

## O6. Le aberrazioni

È il momento di ricordare ulteriormente che tutto quanto detto finora sui sistemi ottici vale nell'approssimazione di Gauss, per la quale sono richieste due ben distinte condizioni:

- 1) che i raggi incidenti siano a piccola distanza dall'asse;
- 2) che si operi a piccole vergenze.

Questo si può anche esprimere dicendo che sia l'*apertura* (p.e.) del sistema che l'*angolo di campo* debbono essere piccoli.

È facile vedere con esempi concreti come le due cose siano distinte:

- al microscopio l'oggetto in esame è sempre praticamente sull'asse ottico per cui l'angolo di campo è piccolo; invece il diametro  $p_e$  è dello stesso ordine di grandezza della focale dell'obiettivo (fig. O6-1);
- nel caso delle comuni lenti da occhiali l'apertura è piccola (pupilla dell'occhio), ma l'angolo di campo è molto grande (fig. O6-2);
- in un obiettivo fotografico, che dev'essere molto aperto e deve avere anche un angolo di campo grande, cadono tutte e due le ipotesi: questo infatti è il caso più difficile per il progettista.

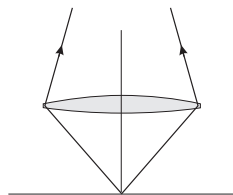


Fig. O6-1

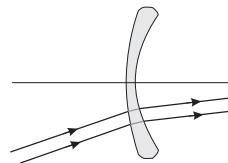


Fig. O6-2

### Sviluppo in serie dell'aberrazione trasversale

Ci proponiamo adesso di analizzare il comportamento di un sistema ottico centrato, in condizioni in cui non sia legittimo l'uso dell'approssimazione di Gauss. In fig. O6-3 è mostrato un raggio uscente da un punto  $P$  a distanza  $y$  dall'asse ottico, che interseca la p.e. a distanza  $q$  dal centro. Lo stesso raggio, oltre il sistema ottico, interseca un piano  $\pi'$  nel punto  $P'$  a distanza  $y'$  dall'asse.

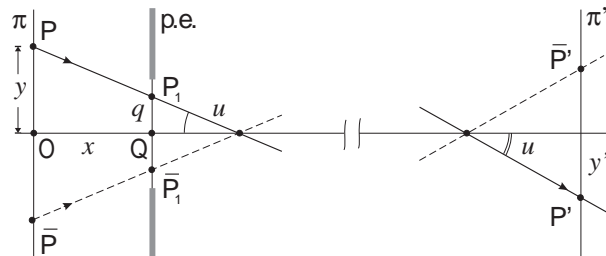


Fig. O6-3

Essendo  $q = y - x \operatorname{tg} u$  (con  $x = OQ$  fissato) è chiaro che  $y'$  può essere vista come una funzione di  $y$  e di  $q$ ; anche tale funzione è lineare in approssimazione di

Gauss, cioè quando  $y$  e  $q$  siano sufficientemente piccole. Questo fatto suggerisce uno sviluppo in serie, per cui scriveremo:

$$y' = f(y, q) = ay + bq + cy^2 + dyq + eq^2 + fy^3 + \dots$$

Dalla simmetria del sistema per rotazioni attorno all'asse ottico si ha (per rotazione di  $180^\circ$ ) che il raggio  $\bar{P}\bar{Q}$ , simmetrico di  $PQ$ , deve uscire per  $\bar{P}'$ , simmetrico di  $P'$ ; quindi

$$f(-y, -q) = -f(y, q)$$

cioè  $f$  è funzione dispari dei due argomenti. Ne segue che lo sviluppo precedente è limitato ai soli termini dispari e si scriverà:

$$y' = ay + bq + cy^3 + dy^2q + eyq^2 + fq^3 + O(5)$$

dove la notazione  $O(n)$ , che useremo anche in seguito, sta a indicare termini di ordine maggiore o uguale a  $n$  in  $y$  e  $q$ .

Se  $y$  e  $q$  sono tali che lo sviluppo si possa troncare con sufficiente approssimazione ai primi due termini, ritroviamo la dipendenza lineare di  $y'$  da  $y$  e  $q$ , propria dell'approssimazione di Gauss.

