O9. Introduzione all'ottica ondulatoria

Le approssimazioni dell'ottica

Il nostro studio dell'ottica fino a questo punto è stato basato sull'ottica geometrica, salvo un breve cenno alla diffrazione al Cap. O1. Vogliamo ora approfondire lo studio delle proprietà ondulatorie della luce, allo scopo di giustificare i risultati già citati sulla diffrazione, e più in generale di spiegare dove e quando l'approssimazione dell'ottica geometrica cada in difetto nelle condizioni che più c'interessano: nel funzionamento degli strumenti astronomici.

La tabella qui sotto mostra vari gradi di approssimazione allo studio della luce (delle onde e.m.). Discutiamo significato e limiti di queste approssimazioni.

O1. Equazioni di Maxwell (campo e.m.)
O2. Approssimazione delle onde scalari
O3. Approssimazione di Huygens–Fresnel (diffrazione elementare)
O4. Ottica geometrica (principio di Huygens, iconale, raggi)
O5. Appross. di Gauss (sistemi ottici centrati parassiali)

Una trattazione teorica largamente sufficiente ai nostri scopi si riassume nelle *equazioni di Maxwell*, le quali descrivono un'onda e.m. mediante due campi vettoriali $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (se il mezzo è un dielettrico isotropo, da questi si ottengono anche $\vec{D}$ e $\vec{H}$ con le note equazioni di collegamento $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. Tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ saranno in generale funzioni del punto e del tempo: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e analoga per $\vec{B}$.

La rappresentazione complessa

Prima di esaminare il caso generale, consideriamo il caso di un'onda *monocromatica*: ciò vuol dire che tutte le componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ sono funzioni sinusoidali del tempo con una stessa frequenza:

$$E_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

e analoghe (A e B saranno ancora funzioni di $\vec{r}$, ma ciò per il momento non interessa). Conviene usare la *rappresentazione complessa* dell'onda, consistente in questo: poniamo

$$\tilde{E}_x = (A + iB)\,e^{-i\omega t} = C e^{-i\omega t}.$$

Si vede subito che $E_x = \Re \tilde{E}_x$ per cui noto $\tilde{E}_x$ si calcola facilmente anche E_x. Ma è vero anche il viceversa: noto E_x sono noti A e B e quindi anche $\tilde{E}_x$. Dunque $\tilde{E}_x$ contiene tutte e sole le informazioni sull'onda contenute in E_x, e perciò ne dà una rappresentazione equivalente, ma come vedremo formalmente più comoda. Inoltre, posto $C = |C| e^{i\varphi}$ si ha $E_x = |C| \cos(\omega t - \varphi)$: l'argomento di C è la *fase* dell'onda.

Un concetto importante dell'ottica è quello di *intensità* di un'onda. Nei casi che c'interessano più da vicino l'intensità di un'onda e.m. si dimostra essere proporzionale a $n\langle|\vec{E}|^2\rangle$, dove n è l'indice di rifrazione del mezzo, e $\langle|\vec{E}|^2\rangle$ è la media temporale del quadrato del modulo del campo elettrico, cioè

$$I \propto n\left(\langle E_x^2\rangle + \langle E_y^2\rangle + \langle E_z^2\rangle\right).$$

Consideriamo ora:

$$\begin{aligned}\langle E_x^2\rangle &= \langle (A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2\rangle \\ &= A^2\langle\cos^2\omega t\rangle + B^2\langle\sin^2\omega t\rangle + 2AB\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}(A^2+B^2) = \tfrac{1}{2}|C|^2 = \tfrac{1}{2}|\tilde{E}_x|^2.\end{aligned}$$

Si vede dunque che $\tilde{E}_x$ rappresenta bene l'onda anche da un punto di vista energetico.

Se ora lasciamo l'ipotesi che l'onda sia monocromatica, e pensiamo ad esempio a due frequenze diverse, non è difficile verificare che le relazioni scritte valgono ancora, e che perciò è sempre

$$I \propto \sum n\left(|\tilde{E}_x|^2 + |\tilde{E}_y|^2 + |\tilde{E}_x|^2\right)$$

la somma essendo fatta sulle varie componenti monocromatiche.

