogonale di versori, dei quali
 $\vec{\alpha}_1$ in direzione del perielio,
 $\vec{\alpha}_2$ ancora nel piano dell'orbita
 $\vec{\alpha}_3$ coincidente con $\vec{\kappa}$,

si ha immediatamente che $\vec{\alpha}_3 = \vec{q}/q = \vec{t}/t$. Dall'esame della fig. M2-2 si ricavano subito le relazioni

$$\cos v_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{\alpha}_1$$

$$\sin v_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{\alpha}_2$$

che confrontate con le ultime due delle (M2.8) danno

$$\frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{\alpha}_1 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s} \times \vec{q}}{e q^2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s} \times \vec{q}}{|\vec{s} \times \vec{q}|} \frac{s}{e q}$$

$$\frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \vec{\alpha}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s}}{e q} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} \cdot \frac{\vec{s}}{s} \frac{s}{e q}$$

da cui si trova

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{\vec{s} \times \vec{q}}{|\vec{s} \times \vec{q}|} \quad \vec{\alpha}_2 = \frac{\vec{s}}{s} \quad e = \frac{s}{q}.$$

Inoltre dalla relazione $p = a(1 - e^2)$ e dalla prima delle (M2.8) si ottiene

$$a = \frac{\vec{q} \cdot \vec{t}}{q^2 - s^2}.$$

La terna $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ così trovata può essere espressa in qualunque sistema di coordinate (ad es. eclittiche): ciò consente di determinare gli angoli i, χ, ψ che definiscono l'orientamento dell'orbita. Risulta

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= \sin i \sin \chi & \alpha_{23} &= \sin i \cos \chi & \alpha_{33} &= \cos i \\ \alpha_{31} &= \sin i \sin \psi & \alpha_{32} &= -\sin i \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{M2.9})$$

avendo indicato con α_{ij} la componente j -ma di $\vec{\alpha}_i$. Le componenti non scritte nelle (M2.9) hanno espressioni complicate e in generale non servono. Fa eccezione il caso $i = 0$, in cui il nodo ascendente non è definito e risulta

$$\alpha_{11} = \cos(\chi + \psi)$$

$$\alpha_{12} = \sin(\chi + \psi)$$

da cui si ricava $\chi + \psi$.

Infine la conoscenza di $v_2 = v(t_2)$ consente di avere $u(t_2)$ e $\varphi(t_2)$, da cui si determina φ_0 .

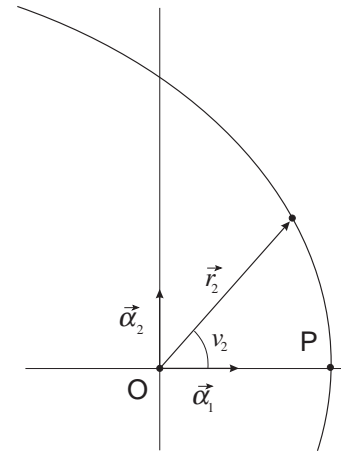


Fig. M2-2

Il metodo di Gauss: relazioni fondamentali

Il prodotto $\vec{r}_2 \times \vec{r}_3$ è parallelo ad $\vec{\alpha}_3$; per caratterizzarlo basta perciò la componente su $\vec{\alpha}_3$, che indicheremo con n_1 . Analogho significato hanno n_2, n_3 . È immediato il significato geometrico di n_1 come doppio dell'area orientata $\text{tr}(\text{SP}_2\text{P}_3)$ del triangolo SP_2P_3 (fig. M2-3); analogamente risulta che

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2 \text{tr}(\text{P}_1\text{P}_2\text{P}_3).$$