Per vedere il significato di  $a$  e  $b$  consideriamo tre casi possibili:

1. Se  $b = 0$  avremo  $y' = ay$ , che mostra come tutti i raggi uscenti da  $P$  convergono in  $P'$ : dunque in questo caso  $P'$  è l'immagine gaussiana di  $P$ , e  $\pi'$  è il piano coniugato di  $\pi$ .
2. Se invece  $a = 0$  abbiamo  $y' = bq$  e  $P'$  risulta essere l'immagine gaussiana del punto  $Q$  della p.e.; ciò accade se e solo se il piano  $\pi'$  coincide con la p.u. del sistema.
3. Infine nel caso in cui  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  il piano  $\pi'$  non coincide né col piano immagine, né con la p.u., ma è facile mostrare come un idoneo spostamento  $\delta x'$  di tale piano ci riporta in una delle situazioni precedenti.

Possiamo porre  $u' = my + nq$ . Detta poi  $\bar{y}'$  l'ordinata di  $P'$  nel piano spostato si ha:

$$\bar{y}' = y' - u'\delta x' = ay + bq - my\delta x' - nq\delta x' = (a - m\delta x')y + (b - n\delta x')q.$$

Se dunque vogliamo porci nel piano immagine basterà fare  $b - n\delta x' = 0$ , cioè spostare il piano di  $\delta x' = b/n$ ; in modo analogo, per spostarci sul piano della p.u. occorrerà un  $\delta x' = a/m$ .

Nel seguito supporremo sempre di essere nel piano  $\pi'$  e indicheremo con  $P'_*$  l'immagine (gaussiana) di  $P$ .

Quando i termini di grado superiore al primo non sono trascurabili, essi vengono trattati come correzioni ai termini gaussiani e in questo senso si parla di *aberrazioni* (trasversali) introdotte dal sistema ottico. Esse vengono classificate

in base al grado del prodotto  $y^\alpha q^\beta$ , cioè all'ordine di approssimazione nello sviluppo in serie. Le prime a comparire oltre l'approssimazione di Gauss sono quelle del 3° ordine, dette *aberrazioni di Seidel*, le uniche che tratteremo in queste lezioni. Ove però questi termini siano piccoli, oppure  $y$  o  $q$  siano grandi, possono risultare importanti le aberrazioni di 5° ordine e di ordine ancora superiore.

### Aberrazioni di 3° ordine

Limitando dunque al 3° ordine lo sviluppo già scritto della funzione  $f(y, q)$ , è utile distinguere, se possibile, l'effetto di ciascun termine separatamente dagli altri. Per il momento ci limitiamo a qualche cenno: infatti una discussione completa non si può fare senza prendere in esame anche raggi non meridiani, cioè non giacenti in piani passanti per l'asse ottico.

*Nota:* In questa discussione delle aberrazioni ci converrà continuare a chiamare "immagine" di una sorgente puntiforme la figura, o macchia, che si produce sullo schermo (lastra fotografica), quale che sia la sua forma ed estensione.

- 1) Il termine  $cy^3$  non dipende da  $q$ : ciò significa che tutti i raggi uscenti da P convergono in un punto  $P' \neq P'_*$  a distanza dall'asse ottico

$$y' = ay + cy^3 = ay \left( 1 + \frac{c}{a} y^2 \right).$$

In tali condizioni l'immagine di un punto è ancora un punto, ma si perde la relazione di linearità tra  $y$  e  $y'$ ; questo è equivalente a dire che l'ingrandimento lineare ( $G = y'/y$ ) non è costante su tutto il campo, ma varia: aumentando o diminuendo verso il bordo a seconda del segno di  $c/a$ .

Quest'aberrazione è denominata *distorsione* in quanto fa perdere il rapporto di similitudine tra oggetto e immagine, produce cioè immagini distorte. Si tratta ovviamente di un'aberrazione assai fastidiosa in ogni caso; essa complica la riduzione dei dati, particolarmente nella determinazione delle posizioni dei corpi celesti (astrometria).

Poiché il termine  $cy^3$  ha un peso sempre minore col decrescere di  $y$ , è chiaro che riducendo il campo (finestra d'ingresso) quest'aberrazione può essere ridotta fino a livelli trascurabili; non si ottiene invece nessun vantaggio diaframmando il sistema, in quanto tale operazione riduce solo i valori possibili di  $q$ , che non è presente nel termine esaminato.

- 2) Per il termine  $fq^3$  si può fare in modo analogo il discorso contrario: l'aberrazione relativa a questo termine non varia cambiando il campo mentre può essere ridotta diminuendo  $q$ , cioè diaframmando.