Da questo momento adotteremo sistematicamente la rappresentazione complessa, e non useremo più la tilde (˜) per distinguerla.

È ancora necessario soffermarsi sulla terminologia connessa con la rappresentazione complessa. Il termine "ampiezza" potrà indicare a seconda dei casi:

a) l'intera $E_x(\vec{r}, t)$;

b) per un'onda monocromatica della forma $E_x = C(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$, il fattore $C(\vec{r})$;

c) sempre un'onda monocromatica, il suo modulo $|C(\vec{r})|$;

d) per onde piane (v. più avanti) $E_x = C\, e^{i(n\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ *la costante complessa* C;

e) sempre per le onde piane, il modulo $|C|$ di C (caso particolare di (*c*)).

Analoga molteplicità di significati si ha per il termine “fase,” che può stare a significare:

a) l'argomento della funzione complessa $E_x(\vec{r},t)$: fase dipendente da $\vec{r}$ e da t;

b) per un'onda monocromatica $E_x = C(\vec{r})\,e^{-i\omega t}$, l'argomento di $C(\vec{r})$;

c) per un'onda $E_x = A(\vec{r})\,e^{i(kW(\vec{r})-\omega t)}$, l'espressione $kW(\vec{r})$ (caso particolare di (*b*));

d) per un'onda piana $E_x = C\,e^{i(n\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, l'argomento di $C\,e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (ancora caso particolare di (*b*));

e) sempre per un'onda piana, l'argomento di C.

Quando il significato non sia chiaro nel contesto, lo indicheremo con la lettera corrispondente dell'elenco qui sopra.

L'equazione di Helmholtz

Nella teoria di Maxwell si dimostra che *in un mezzo omogeneo* ciascuna componente di $\vec{E}$ soddisfa l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 E_x - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ecc.} \qquad (n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}})$$

che per onde monocromatiche si semplifica, perché $\partial E_x/\partial t = -i\omega E_x$:

$$\nabla^2 E_x + n^2 k^2 E_x = 0 \qquad (k = \omega/c).$$

Questa si chiama *equazione di Helmholtz.*

Poiché l'equazione delle onde è lineare omogenea, lo studio delle onde monocromatiche è sufficiente, dal momento che qualunque funzione di t (a rigore ogni funzione di $L^1(\mathbb{R})$) può essere sviluppata in integrale di Fourier. Ci restringeremo perciò alle onde monocromatiche e all'equazione di Helmholtz. Per semplicità di scrittura sottintenderemo sempre il fattore $e^{-i\omega t}$.

Tutte le componenti di $\vec{E}$ soddisfano la stessa equazione: tuttavia in generale le tre componenti sono necessarie perché non sono per esse identiche le *condizioni al contorno.*

Ad esempio se esiste una superficie di separazione ortogonale all'asse x, dovranno essere continue E_y ed E_z ma non E_x. Questo ha la conseguenza fisica che se sulla superficie incide obliquamente un'onda, le componenti di $\vec{E}$ parallele e perpendicolari alla superficie verranno trattate in maniera diversa sia nella riflessione, sia nella rifrazione: le onde riflesse e rifratte sono *polarizzate* (ma la polarizzazione resterà fuori dal nostro discorso).

Altro esempio è quello di un *reticolo*, cioè di una superficie metallica sulla quale siano incisi tanti solchi paralleli: la componente di $\vec{E}$ parallela ai solchi non si comporta in generale come quella perpendicolare.

A parte questi casi un po' speciali, vi è però un largo ambito di fenomeni nei quali le varie componenti di $\vec{E}$ si comportano in modi equivalenti (oppure la differenza non produce conseguenze significative): in tutti questi casi è inutile portarsi dietro tre equazioni, e una sola grandezza scalare descrive a sufficienza l'onda. Siamo così arrivati all'approssimazione O.2: *onde scalari* (monocromatiche) descritte dall'equazione di Helmholtz

$$\nabla^2 E + n^2 k^2 E = 0. \tag{O9.1}$$

Qui E rappresenta un campo scalare, che volendo però può essere visto come una delle tre componenti di $\vec{E}$.

