O8. L'aberrazione cromatica

La dispersione nei mezzi ottici

Fino a questo momento l'indice di rifrazione dei mezzi costituenti il sistema ottico è stato trattato come una costante caratteristica di ciascun mezzo. Ciò è però vero solo finché si usa luce di una ben determinata lunghezza d'onda: infatti per qualunque mezzo diverso dal vuoto è sempre $n = n(\lambda)$ (*dispersione* della luce). Ne segue che le proprietà ottiche del sistema (ad es. la focale) variano in generale con la lunghezza d'onda della luce impiegata: in questo consiste l'*aberrazione cromatica*.

Poiché la dispersione dovuta all'aria è trascurabile, quello che conta è discutere l'aberrazione cromatica dovuta al vetro che costituisce le lenti. Per qualunque vetro trasparente nel visibile, n è funzione decrescente di λ.

Per distinguere i vari tipi di vetro agli effetti della dispersione, si usa convenzionalmente il *numero di Abbe*

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_\text{D} - 1}{n_\text{F} - n_\text{C}}$$

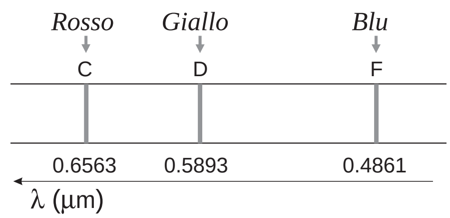

Fig. O8-1

dove n_C, n_D, n_F designano il valore di n per tre lunghezze d'onda corrispondenti alle omonime righe di Fraunhofer dello spettro solare (fig. O8– 1).

Il numero di Abbe è significativo perché dà lo spostamento relativo del fuoco delle varie componenti della luce bianca. Infatti sappiamo che la distanza focale di una lente è proporzionale a $1/(n-1)$: se prendiamo $\Delta f = f_\text{C} - f_\text{F}$ e $f = f_\text{D}$ si ha proprio

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_\text{C} - f_\text{F}}{f_\text{D}} \simeq \frac{n_\text{F} - n_\text{C}}{n_\text{D} - 1} = \frac{1}{\nu}.$$

Per i vetri comunemente usati ν varia fra 30 e 80: per i nostri esempi assumeremo che sia $\nu = 50$, cioè $1/\nu = 0.02$. Ciò significa che la distanza focale nello spettro visibile varia attorno al fuoco della luce gialla al massimo per $\pm 1\%$. Così in fig. O8–2 solo la luce gialla focalizza sullo schermo; tutti gli altri colori sono sfocati e l'immagine, anche se la luce entrante era bianca, appare colorata.

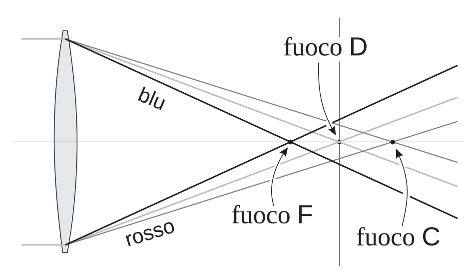

Fig. O8-2

Perché l'aberrazione cromatica sia trascurabile occorre che la sfocatura sia trascurabile rispetto alle altre cause d'insufficiente risoluzione. Prendiamo in considerazione la diffrazione, che è quella sempre presente: occorrerà che le macchie prodotte dalla luce rossa e da quella blu non superino la figura di diffrazione della luce gialla. Dalla fig. O8–3 si vede che il diametro δ della macchia è dato da

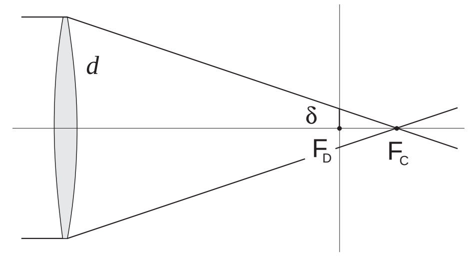

Fig. O8-3

$$\frac{\delta}{f_\mathrm{C} - f_\mathrm{D}} \simeq \frac{d}{f_\mathrm{D}} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{d}{2\nu}$$

mentre la diffrazione produce una macchia di diametro $2.44\, n\lambda$. Confrontando si ottiene $f > d^2/(5\nu\lambda)$.

