O4. Ottica gaussiana

Definizione

Ci proponiamo adesso di studiare la struttura, le caratteristiche ed il comportamento di un sistema ottico centrato in approssimazione di Gauss.

Come si è già visto nel capitolo precedente, le coordinate y', p' di un raggio su di un piano π' (fig. O4–1) sono combinazioni lineari delle coordinate y, p relative a un altro piano π:

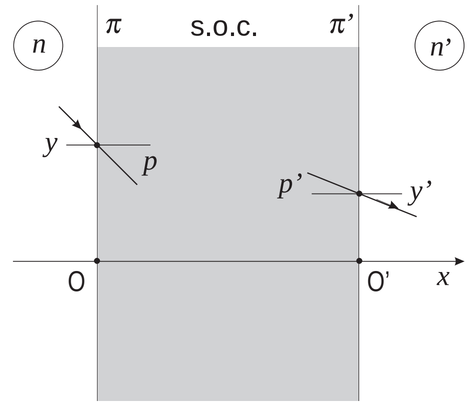

Fig. O4-1

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} \qquad \text{(O4.1)}$$

dove la matrice dei coefficenti $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (avente determinante sempre uguale a 1) dipende dai piani π e π'. Sottolineiamo che la scelta di tali piani è arbitraria: se pure spesso è comodo farli coincidere con quelli tangenti alla prima e all'ultima superficie ottica, questo non è affatto necessario.

I punti cardinali

Vogliamo ora mostrare che da tale matrice si possono estrarre tutte le informazioni necessarie a caratterizzare completamente il sistema ottico in esame: a questo scopo sarà sufficiente individuare i *punti cardinali* del sistema, che definiremo qui appresso, risolvendo tre problemi.

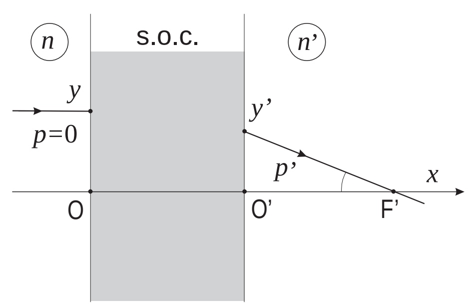

Fig. O4-2

1° *Problema*: Trovare i *fuochi* F e F′, determinati come in fig. O4–2 da raggi, rispettivamente uscente ed entrante, paralleli all'asse ottico.

Si ha $\mathrm{O'F'} = y'/u'$ (anche per il segno) e $u' = -p'/n'$, da cui, per la (O4.1) con $u = 0$:

$$\mathrm{O'F'} = -n'\,\frac{y'}{p'} = -n'\,\frac{\alpha y}{\gamma y}\,.$$

Ne segue che la posizione di F′ non dipende da y:

$$\mathrm{O'F'} = -n' \, \frac{\alpha}{\gamma} \, .$$

Dunque in approssimazione di Gauss i raggi paralleli all'asse ottico convergono tutti in un punto F′, che si chiama *secondo fuoco* del sistema.

F, *primo fuoco* del sistema, è invece il punto da cui partono raggi che usciranno dal sistema paralleli all'asse ottico; per trovarlo si procede come prima, salvo che stavolta si pone $u' = 0$.

$$0 = p' = \gamma y + \delta p \qquad y = -\frac{\delta}{\gamma}\, p \qquad \mathrm{OF} = -n\,\frac{y}{p} = n\,\frac{\delta p}{\gamma p}$$

$$\mathrm{OF} = n\,\frac{\delta}{\gamma}.$$

2° *Problema*: Determinare la posizione del *secondo punto principale*, definito come la proiezione sull'asse ottico dell'intersezione dei prolungamenti dei raggi entranti e uscenti (fig. O4–3).