Si dimostra facilmente che

$$\sum_{i=1}^3 n_i \vec{r}_i = 0. \quad (\text{M2.10})$$

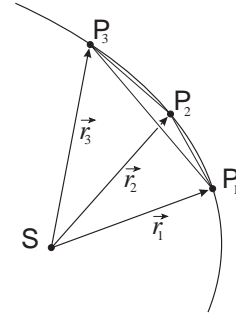


Fig. M2-3

Ad esempio si può far vedere che il prodotto scalare del vettore $\sum n_i \vec{r}_i$ con \vec{r}_1 e \vec{r}_2 è nullo, facendo uso delle (M2.6); ciò è sufficiente perché il vettore in esame è nel piano dell'orbita e \vec{r}_1, \vec{r}_2 sono due vettori indipendenti di questo piano. Ricordando che

$$\vec{r}_i = r'_i \vec{u}_i - \vec{\varrho}_i \quad (\text{M2.11})$$

la (M2.10) può risciversi

$$\sum_i n_i r'_i \vec{u}_i = \sum_i n_i \vec{\varrho}_i \quad (\text{M2.12})$$

che è un sistema di tre equazioni (una per componente) in cui gli n_i e r'_i sono incogniti, mentre \vec{u}_i e $\vec{\varrho}_i$ sono vettori noti. In questi termini il sistema non è risolvibile; quello che faremo invece sarà di dare un valore approssimato agli n_i e usare il sistema (M2.12) per ricavare gli r'_i e quindi gli \vec{r}_i , iterando con valori sempre migliori degli n_i .

Se si danno per noti gli n_i il sistema, essendo lineare, si risolve banalmente; moltiplicandone i due membri scalarmente per $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3$ si trova subito

$$r'_1 = \sum_i \frac{n_i}{n_1} \sigma_{1i} \quad (\text{M2.13})$$

con

$$\sigma_{1i} = \frac{\vec{\varrho}_i \cdot \vec{u}_2 \times \vec{u}_3}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \times \vec{u}_3} \quad (\text{M2.14})$$

e analoghi per r'_2, r'_3 (notare che le σ_{ij} si possono calcolare una volta per tutte, essendo espresse in termini di grandezze note).

Per definire i valori n_i (anzi due di questi, in quanto nel sistema (M2.12) intervengono solo i loro rapporti) Gauss usa due nuove variabili P e Q legate agli n_i da

$$P = \frac{n_1}{n_3} \quad Q = -2r_2^3 \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_2} \quad (\text{M2.15})$$

M2-6

che invertite danno

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= -\frac{P}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) \\ \frac{n_3}{n_2} &= -\frac{1}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right). \end{aligned} \quad (\text{M2.16})$$

Nelle (M2.16) compare r_2 , che è soluzione dell'equazione

$$r_2 = \left| \vec{q}_2 + \left\{ \frac{1}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r_2^3}\right) (P \sigma_{21} + \sigma_{23}) - \sigma_{22} \right\} \vec{u}_2 \right| \quad (\text{M2.17})$$

ottenuta sostituendo le (M2.16) nell'espressione di r'_2 – analoga alla (M2.13) – e questa nella (M2.11); la (M2.17) è un'equazione per r_2 che si risolve con uno dei metodi numerici standard per la ricerca degli zeri di una funzione.

Scelta dei valori iniziali

Le variabili P e Q hanno il pregio che se ne riesce a dare un valore iniziale già molto buono analizzando il problema da un punto di vista geometrico. Per quanto riguarda P , consideriamo che le aree dei triangoli SP_1P_2 e SP_2P_3 differiscono da quelle dei settori di ugual nome per termini di terz'ordine nelle differenze $v_2 - v_1$ e $v_3 - v_2$. Inoltre per la seconda legge di Keplero le aree dei settori sono proporzionali ai tempi impiegati a spazzarle: avremo dunque

$$P = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\text{tr}(SP_2P_3)}{\text{tr}(SP_1P_2)} \simeq \frac{\text{sett}(SP_2P_3)}{\text{sett}(SP_1P_2)} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}.$$

Se gli intervalli di tempo sono abbastanza piccoli (rispetto a un periodo) questo è dunque un buon valore iniziale per P .