Per $\nu = 50$, $\lambda = 0.55\,\mu$m

$$f > \frac{d^2}{140\,\mu\mathrm{m}}.$$

Ma ciò significa che per avere aberrazione cromatica trascurabile con un rifrattore di 10 cm dev'essere $f > 70$ m! Infatti per un certo tempo si costruirono dei rifrattori lunghissimi, e quindi di scarsissima luminosità e assai poco maneggevoli. Questo perché si credeva, sull'autorità di Newton, che tutti i vetri dessero luogo a uguale dispersione (avessero cioè lo stesso numero di Abbe).

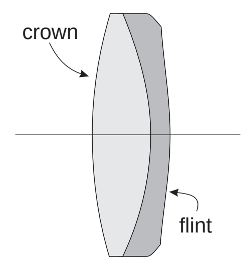

Fig. O8-4

Solo nel 1758, dopo una serie di esperimenti, dai quali risultò invece che la dispersione cambia da un vetro all'altro, fu realizzato da Dollond il primo *doppietto acromatico*, accoppiando una lente biconvessa di vetro *crown* ($n \simeq 1.5$, $\nu \simeq 60$) e un menisco divergente di vetro *flint* ($n \simeq 1.6$, $\nu \simeq 30$), come in fig. O8–4. Da allora l'uso dei doppietti è divenuto universale.

Col doppietto si ottiene la focale voluta e inoltre si toglie l'aberrazione cromatica principale. Resta un'aberrazione cromatica *secondaria*, come si vede studiando la curva della distanza focale in funzione della lunghezza d'onda, rispettivamente per la lente singola e per il doppietto acromatico (fig. O8–5).

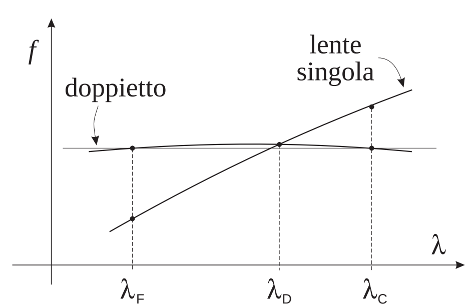

Fig. O8-5

In sostanza il doppietto è progettato in modo da far coincidere le distanze focali di due lunghezze d'onda diverse (ad es. λ_C e λ_F) in modo che le lunghezze d'onda intermedie, per le quali la distanza focale è praticamente costante, siano quelle di maggior sensibilità del rivelatore. Così per osservazioni visuali questa zona è il centro del visibile; per fotografia è più spostata verso il blu, ecc.

Un doppietto può far guadagnare un fattore 40 nell'aberrazione cromatica: la condizione per poterla trascurare diviene allora $f > d^2/(5\,\mathrm{mm})$, e prendendo $d = 10\,\mathrm{cm}$ si ottiene $f > 2\,\mathrm{m}$. Dalla dipendenza di f da d si vede però che la correzione diventa sempre più difficile aumentando d. Questo è uno dei motivi per cui i rifrattori sono più piccoli dei riflettori: oltre un certo limite un rifrattore non può essere corretto per l'aberrazione cromatica (per $d = 1\,\mathrm{m}$ dovrebbe essere $f > 200\,\mathrm{m}$!).

Tuttavia i grandi rifrattori esistono: ad es. il rifrattore a lunga focale dell'osservatorio Sproul [Shwarthmore College, Pennsylvania] ha $d = 61\,\mathrm{cm}$ e $f = 10.93\,\mathrm{m}$. Quest'obiettivo ha ovviamente una notevole aberrazione cromatica, ma è destinato a usi speciali: viene usato in astrografia, con rivelatori e filtri opportuni, che costituiscono un sistema sensibile soltanto a una luce praticamente monocromatica (fig. O8–6). In tal modo l'aberrazione cromatica non ha più alcuna importanza.

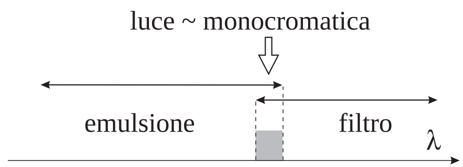

Fig. O8-6

Il doppietto acromatico

Vediamo più in dettaglio com'è costituito un doppietto acromatico. Se ci si mette per semplicità nell'ipotesi di lenti sottili a piccola distanza, è facile dimostrare che

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{O8.1}$$

da cui

$$\frac{df}{f^2} = \frac{df_1}{f_1^2} + \frac{df_2}{f_2^2} = \frac{1}{\nu_1 f_1} + \frac{1}{\nu_2 f_2}.$$

Perché sia $df = 0$ dovremo dunque fare:

$$\frac{1}{\nu_1 f_1} + \frac{1}{\nu_2 f_2} = 0 \tag{O8.2}$$

dalla quale si vede in primo luogo che f_1 e f_2 debbono avere segni opposti: sia $f_1 > 0, f_2 < 0$. Se inoltre si vuole $f > 0$ dovremo avere $|f_1| < |f_2|$ e perciò $\nu_1 > \nu_2$: la lente convergente deve avere numero di Abbe più alto (minore dispersione: vetro *crown*).