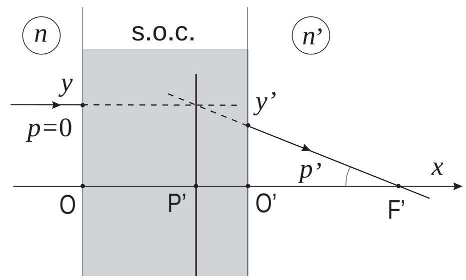

Fig. O4-3

P′F′ si chiama *seconda distanza focale.* Dalla figura si vede che

$$\mathrm{P'F'} = -n' \, \frac{y}{p'}$$

e usando la (O4.1) per eliminare p' si arriva a

$$f' = \mathrm{P'F'} = -n' \, \frac{1}{\gamma}.$$

Con analogo procedimento si trova anche

$$f = \mathrm{PF} = n \, \frac{1}{\gamma}$$

dove P (*primo punto principale*) è definito in modo simmetrico a P′ (fig. O4–4).

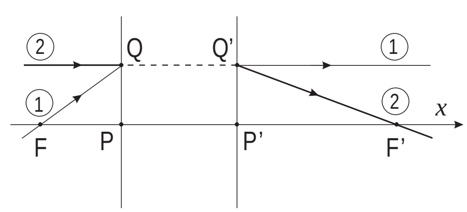

Fig. O4-4

A parte la disparità del segno, dovuta ad aver preso le lunghezze come orientate, notiamo che anche in valore assoluto la prima e la seconda distanza focale sono diverse:

coincidono (a parte il segno) soltanto se l'ultimo mezzo ha indice di rifrazione uguale al primo ($n' = n$).

I punti principali sono tra loro coniugati: questo si vede osservando che Q′ è immagine di Q, in quanto due raggi per Q passano anche per Q′. Si vede anche che l'ingrandimento tra i due piani principali è uguale a 1 e si può dimostrare che questa proprietà caratterizza i piani principali.

3° *Problema*: Trovare i *punti nodali* del sistema. Due punti coniugati N e N′ si dicono primo e secondo punto nodale se, quando un raggio entrante (o il suo prolungamento) passa per N, il raggio uscente (che passa per N′) è parallelo al raggio entrante.

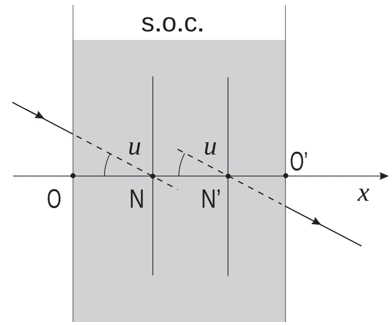

Fig. O4-5

La condizione da imporre è dunque $u = u'$ (fig. O4–5). Da $p' = \gamma y + \delta p$ si ricava

$$\frac{n'}{n}\,p - \delta p = \gamma y,$$

mentre

$$\mathrm{ON} = \frac{y}{u} = -n\,\frac{y}{p};$$

quindi

$$\mathrm{ON} = \frac{n\delta - n'}{\gamma}.$$

Dimostriamo che $\mathrm{FN} = f'$:

$$\mathrm{FN} = \mathrm{FO} + \mathrm{ON} = -\frac{n\delta}{\gamma} + \frac{n\delta - n'}{\gamma} = -\frac{n'}{\gamma} = f'.$$

Allo stesso modo, trovato N′, si dimostra che

$$\mathrm{F'N'} = \frac{n}{\gamma} = f.$$

La fig. O4–6 riassume la relazione tra fuochi, punti principali e punti nodali.