L'equazione delle onde (e quindi anche l'equazione di Helmholtz che ne è conseguenza) vale esattamente per un mezzo omogeneo. Non è difficile convincersi che essa vale come approssimazione per un mezzo *quasi omogeneo*, cioè quando l'indice di rifrazione varia di poco entro una lunghezza d'onda. Questo è sufficiente per i nostri scopi, salvo quando si abbia a che fare con specchi o superfici di lenti. Senza dimostrarlo, osserviamo che le conseguenze che ricaveremo possono però essere giustificate anche in questi casi.

L'equazione di Helmholtz possiede naturalmente infinite soluzioni, tra le quali vogliamo ora discuterne alcune, particolarmente significative.

Onde piane

Se $\vec{k}$ è un vettore di modulo k, si può verificare che

$$E = C e^{in\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (C \text{ costante complessa}) \tag{O9.2}$$

soddisfa la (O9.1). Una soluzione di questo tipo si chiama *onda piana* di vettore di propagazione $\vec{k}$ e ampiezza C. Per comprendere la denominazione, osserviamo che se $\alpha = \arg C$, la fase dell'onda è $\varphi = n\vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha$ ed è quindi costante sui piani ortogonali a $\vec{k}$. Si vede che φ cambia di 2π quando la distanza fra i piani è $\lambda = 2\pi/(nk)$ (*lunghezza d'onda*). Se ricordiamo poi il fattore sottinteso $e^{-i\omega t}$, l'esponente completo diventa $n\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha$: presi due istanti separati di Δt avremo lo stesso E ai due istanti in due punti la cui separazione (vettoriale) soddisfi

$$n\vec{k}\cdot\Delta\vec{r} = \omega\Delta t.$$

Quest'equazione individua un piano (fig. O9–1) perpendicolare a $\vec{k}$ e distante dal primo punto di

$$\frac{\omega}{nk}\,\Delta t.$$

La configurazione dell'onda avanza dunque nella direzione e verso di $\vec{k}$, con velocità c/n (*velocità di fase* dell'onda).

L'importanza delle onde piane sta in primo luogo nel fatto che esse rappresentano la luce emessa da sorgenti puntiformi all'infinito; ma il motivo più profondo è nella generalità del risultato già visto per le soluzioni monocromatiche: "qualunque" soluzione dell'equazione delle onde può essere scritta come integrale di Fourier su $\vec{k}$, ossia sovrapposizione di onde piane (monocromatiche).

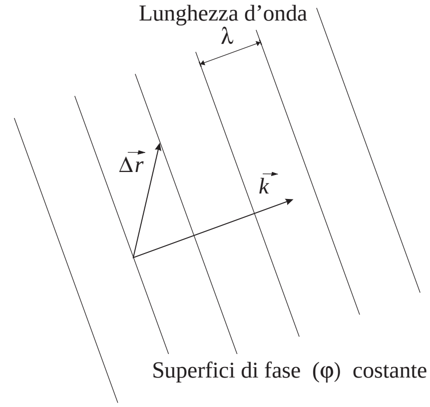

Fig. O9-1

Riflettiamo un momento sul significato matematico di quest'asserzione. Dall'essere l'equazione delle onde lineare omogenea, segue che l'insieme delle sue soluzioni è uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$, che però è a dimensione infinita. I risultati validi per gli spazi a dimensione finita non si possono tutti trasportare banalmente al caso di dimensione infinita, e questo è in particolare il caso del concetto di *base* dello spazio: perciò il teorema accennato non è ovvio, e il suo significato va precisato con certe cautele. A noi basti aggiungere questo: una larga classe di soluzioni dell'equazione delle onde (non tutte, ma praticamente tutte quelle che interessano) possono essere approssimate quanto si vuole da una combinazione lineare di onde piane.