Per farsi un'idea del tipo di aberrazione descritta dal termine  $fq^3$ , consideriamo il caso particolare di un oggetto all'infinito sull'asse. Avremo  $y' = fq^3$  e ciò mostra che i raggi intersecano il piano focale in punti diversi a seconda della loro distanza dall'asse ottico sulla p.e.: l'immagine non è puntiforme, né si può ottenere puntiforme spostando il piano  $\pi$ .

Quest'aberrazione è detta *sferica* (o aberrazione *di sfericità*) in quanto è generalmente presente quando le superfici ottiche sono, come di solito, di forma sferica, mentre può essere eliminata, come vedremo, usando superfici *asferiche* (es. paraboloidi o altre).

- 3) I restanti termini dipendono sia dal campo ( $y$ ), che dal diaframma ( $q$ ), e danno luogo a tre aberrazioni non facilmente interpretabili nel contesto attuale: *coma*, *astigmatismo* e *curvatura di campo*. Per poterne dare una descrizione chiara e corretta è necessario affrontare il problema da capo, in termini più generali.

### Aberrazione delle superfici d'onda

Una discussione generale delle aberrazioni si fa meglio, anziché con i raggi, basandosi sulle superfici d'onda costante, già definite nel Cap. O2. Tali superfici che, come sappiamo, sono perpendicolari ai raggi, sono dette anche "superfici d'onda," per motivi che appariranno chiari quando tratteremo dell'approssimazione (ondulatoria) di Huygens-Fresnel.

Dire che una sorgente puntiforme produce un'immagine puntiforme è come dire che in uscita dal sistema ottico i raggi sono convergenti nell'immagine e le superfici d'onda sono sferiche aventi l'immagine come centro. La deviazione delle superfici d'onda dalla forma sferica è dunque associata allo sparpagliarsi dei raggi attorno all'immagine gaussiana, cioè alle aberrazioni trasversali cui abbiamo già accennato (fig. O6-4). Conviene però notare subito che la sfericità delle superfici d'onda è condizione necessaria ma non sufficiente per garantire l'assenza di aberrazioni: si pensi alla distorsione, che di per sé non altera il carattere puntiforme delle immagini, ma ne determina un cambiamento di posizione.

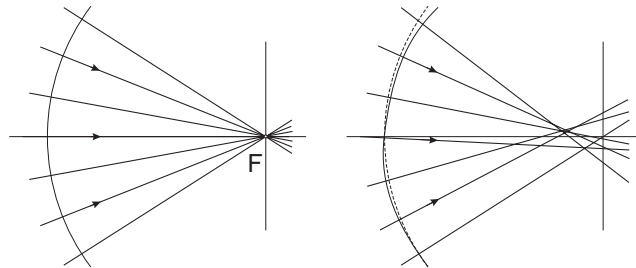


Fig. O6-4

In fig. O6-5 sia  $OO'$  l'asse ottico del sistema in esame, che interseca nell'ordine: in  $O$  il piano della sorgente  $P$  (*piano oggetto*), in  $Q$  il piano della p.e., in  $Q'$  il piano della p.u. e in  $O'$  il piano dell'immagine gaussiana  $P'_*$ . Converrà descrivere lo spazio-oggetto e lo spazio-immagine riferendoli a due diverse terne cartesiane  $O(x, y, z)$  e  $O'(x', y', z')$ , come in figura.