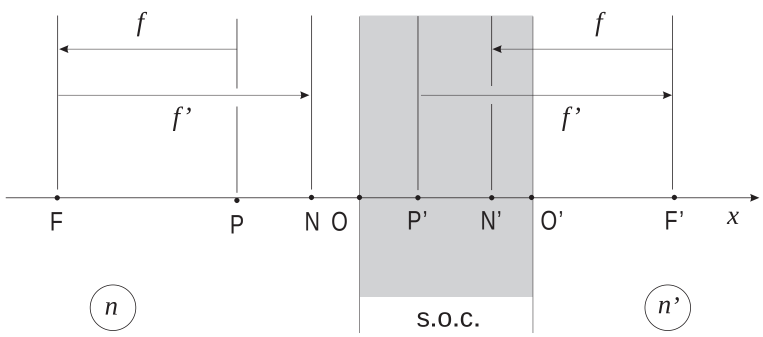

Fig. O4-6

Si vede che per $n = n'$ si ha $\mathrm{P} \equiv \mathrm{N}$ e $\mathrm{P}' \equiv \mathrm{N}'$: in questo caso punti principali e punti nodali s'identificano. In particolare, se il primo e l'ultimo mezzo sono aria ($n \simeq 1$), si ha $-f' = f = 1/\gamma$. In queste condizioni diremo $F = -1/f = -\gamma$ *potenza* dell'obiettivo (espressa in diottrie quando f è espressa in metri). Il motivo del segno meno è, come vedremo, di far venire positiva la potenza di una lente convergente.

Notiamo infine che mentre γ dà la potenza, α e δ dicono dove si trovano i fuochi rispetto alle superfici del sistema (il quarto parametro β non è indipendente dagli altri).

La formula dei punti coniugati

Si ottengono notevoli semplificazioni prendendo i piani π e π' coincidenti con i piani principali e quindi i punti O, O$'$ coincidenti coi punti principali. Infatti, confrontando le espressioni trovate per OF e PF si vede che $\delta = 1$; analogamente il confronto di O$'$F$'$ e P$'$F$'$ mostra che anche $\alpha = 1$. Se si ricorda che il determinante della matrice vale 1 e si tiene presente che γ non è 0 essendo legata alla potenza, ne segue subito $\beta = 0$, e la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

dove sopravvive il solo γ, che come sappiamo è legato alla potenza del sistema e non dipende dalla scelta delle coordinate.

Consideriamo ora un raggio che parte da un punto A dell'asse ottico, con $\mathrm{OA} = x$, e uscendo interseca di nuovo l'asse nel punto A$'$ (O$'$A$'$ = x$'$). Per definizione, A e A$'$ sono coniugati. Dalla fig. O4–7 si vede che $y = xu$, $y' = x'u'$, mentre $y = y'$ perché P e P$'$ sono i punti principali. Dunque

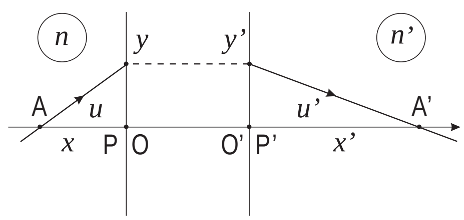

Fig. O4-7

$$p = -nu = -\frac{ny}{x} \qquad p' = -n'u' = -\frac{n'y}{x'}.$$

La (O4.1) ci dice $p' = \gamma y + p$, perché $\delta = 1$; mettendo tutto insieme, usando $\gamma = n/f$ e semplificando y si trova infine

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'} \tag{O4.2}$$

che è detta *formula dei punti coniugati*, in quanto lega le x e x' dei punti A e A$'$.

In alternativa, dati x e x', si trova facilmente che la matrice del sistema limitato dai piani passanti per A e A′ è

$$\begin{pmatrix} 1-\gamma\dfrac{x'}{n'} & \dfrac{x}{n}-\dfrac{x'}{n'}-\gamma\dfrac{xx'}{nn'} \\ \gamma & 1+\gamma\dfrac{x}{n} \end{pmatrix}$$

Imponendo che y' (sul piano per A′) dipenda solo da y (sul piano per A) si ritrova la medesima formula insieme con l'espressione dell'*ingrandimento lineare*:

$$G = \frac{y'}{y} = \frac{nx'}{n'x}$$

Un'altra relazione utile si ottiene ponendo $\xi = \mathrm{FA}$ e $\xi' = \mathrm{F'A'}$; si verifica subito che

$$\xi\xi' = ff'.$$

Notare che questa relazione non dipende dagli indici di rifrazione.