Le (O8.1) e (O8.2) mostrano che un doppietto acromatico di focale assegnata, e costruito con vetri dati, ha f_1 e f_2 univocamente determinate. Poiché per una lente sottile

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

si ottiene *una* relazione fra i raggi delle due superfici di ciascuna lente, e resta ancora un parametro libero: due parametri liberi per l'intero sistema.

Si può giocare con questi due parametri al fine di ridurre altre aberrazioni: si dimostra che è ad es. possibile eliminare aberrazione sferica e coma. Nel caso di piccoli obiettivi, per ragioni di facilità di montaggio si preferisce di solito incollare le due lenti; così facendo resta un solo parametro libero e lo si sceglie in modo da rendere piccole (ma non zero) aberrazione sferica e coma. È questo il sistema universalmente diffuso in tutti i binocoli e nei rifrattori fino a circa 10 cm di diametro.

L'oculare acromatico

In un telescopio per osservazioni visuali non basta correggere l'aberrazione cromatica dell'obiettivo, ma occorre preoccuparsi anche dell'oculare. Per questo, oltre all'impiego dei doppietti acromatici, c'è un'altra tecnica che non richiede l'uso di vetri diversi.

Consideriamo infatti un sistema di due lenti sottili di uguale vetro, poste a distanza d. Si vede senza difficoltà che la focale complessiva sarà

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{O8.3}$$

Come si è fatto prima, si cerca una condizione per cui $df = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{df}{f^2} &= \frac{df}{f_1^2}\left(1 - \frac{d}{f_2}\right) + \frac{df}{f_2^2}\left(1 - \frac{d}{f_1}\right)\\ &= \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{f_1}\left(1 - \frac{d}{f_2}\right) + \frac{1}{f_2}\left(1 - \frac{d}{f_1}\right)\right] = 0\\ & f_1 + f_2 - 2d = 0\\ & d = \tfrac{1}{2}(f_1 + f_2). \qquad \text{(O8.4)}\end{aligned}$$

Dalle (O8.3) e (O8.4) segue subito

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right).$$

In aggiunta a quanto è stato detto a proposito dell'utilità di una lente di campo (cfr. Cap. O5) vediamo così un ulteriore vantaggio: è possibile rendere acromatico un sistema (lente di campo) + (lente oculare semplice) con un'opportuna relazione tra f, f_1, f_2, d (oculare di Huygens). Come si è già detto, parlando di "oculare" s'intende l'intero sistema.

Un esempio piuttosto comune di oculare di Huygens è quello costruito con i seguenti parametri (focale f):

$$f_1 = 2f, \quad f_2 = \tfrac{2}{3}f \quad \Rightarrow \quad d = \tfrac{4}{3}f.$$

In fig. O8–7 sono mostrate le posizioni dei punti cardinali: in particolare si noti che la lente di campo non coincide col fuoco della lente oculare, come si era già discusso.

Anche in questo caso resta libera la forma delle lenti: fatto che viene sfruttato per ridurre altre aberrazioni.

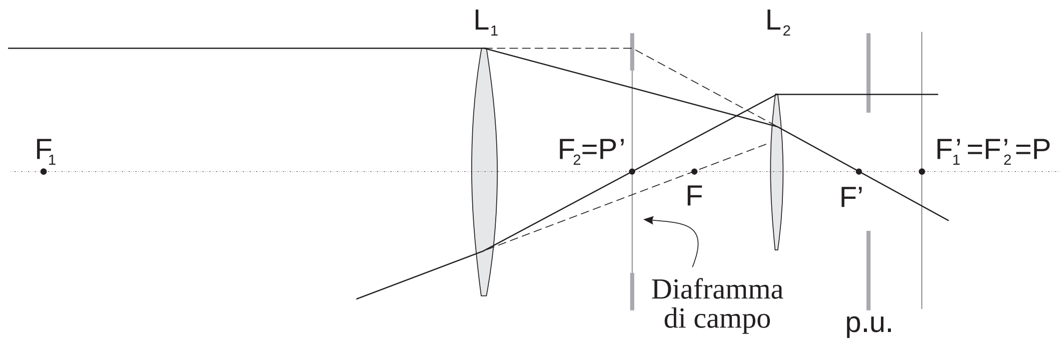

Fig. O8-7