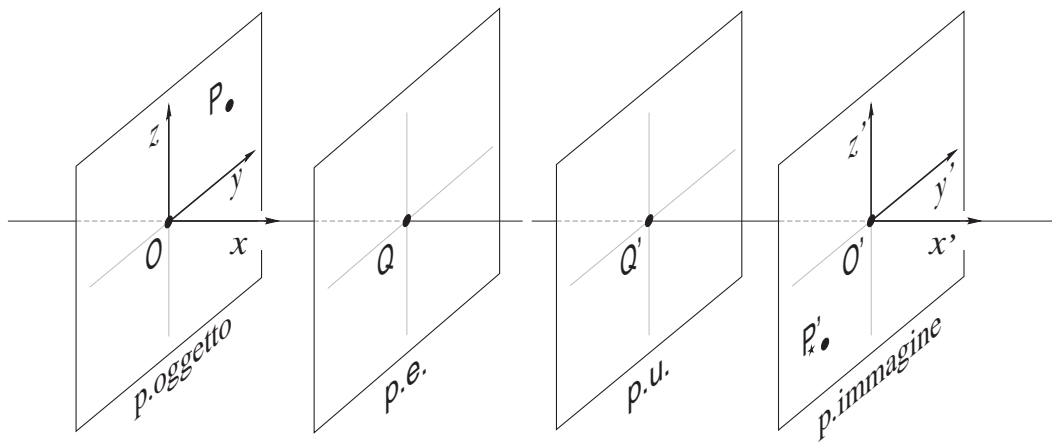


Fig. O6-5

Solo in approssimazione di Gauss un generico raggio uscente da P passa per  $P'_*$ ; in realtà esso intersecherà il piano  $y'z'$  in un punto  $P' \neq P'_*$ , che varia a seconda del raggio considerato. Tra le superfici d'onda associate al fascio di raggi emergenti dal sistema, prendiamo in esame quella, che denomineremo  $\Sigma$ , contenente il punto  $Q'$ , centro della p.u.; corrispondentemente chiamiamo  $\Sigma_g$  la superficie d'onda che avremmo in approssimazione di Gauss. Per quanto detto sopra,  $\Sigma_g$  è una superficie sferica passante per  $Q'$ , centrata in  $P'_*$  e di raggio  $Q'P'_* = R'_*$ , mentre  $\Sigma$  è una superficie per ora non meglio definita, la cui deviazione da  $\Sigma_g$  caratterizza la presenza delle aberrazioni (fig. O6-6). Indichiamo quindi con M e  $M_g$  le intersezioni del raggio in esame rispettivamente con  $\Sigma$  e  $\Sigma_g$ . Il segmento  $MM_g$ , come gli altri analoghi, verrà considerato orientato, con la convenzione che sia  $MM_g > 0$  se la superficie aberrata è *indietro*, in quel punto, rispetto a quella "gaussiana" (come in figura).

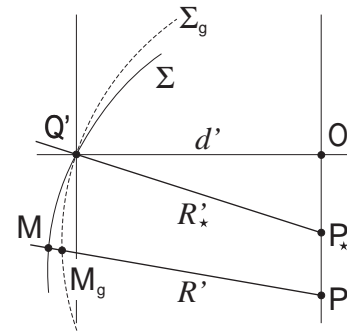


Fig. O6-6

### L'aberrazione del cammino ottico

Quello che vogliamo adesso dimostrare è che la conoscenza della funzione  $\Phi = W(M, M_g) = n' MM_g$  ( $n'$  è l'indice di rifrazione dell'ultimo mezzo) è sufficiente per la determinazione delle aberrazioni trasversali:  $\Phi$  è detta *aberrazione del cammino ottico*, in quanto misura appunto il cammino ottico tra la superficie aberrata e quella gaussiana.

Per definizione d'iconale si ha:

$$\Phi = W(M, M_g) = W(P, M_g) - W(P, M) = W(P, M_g) - W(P, Q')$$

poiché  $Q'$  e  $M$  sono sulla stessa superficie d'onda  $\Sigma$  che ha  $W$  costante. Esplicitando le coordinate spaziali dei punti interessati, riferite al sistema  $O'(x', y', z')$ ,

$$\begin{aligned} M_g &\equiv (\xi', \eta', \zeta') \\ Q' &\equiv (d', 0, 0) \quad (d' < 0 \text{ in figura}) \end{aligned}$$

si scriverà

$$\Phi = W(0, y, z; \xi', \eta', \zeta') - W(0, y, z; d', 0, 0).$$

Fissato il punto  $P$ , oltre che la posizione dei piani di fig. O6-5,  $\Phi$  rimane funzione di  $\xi', \eta', \zeta'$ ; anzi di due sole di esse dato che  $M_g$  è un punto della sfera  $\Sigma_g$  definita dall'equazione:

$$\xi'^2 + (\eta' - y'_*)^2 + (\zeta' - z'_*)^2 = R'_*{}^2 \quad (\text{O6.1})$$

che consente ad esempio di ricavare  $\xi' = \xi'(\eta', \zeta')$ . Si noti che  $\xi'$  contiene anche  $y'_*$ ,  $z'_*$  e  $R'_*$  che tuttavia non sono variabili indipendenti. Infatti essendo  $y'_* = Gy$ ,  $z'_* = Gz$  e  $R'_*{}^2 = d'^2 + G^2(y^2 + z^2)$ , esse risultano fissate col punto  $P$ . Dunque si può senz'altro porre  $\Phi = \Phi(\eta', \zeta')$ .