Sistemi afocali

Tutto quanto si è detto finora vale per sistemi in cui $\gamma \neq 0$; è però per noi particolarmente importante, come vedremo, il caso $\gamma = 0$. Tali sistemi si dicono *telescopici* o *afocali* (in quanto se $\gamma = 0$ è di conseguenza $f = \infty$). In tal caso il sistema (O4.1) diventa:

$$\begin{cases} y' = \alpha y + \beta p \\ p' = \delta p \end{cases} \qquad \text{con} \quad \alpha\delta = 1 \tag{O4.3}$$

Si vede dalla (O4.3) che in un sistema afocale le vergenze in entrata e in uscita sono proporzionali e il loro rapporto non dipende da y. Questo rapporto è l'*ingrandimento angolare* G_a:

$$G_\mathrm{a} = \frac{u'}{u} = \frac{n\,p'}{n'p} = \frac{n}{n'}\,\delta \tag{O4.4}$$

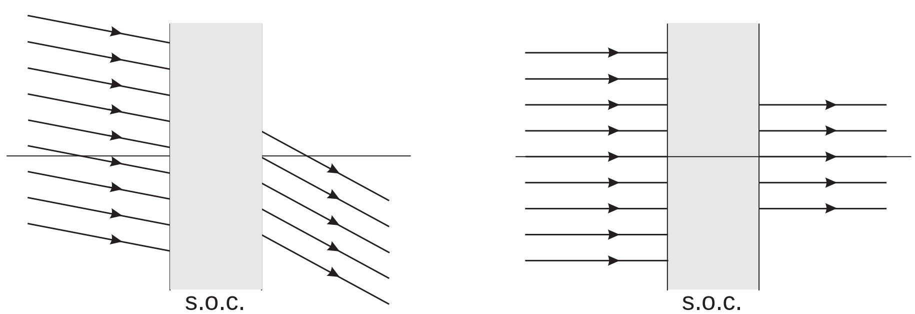

Fig. O4-8

Dunque raggi paralleli inclinati di un angolo u sull'asse ottico escono dal sistema ancora paralleli, ma inclinati di un angolo $u' = G_\mathrm{a} u$ (fig. O4–8, a sinistra). Se poi prendiamo un raggio parallelo all'asse, questo esce ancora parallelo all'asse, ma non alla stessa altezza: precisamente per $u = 0$ si ha $y' = \alpha y$. Considerando non un solo raggio ma un intero fascio, esso uscirà di diametro diverso, e $|\alpha|$ dà il rapporto dei diametri (fig. O4–8, a destra). Ma $\alpha\delta = 1$, dunque $\alpha = 1/\delta$; se, come di solito avviene, il primo e l'ultimo mezzo sono aria, la (O4.4) diventa

$$G_\mathrm{a} = \delta$$

e allora $\alpha = 1/G_\mathrm{a}$. Perciò il diametro dei fasci dà una misura dell'ingrandimento di un sistema telescopico.

Calcolo della matrice di un s.o.c.

Dopo aver visto come si possono ricavare le proprietà di un s.o.c. in approssimazione di Gauss, una volta nota la sua matrice, vogliamo ora mostrare come si può calcolare questa dalla costituzione del sistema. Un s.o.c. (diottrico, cioè composto di lenti) è completamente caratterizzato assegnando:

1) gli indici di rifrazione di tutti i mezzi;
2) i raggi di curvatura di tutte le superfici di separazione;
3) le distanze tra queste (tra i piani tangenti perpendicolari all'asse ottico).

Inoltre qualunque s.o.c. può essere considerato come formato di più componenti elementari in serie. Precisiamo: un s.o. limitato tra O e O′ può essere visto come due sistemi componenti in serie, limitati il primo da O a O_1, il secondo da O_1 a O′. Consideriamo un raggio che entra con le coordinate $\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$, passa in O_1 con le coordinate $\begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ ed esce in O′ con le coordinate $\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix}$. Avremo per il primo sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$$

e per il secondo

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Quindi per il sistema complessivo

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice del sistema complessivo è il prodotto delle matrici dei componenti, e questo risultato si generalizza a un numero qualsiasi di componenti.