Consideriamo poi il triangolo $Q_1Q_2Q_3$ corrispondente a $P_1P_2P_3$ sul cerchio podario (cerchio circoscritto all'ellisse, fig. M2-4). Sappiamo che

$$\frac{\text{tr}(Q_1Q_2Q_3)}{\text{tr}(P_1P_2P_3)} = \frac{a}{b}$$

e inoltre l'angolo al centro dell'arco $\widehat{Q_iQ_j}$ è $u_j - u_i$ (differenza delle anomalie eccentriche, fig. M2-1). Se questa differenza è piccola vale la relazione

$$u_j - u_i = \frac{a}{r} (\varphi_j - \varphi_i) \quad (\text{M2.18})$$

M2-7

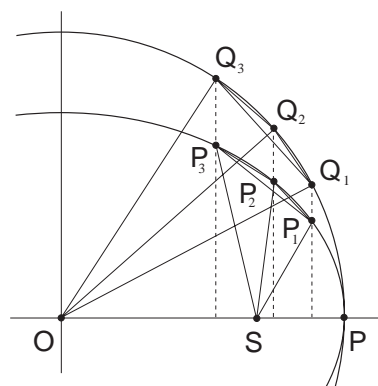


Fig. M2-4

che si ottiene differenziando la (M1-14) e usando la (M1-10). Possiamo allora scrivere

$$Q = -2r_2^3 \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_2} = -2r_2^3 \frac{\text{tr}(P_1 P_2 P_3)}{\text{tr}(SP_3 P_1)} = 2r_2^3 \frac{b}{a} \frac{\text{tr}(Q_1 Q_2 Q_3)}{\text{tr}(SP_1 P_3)}$$

$$\simeq \frac{2r_2^3 b}{a \text{sett}(SP_1 P_3)} \text{tr}(Q_1 Q_2 Q_3)$$

avendo fatto la stessa approssimazione di prima. Ancora per la legge delle aree è $\text{sett}(SP_1 P_3) = \frac{1}{2} ab (\varphi_3 - \varphi_1)$, mentre resta da esprimere $\text{tr}(Q_1 Q_2 Q_3)$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_1 Q_2 Q_3) &= [\text{sett}(OQ_1 Q_3) - \text{tr}(OQ_1 Q_3)] - [\text{sett}(OQ_1 Q_2) - \text{tr}(OQ_1 Q_2)] - \\ &\quad [\text{sett}(OQ_2 Q_3) - \text{tr}(OQ_2 Q_3)] \\ &= \left[\frac{1}{2} a^2 (u_3 - u_1) - \frac{1}{2} a^2 \sin(u_3 - u_1) \right] - \dots \end{aligned}$$

Sviluppando $\sin \Delta n$, a meno di termini del quinto ordine si ottiene

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_1 Q_2 Q_3) &\simeq \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{6} (u_3 - u_1)^3 - \frac{1}{6} (u_2 - u_1)^3 - \frac{1}{6} (u_3 - u_2)^3 \right] \\ &= \frac{1}{4} a^2 (u_2 - u_1) (u_3 - u_2) (u_3 - u_1) \\ &= \frac{a^5}{4r_2^3} (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_3 - \varphi_2) (\varphi_3 - \varphi_1) \end{aligned}$$

per la (M2.18), avendo assunto r_2 come valor medio di r nell'intervallo considerato. Concludendo:

$$Q = a^3 (\varphi_2 - \varphi_1) (\varphi_3 - \varphi_2) = k^2 (t_2 - t_1) (t_3 - t_2).$$

Abbiamo così giustificato la scelta dei valori iniziali per P e Q :

$$P_0 = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \tag{M2.19}$$

$$Q_0 = k^2 (t_2 - t_1) (t_3 - t_2).$$

Iterazione

L'iterazione procede in questo modo: determinati col procedimento già visto gli elementi (approssimati) dell'orbita, si possono ricalcolare da questi i tempi relativi alle tre posizioni dell'oggetto. Questi non coincideranno con quelli di osservazione, in quanto per P e Q si sono usati dei valori approssimati. Si può mostrare che, indicando con l'apice i tempi calcolati, una migliore approssimazione per P e Q si otterrà ponendo

$$P_1 = P_0 \left(\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \right) : \left(\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \right)'$$

$$Q_1 = Q_0 \frac{(t_2 - t_1) (t_3 - t_2)}{(t_2 - t_1)' (t_3 - t_2)'}. \tag{M2.20}$$

Il procedimento può essere ripetuto fino a ottenere l'approssimazione desiderata alla soluzione esatta.

Nello schema seguente è riassunta per blocchi la procedura complessiva.