Derivando rispetto a  $\eta'$  e  $\zeta'$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} &= \frac{\partial W}{\partial \eta'} + \frac{\partial W}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta'} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta'} + \frac{\partial W}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \zeta'}. \end{aligned}$$

Le derivate di  $W$  si trovano immediatamente dall'equazione  $\vec{\nabla} W = n\vec{\tau}$  (O2.12) applicata al punto  $M_g$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi'} &= n'\tau_x = -n' \frac{\xi'}{R'} \\ \frac{\partial W}{\partial \eta'} &= n'\tau_y = n' \frac{y' - \eta'}{R'} \quad \text{con } R' = M_g P'. \\ \frac{\partial W}{\partial \zeta'} &= n'\tau_z = n' \frac{z' - \zeta'}{R'} \end{aligned}$$

Differenziando l'equazione (O6.1) della sfera  $\Sigma_g$  si trova poi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial \eta'} &= \frac{y'_* - \eta'}{\xi'} \\ \frac{\partial \xi'}{\partial \zeta'} &= \frac{z'_* - \zeta'}{\xi'} \end{aligned}$$

e si ottiene infine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta'} &= n' \frac{y' - \eta'}{R'} - n' \frac{y'_* - \eta'}{R'} = \frac{n'}{R'} (y' - y'_*) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'} &= n' \frac{z' - \zeta'}{R'} - n' \frac{z'_* - \zeta'}{R'} = \frac{n'}{R'} (z' - z'_*).\end{aligned}\tag{O6.2}$$

Le due equazioni possono essere scritte in forma vettoriale (vettori bidimensionali), ponendo

$$\vec{r}' \equiv (y', z') \quad \vec{r}'_* \equiv (y'_*, z'_*) \quad \vec{\varrho}' \equiv (\eta', \zeta')$$

$$\vec{\nabla}_{\varrho'} \Phi \equiv \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\eta'}, \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta'} \right)$$

e si ottiene quindi:

$$\vec{r}' = \vec{r}'_* + \frac{R'}{n'} \vec{\nabla}_{\varrho'} \Phi.\tag{O6.3}$$

### Sviluppo in serie dell'aberrazione del cammino ottico

La relazione (O6.3) non è immediatamente utilizzabile per ricavare  $\vec{r}'$  da  $\Phi(\eta', \zeta')$  in quanto anche  $R'$  contiene le incognite  $y'$  e  $z'$ . Se così non fosse avremmo trovato una soluzione esatta al problema delle aberrazioni; occorrerà invece procedere come prima, sviluppando in serie la funzione  $\Phi$ . Infatti per  $\Phi \rightarrow 0$  anche  $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}'_*$ , cioè le aberrazioni diventano trascurabili.

Cosa si può dire della funzione  $\Phi(y, z, \eta', \zeta')$  in generale? Osserviamo anzitutto che per  $M_g = Q'$  la funzione si deve annullare e dunque  $\Phi(y, z, 0, 0) = 0$ . Se poi cambiamo segno a tutte le coordinate, il cammino ottico non cambia: lo sviluppo in serie di  $\Phi$  potrà quindi contenere solo termini di grado pari. Infine, per la simmetria di rotazione del sistema ottico centrato,  $\Phi$  dipende dalle variabili dette solo attraverso funzioni scalari di  $\vec{r} \equiv (y, z)$  e  $\vec{\varrho}' \equiv (\eta', \zeta')$ : poiché di queste funzioni ne esistono solo tre indipendenti,  $|\vec{r}'|^2$ ,  $|\vec{\varrho}'|^2$  (che scriveremo più semplicemente  $r'^2$  e  $\varrho'^2$ ) e  $\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}'$ , lo sviluppo della  $\Phi$  sarà del tipo:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + ar^2 + b\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}' + c\varrho'^2 + \\ &\quad dr^4 + e\varrho'^4 + f(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}')^2 + gr^2\varrho'^2 + hr^2(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}') + k\varrho'^2(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}') + O(6).\end{aligned}$$