Come componenti elementari conviene prendere:

a) il *diottro*, costituito di due mezzi d'indici di rifrazione n e n' separati da una sola superfice sferica di raggio R; i piani di riferimento si prendono coincidenti e passanti per il vertice del diottro;

b) lo *strato omogeneo*, che è semplicemente un mezzo di spessore d.

È chiaro che ogni s.o.c. è composto da una serie di sistemi elementari dei tipi *a*) e *b*) alternati: resta perciò solo da determinare le matrici dei due sistemi elementari.

Diottro: dalla fig. O4–9 si vede in primo luogo che, essendo in approssimazione di Gauss, $y = y'$. Il punto C è il centro della superfice sferica (il raggio R ha il segno di OC, positivo nel caso in figura) e chiaramente $y = Rv$ (si ricordi che v, i e i' sono piccoli in approssimazione di Gauss; in figura sono tutti positivi). Inoltre $u' = v - i'$ da cui

$$p' = -n'v + n'i' = -n'v + ni$$

(si è usata la legge della rifrazione $n \sin i = n' \sin i'$). Ma $i = v - u$ per cui ancora:

$$p' = -n'v + nv - nu = (n - n')\,\frac{y}{R} + p.$$

Si ottiene così:

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-n')/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$$

che è l'equazione fondamentale del diottro.

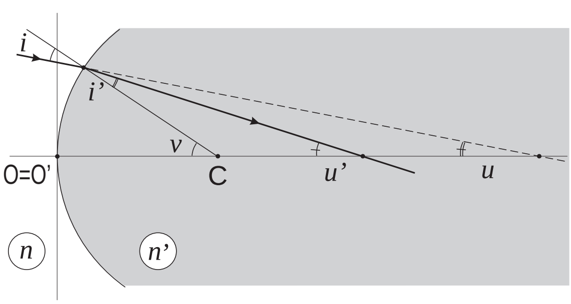

Fig. O4-9

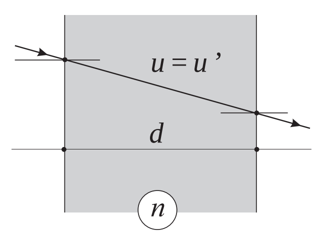

Fig. O4-10

Strato omogeneo: nello strato non c'è rifrazione, per cui ovviamente $p' = p$, mentre $y' = y - du = y + dp/n$ (fig. O4–10). Dunque

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$$

che è l'equazione fondamentale dello strato. (Si noti che entrambe le matrici hanno determinante 1, come doveva essere.)

Applichiamo ora i risultati al caso abbastanza semplice della lente spessa (fig. O4–11). Si ha una serie di un diottro, uno strato, un altro diottro. La matrice complessiva è

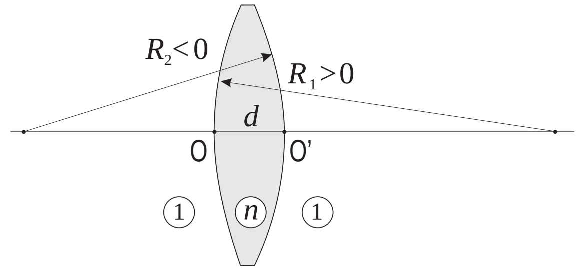

Fig. O4-11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-n)/R_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il prodotto, si ottiene facilmente la potenza

$$F = -\gamma = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n}\,\frac{d}{R_1 R_2}\right)$$

che nel caso di una lente sottile ($d = 0$) si semplifica in:

$$F = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Si verifica senza difficoltà che per la lente sottile $\alpha = \delta = 1$, $\beta = 0$, come doveva essere, visto che $\mathrm{O} \equiv \mathrm{O}' \equiv \mathrm{P} \equiv \mathrm{P}'$.