Onde sferiche

L'utilità delle onde piane non esclude l'utilità di altre soluzioni: una classe molto importante è la seguente:

$$E = C\,\frac{e^{ink|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}. \tag{O9.3}$$

Nota: A rigore la (O9.3) soddisfa la (O9.1) in tutto lo spazio a eccezione del punto $\vec{r}_0$ (punto singolare): la situazione è del tutto analoga a quella del potenziale elettrostatico di una carica puntiforme.

Questa volta le superfici di fase costante sono sfere con il centro in $\vec{r}_0$; lo studio della dipendenza da t mostra che l'onda avanza in direzione radiale, sempre con velocità c/n. Si tratta dunque di un'*onda sferica* uscente da $\vec{r}_0$. A differenza dell'onda piana, l'onda sferica non ha ampiezza (c) costante in tutto lo spazio: l'ampiezza è *inversamente proporzionale* alla distanza dalla sorgente. Ne segue che l'intensità è inversamente proporzionale al *quadrato della distanza*, il che è ragionevole in base alla conservazione dell'energia: al crescere della distanza l'onda investe un'area proporzionale al quadrato della distanza e perciò la sua energia, che si ripartisce su un'area maggiore, dà luogo a un'intensità proporzionalmente minore.

È ben chiaro che la (O9.3) descrive la luce emessa da una sorgente puntiforme al finito.

L'approssimazione dell'ottica geometrica

Esistono tecniche per dare soluzioni dell'equazione di Helmholtz in condizioni diverse da quelle fin qui considerate, ma non avremo bisogno di occuparcene. Va però accennato che da una di queste tecniche, che porta alla cosiddetta "forma integrale di Kirchhoff," segue un'approssimazione di cui ci serviremo: l'*approssimazione di Huygens–Fresnel* O3. A questo argomento sarà dedicato il prossimo capitolo.

Riesce utile in generale, per studiare l'equazione di Helmholtz, separare in E modulo e argomento (che saranno in genere entrambe funzioni di $\vec{r}$) nella forma:

$$E = A(\vec{r})\, e^{ikW(\vec{r})}.$$

Sostituendo nella (O9.1), calcolando le derivate richieste da ∇^2 e cancellando il fattore comune e^{ikW}, risulta l'equazione:

$$\nabla^2 A + 2ik\, \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} W + ikA\, \nabla^2 W - k^2 A\, |\vec{\nabla} W|^2 + n^2 k^2 A = 0. \qquad \text{(O9.4)}$$

Poiché A e W sono reali, la (O9.4) si scompone in due, una per la parte reale e una per la parte immaginaria:

$$\nabla^2 A - k^2 A\, |\vec{\nabla} W|^2 + n^2 k^2 A = 0 \qquad \text{(O9.5)}$$

$$2\, \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} W + A\, \nabla^2 W = 0. \qquad \text{(O9.6)}$$

Discutiamo prima la (O9.6). Moltiplicandola per A si verifica facilmente che essa equivale a:

$$\vec{\nabla} \cdot (A^2\, \vec{\nabla} W) = 0 \qquad \text{(O9.7)}$$

cioè il vettore $A^2\, \vec{\nabla} W$ ha divergenza nulla. Il suo flusso è dunque costante in un tubo formato dalle linee di $\vec{\nabla} W$, e l'interpretazione è immediata: $A^2\, \vec{\nabla} W$ rappresenta la corrente di energia dell'onda (il suo modulo è l'intensità) e quando le linee di $\vec{\nabla} W$ divergono, l'intensità diminuisce (fig. O9–2).