La condizione  $\Phi(y, z, 0, 0) = 0$  richiede di porre  $\Phi_0 = a = d = 0$ . Per motivi che saranno chiari nel seguito i coefficienti dei termini di 4° ordine vengono scritti in modo alquanto diverso e lo sviluppo si presenta in questa forma:

$$\begin{aligned}\Phi &= b\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}' + c\varrho'^2 - \\ &\quad \frac{1}{4}B\varrho'^4 - C(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}')^2 - \frac{1}{2}Dr^2\varrho'^2 + Er^2(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}') + F\varrho'^2(\vec{r}' \cdot \vec{\varrho}') + O(6).\end{aligned}$$

O6-7

Si può vedere immediatamente che i termini di 2° ordine non rappresentano delle aberrazioni, dato che dalle (O6.2), derivando la  $\Phi$ , si ottengono termini di 1° ordine che con la scelta fatta di  $P'_*$  sono identicamente nulli.

Per dimostrarlo, teniamo presente che  $R' = -d' +$  termini infinitesimi, per cui dalla (O6.3) si ottiene:

$$\vec{r}' = \vec{r}'_* + \delta\vec{r}' = \vec{r}'_* - \frac{d'}{n'} (b\vec{r} + 2c\vec{q}').$$

Consideriamo solo il primo termine: se  $G$  è l'ingrandimento del sistema in approssimazione di Gauss, sarà  $\vec{r}'_* = G\vec{r}$ . Ne segue

$$\vec{r}' = \left(G - \frac{d'}{n'}b\right)\vec{r} = \vec{G}\vec{r}.$$

La relazione di linearità tra  $\vec{r}$  ed  $\vec{r}'$  indica che  $\vec{r}'$  è l'immagine gaussiana e deve quindi coincidere con  $\vec{r}'_*$ . Ne segue  $\vec{G} = G$  e  $b = 0$ .

Supponiamo ora che sia  $c \neq 0$ . La proporzionalità tra  $\delta\vec{r}'$  e  $\vec{q}'$  implica che debba esistere su un diverso piano un punto  $P''$  (fig. O6-7) in cui convergono tutti i raggi. Dalla proporzione

$$\frac{\delta r'}{\varrho'} = \frac{\delta x'}{-d' + \delta x'} \quad (d' < 0 \text{ in figura!})$$

si trova che tale piano è spostato rispetto a quello di  $P'_*$  della quantità

$$\delta x' = \frac{2cd'^2/n'}{1 + 2cd'/n'}.$$

Questo resta vero anche per  $\varrho' \rightarrow 0$  e dunque si tratta di un piano d'immagini gaussiane: poiché però esiste un unico piano immagine in approssimazione di Gauss, i due piani devono coincidere e deve quindi essere  $c = 0$ .

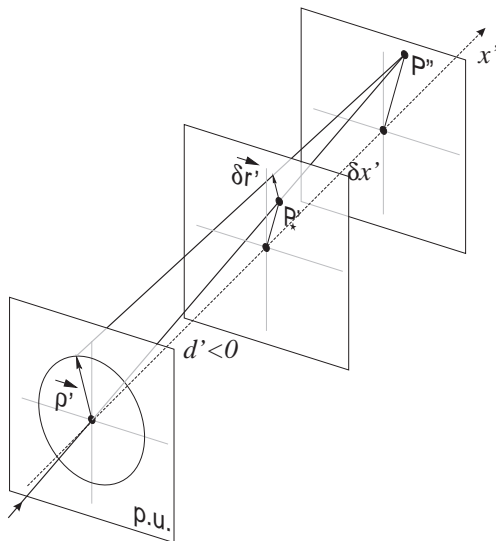


Fig. O6-7

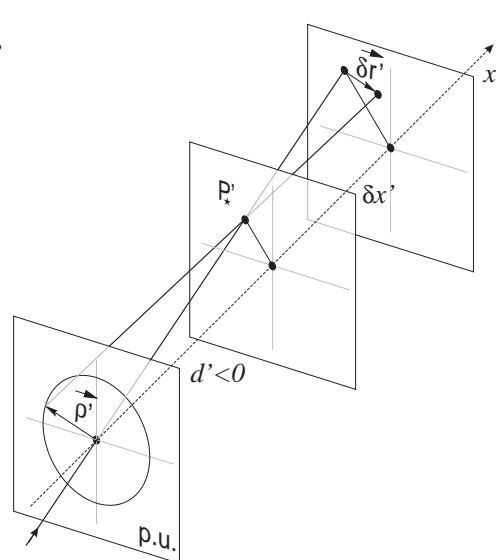


Fig. O6-8



Ci sarà utile nel seguito ricordare che spostando il piano immagine di una quantità  $\delta x'$  (che supponiamo infinitesima rispetto a  $d'$ ) s'introduce un termine di "sfocamento" proporzionale a  $\vec{\rho}'$  (fig. O6-8):

$$(\delta \vec{r}')_s = \frac{\delta x'}{d'} \vec{\rho}'. \quad (\text{O6.4})$$

Questo corrisponde nella  $\Phi$  a un termine  $(n' \delta x' \rho'^2)/(2d'^2)$ .

I termini in  $\Phi$  che veramente rappresentano aberrazioni sono quindi quelli successivi: in primo luogo i 5 termini del 4° ordine, che corrispondono ai 5 tipi già citati, le *aberrazioni di Seidel*. Derivando questi termini si ritrovano infatti le aberrazioni trasversali del 3° ordine che avevamo già preso in considerazione.

A questo punto riesce più chiaro come si supera l'ostacolo rappresentato da  $R'$ : intanto è

$$R'^2 = \overline{M_g P'}^2 = \xi'^2 + (\eta' - y')^2 + (\zeta' - z')^2. \quad (\text{O6.5})$$

Poiché però  $M_g$  è sulla sfera  $\Sigma_g$ , come pure  $Q'$ , avremo:

$$\xi'^2 + (\eta' - y'_*)^2 + (\zeta' - z'_*)^2 = d'^2 + y'^2_* + z'^2_*$$

da cui

$$\xi'^2 = d'^2 - \eta'^2 + 2\eta'y'_* - \zeta'^2 + 2\zeta'z'_*$$

e sostituendo nella (O6.5)

$$R'^2 = d'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\eta'(y' - y'_*) - 2\zeta'(z' - z'_*) = d'^2 + r'^2 - 2\vec{\rho}' \cdot \delta \vec{r}'.$$

Nello spirito dello sviluppo in serie della  $\Phi$ ,  $\vec{r}$  e  $\vec{\rho}'$  devono essere pensati infinitesimi di 1° ordine (e di conseguenza anche  $\vec{r}'$  e  $\vec{r}'_*$ ): ne segue che mentre  $d'^2$  è un termine finito,  $r'^2$  è di 2° ordine,  $\delta \vec{r}'$  è almeno di 3° ordine e quindi  $\vec{\rho}' \cdot \delta \vec{r}'$  è almeno di 4° ordine.

Se dunque siamo interessati solo allo studio delle aberrazioni di Seidel (3° ordine), nelle (O6.2) e (O6.3) si potrà porre tranquillamente  $R' = -d'$  in quanto i successivi termini danno contributo solo a partire dal 5° ordine al prodotto  $R' \vec{\nabla}_{\rho'} \Phi$ .

Riassumendo, dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} y' - y'_* &= -\frac{d'}{n'} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} \\ z' - z'_* &= -\frac{d'}{n'} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta'} \end{aligned}$$

ovvero

$$\delta \vec{r}' = -\frac{d'}{n'} \vec{\nabla}_{\varrho'} \Phi$$

con

$$\Phi = -\frac{1}{4} B \varrho'^4 - C (\vec{r} \cdot \vec{\varrho}')^2 - \frac{1}{2} D r^2 \varrho'^2 + E r^2 (\vec{r} \cdot \vec{\varrho}') + F \varrho'^2 (\vec{r} \cdot \vec{\varrho}').$$

Il gradiente delle varie funzioni di  $\vec{\varrho}'$  si calcola facilmente, eventualmente ricorrendo alle coordinate cartesiane, posto che  $\varrho'^2 = \eta'^2 + \zeta'^2$ . Si ottiene:

$$\delta \vec{r}' = -\frac{d'}{n'} \left\{ -B \varrho'^2 \vec{\varrho}' - 2C (\vec{r} \cdot \vec{\varrho}') \vec{r} - D r^2 \vec{\varrho}' + E r^2 \vec{r} + F \left[ \varrho'^2 \vec{r} + 2(\vec{r} \cdot \vec{\varrho}') \vec{\varrho}' \right] \right\}.$$