La (O9.5) si può scrivere:

$$|\vec{\nabla} W|^2 - n^2 = \frac{1}{k^2}\, \frac{\nabla^2 A}{A} \qquad \text{(O9.8)}$$

e questa, se il secondo membro può essere trascurato, si semplifica in

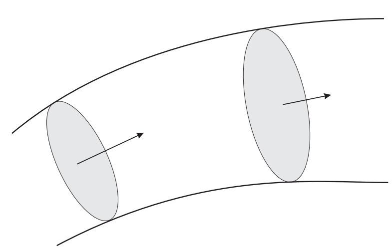

Fig. O9-2

$$|\vec{\nabla} W|^2 = n^2$$

che è l'equazione dell'iconale (O2.13), da cui la scelta del simbolo W. Esiste dunque un'approssimazione, che ora discuteremo, nella quale la fase dell'onda coincide (a parte il fattore k) con l'iconale dell'ottica geometrica: è questa l'*approssimazione dell'ottica geometrica* O4.

L'approssimazione dell'ottica geometrica sarà valida quando

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \ll n^2 k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2. \tag{O9.9}$$

Questo è certamente vero per un'onda piana, in cui A è costante, ma anche in un'onda sferica, dove

$$A = \frac{C}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

ha laplaciano nullo. Tolti questi casi semplici, la validità della (O9.9) si può esprimere solo qualitativamente, come segue. $\nabla^2 A$ contiene le derivate seconde di A; ma una derivata seconda si può scrivere approssimativamente:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

(la relazione è esatta per $h \to 0$). Posto $h = \lambda/2\pi$, avremo dalla (O9.9)

$$\left|\frac{A(x+h) - 2A(x) + A(x-h)}{h^2 A}\right| \ll \frac{1}{h^2}$$

$$|A(x+h) - 2A(x) + A(x-h)| \ll |A(x)|$$

cioè la differenza seconda di A su un intervallo $\lambda/2\pi$ dev'essere molto piccola rispetto ad A. Detto in termini meno precisi, ma più facili da ricordare: *A deve variare poco entro una lunghezza d'onda.*

Vediamo due casi importanti in cui l'approssimazione dell'ottica geometrica non può valere.

1. Se un'onda piana incide su uno schermo opaco con un foro, l'ottica geometrica richiede che al di là del foro ci sia una netta separazione tra la regione illuminata e l'ombra (fig. O9–3). Se così fosse, al confine tra luce e ombra l'intensità passerebbe bruscamente da un valore non nullo a zero, e quindi la (O9.9) non sarebbe soddisfatta, com'è invece richiesto perché valga l'ottica geometrica. Ciò vuol dire che in realtà il confine tra luce e ombra non sarà netto,

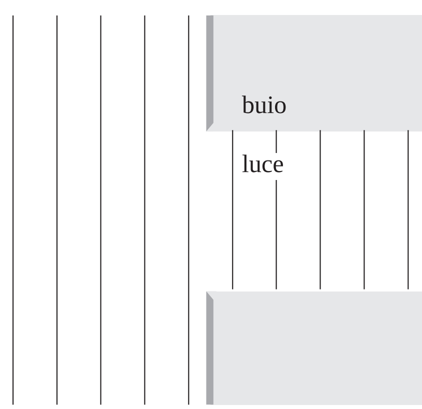

Fig. O9-3

ma un po' di luce arriverà anche nella zona d'ombra geometrica: è questa la *diffrazione*.

2. Se una lente senza aberrazioni focalizza un'onda piana nel suo fuoco (fig. O9–4), nella regione del fuoco l'intensità diventa grandissima (infinita nel fuoco), mentre è zero appena fuori dell'asse ottico sul piano focale. Di nuovo questo contraddice la (O9.9), e dobbiamo aspettarci che intorno al fuoco geometrico ci sia una regione illuminata *dell'ordine della lunghezza d'onda*. Abbiamo già usato questo fatto, che più avanti dimostreremo.

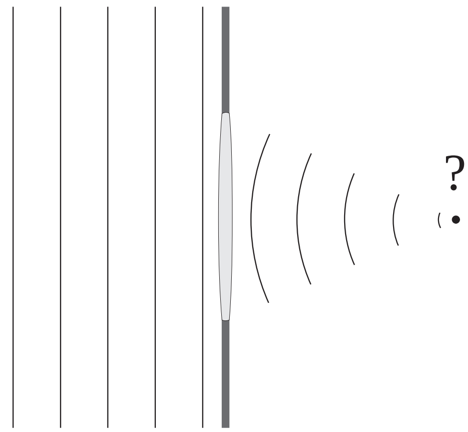

Fig. O9-4

Dalla discussione che precede è chiaro che l'approssimazione dell'ottica geometrica è tanto meglio soddisfatta, a parità di altre condizioni, quanto più grande è nk, cioè quanto più piccola è λ: si tratta dunque di un'approssimazione delle *piccole lunghezze d'onda.*

Il principio di Huygens

Vogliamo ora discutere più a fondo l'equazione dell'iconale, nella sua relazione con la fase dell'onda. Lungo un raggio, definito come la curva tangente a $\vec{\nabla} W$, si ha $dW/ds = n$ da cui $ds = dW/n$ (fig. O9–5).

La fase (a) dell'onda è $\varphi = kW - \omega t$: al passare del tempo avremo φ costante se $k\,dW = \omega\,dt$ cioè se $dW = \omega\,dt/k = c\,dt$. Ne segue $ds = c\,dt/n$, cioè le superfici di fase costante avanzano con velocità $v = c/n$ (risultato già visto per le onde piane). Notare che le superfici di fase costante sono la stessa cosa delle superfici di livello di W: l'onda "fotografata" a un dato t mostrerà la famiglia di superfici $W =$ cost.; "cinematografando" una superficie $\varphi =$ cost. nel corso del tempo, la si vedrà sovrapporsi alle superfici $W =$ cost. una dopo l'altra. Si noti che se il mezzo non è omogeneo, v può variare su una superficie $W =$ cost. e perciò due superfici successive non saranno parallele!

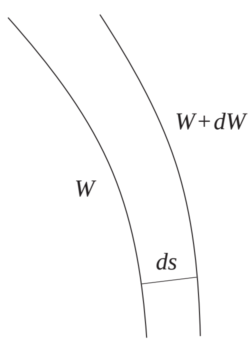

Fig. O9-5

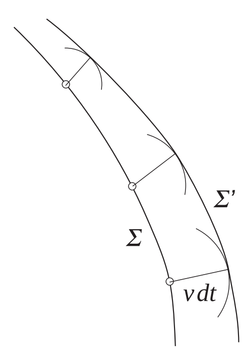

Fig. O9-6

La visione “cinematografica,” cioè cinematica, permette di capire la costruzione di Huygens: data una superficie d’onda Σ al tempo t, costruire la superficie Σ' al tempo $t + dt$. La nuova superficie deve distare in ogni punto di $v\,dt$ dalla precedente: basta perciò costruire tante superfici sferiche di raggio $v\,dt$ con centro su Σ; esse saranno tutte tangenti a Σ', che risulta quindi il loro inviluppo. Queste sfere possono essere interpretate come onde sferiche elementari emesse al tempo t da tutti i punti della superficie Σ, pensati come sorgenti (*principio di Huygens*: fig. O9–6).

È importante aver ben presente che il principio di Huygens è del tutto equivalente all’equazione dell’iconale: pertanto, anche se nel suo enunciato ci parla di onde, esso è valido in realtà nell’approssimazione dell’ottica geometrica. Volendo conoscere oltre alla forma della superficie d’onda, anche l’intensità della luce su questa, si può ricorrere alla (O9.7). Poiché $|\vec{\nabla} W| = n$, la (O9.7) dice che in un tubo costituito da raggi si conserva il flusso di $n\,A^2$:

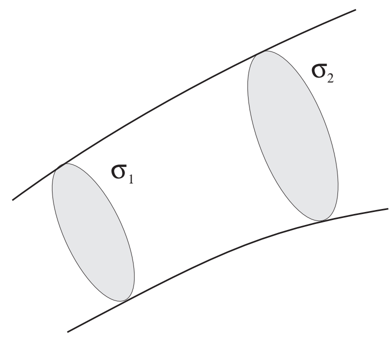

Fig. O9-7

$$n_1 A_1^2 \sigma_1 = n_2 A_2^2 \sigma_2 \qquad \text{(fig. O9–7)}.$$