O3. Sistemi ottici centrati

Definizione

Nella gran parte dei casi i sistemi ottici di cui dobbiamo occuparci hanno un asse di simmetria, il che semplifica molto la trattazione (e anche la costruzione delle lenti e degli specchi). Porremo dunque la seguente definizione: *sistema ottico centrato* è un mezzo (o una successione di mezzi) in cui l'indice di rifrazione presenta una simmetria cilindrica intorno a un asse, che si dice *asse ottico* del sistema.

Preso l'asse di simmetria come asse x, e detta $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ la distanza di un punto da tale asse, si assume dunque che l'indice di rifrazione dipenda solo da x e da r: $n = n(x, r)$. Il problema è quello di studiare il percorso della luce che muovendosi nella direzione delle x positive incontra successivamente i vari elementi costituenti il sistema; elementi che nei casi pratici saranno solitamente lenti o specchi con le più varie caratteristiche. Nonostante la simmetria, il problema rimane complesso, ma si semplifica grandemente se sono lecite alcune approssimazioni che ora esamineremo.

Conviene studiare lo sviluppo di n in serie di potenze di r:

$$n(x, r) = n_0(x) + n_1(x)\, r + n_2(x)\, r^2 + \cdots \tag{O3.1}$$

dove

$$n_0(x) = n(x, 0) \qquad n_1(x) = \left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)_{r=0} \qquad n_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)_{r=0}.$$

Supponiamo che le derivate di n rispetto alle coordinate siano continue: allora, essendo

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial r}\frac{y}{r}$$

si vede che $\partial n/\partial r$ si deve annullare sull'asse ottico, perché y/r è discontinua (e lo stesso accade per tutte le derivate dispari). Pertanto la (O3.1) si semplifica:

$$n(x, r) = n_0(x) + n_2(x)\, r^2 + O(r^4).$$

L'approssimazione di Gauss

Supponiamo in primo luogo che il raggio rimanga *vicino* all'asse ottico (asse x) e teniamo quindi solo il primo termine significativo nello sviluppo in serie scritto sopra. Così facendo, poiché $\partial n/\partial x = dn_0/dx$ è solo funzione di x (a meno di $O(r^2)$), le prime due delle (O2–8) formano un sistema che contiene solo le incognite $x(s)$, $p_x(s)$:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{n_0}\, p_x \qquad \frac{dp_x}{ds} = \frac{dn_0}{dx} \tag{O3.2}$$

Supponiamo risolto il sistema (O3.2) e determinata la funzione $x(s)$, che assumeremo invertibile. Questa è un'ipotesi ragionevole in quanto corrisponde al caso in cui la luce, pur percorrendo una traiettoria varia, si muove sempre verso le x crescenti senza "tornare mai indietro" (fig. O3–1). Se questo è il caso, si potrà dunque determinare la funzione inversa $s = s(x)$ e sostituire questa nelle restanti equazioni del sistema (O2–8); ciò corrisponde a cambiare la parametrizzazione del raggio, usando in luogo dell'ascissa curvilinea s la coordinata cartesiana x.

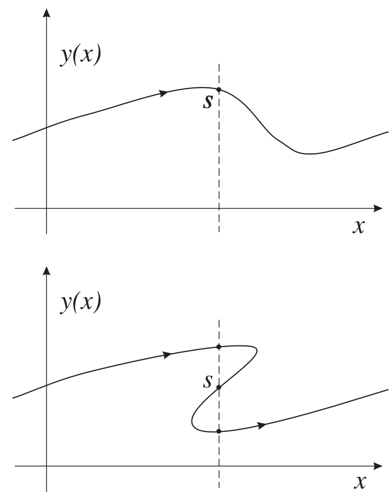

Fig. O3-1

Ricordando che

$$\frac{ds}{dx} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1} = \frac{n}{p_x}$$

otteniamo dalle (O2–8)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dx} = \frac{p_y}{p_x} \\ \frac{dp_y}{dx} &= \frac{dp_y}{ds}\,\frac{ds}{dx} = \frac{n}{p_x}\,\frac{\partial n}{\partial y} \simeq \frac{2\,n_0 n_2}{p_x}\,y. \end{aligned} \tag{O3.3}$$

Si noterà che nelle (O3.3) non figurano né z né p_z, cioè le due coppie y, p_y e z, p_z sono state separate.

Come ulteriore approssimazione supporremo adesso che sia $\tau_y \ll 1$, cioè che la luce compia un percorso *poco inclinato* sull'asse ottico. Se è così, potremo porre $p_x \simeq |\vec{p}| = n \simeq n_0$ e otterremo infine

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{n_0(x)}\,p_y \\ \frac{dp_y}{dx} &= 2\,n_2(x)\,y. \end{aligned} \tag{O3.4}$$

Il sistema (O3.4) descrive il percorso del raggio con le nostre approssimazioni.

Siamo così arrivati all'*approssimazione di Gauss*, individuata da due distinte asserzioni:

1. y piccolo $\Leftrightarrow$ raggi prossimi all'asse ottico (*parassiali*)
2. $\tau_y \ll 1 \Leftrightarrow$ raggi poco inclinati sull'asse ottico (*piccola vergenza*).

Equazioni del tutto identiche valgono per z, p_z: dunque basterà studiare le (O3.4) (per questo motivo nel seguito tralasceremo l'indice y in p_y).

Prime conseguenze dell'approssimazione di Gauss

Notiamo in primo luogo che le (O3.4) formano un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, lineari e omogenee (ma non a coefficienti costanti). È noto che per un sistema lineare omogeneo, se si trovano due coppie di funzioni che sono soluzioni del sistema, anche ogni loro combinazione lineare a coefficienti reali è soluzione del sistema. Indicando tali soluzioni con

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ p_1(x) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ p_2(x) \end{pmatrix}$$

quanto sopra ci dice che $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} y_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ ap_1 + bp_2 \end{pmatrix}$$

è ancora una soluzione del sistema. Questo significa che lo spazio delle soluzioni del sistema (O3.4) ha struttura di *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$, che indicheremo con $\mathcal{V}$.

Un teorema generale ci assicura che una volta assegnate, per una certa x_0, le condizioni iniziali $y(x_0)$ e $p(x_0)$, esiste una e una sola soluzione delle (O3.4). Assegnando cioè una coppia di valori che indicheremo più brevemente con y_0 e p_0, restano definite due funzioni $y(x)$ e $p(x)$ che verificano il sistema e danno per ogni x la distanza del raggio dall'asse ottico e la sua direzione. Ci chiediamo che dimensione abbia questo spazio, e la risposta è immediata osservando che:

1. per il teorema appena citato, c'è corrispondenza biunivoca tra un elemento di $\mathcal{V}$, cioè una coppia di funzioni $\begin{pmatrix} y(x) \\ p(x) \end{pmatrix}$ soluzioni del sistema, e la coppia dei numeri reali $\begin{pmatrix} y_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ che rappresentano le condizioni iniziali corrispondenti a quella soluzione;
2. le coppie $\begin{pmatrix} y_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$;
3. la corrispondenza tra $\mathcal{V}$ e $\mathbb{R}^2$ è un *isoformismo* $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$.

Ne segue che la dimensione di $\mathcal{V}$ è 2.

Esisteranno quindi *due* vettori (soluzioni del sistema) linearmente indipendenti, che potremo assumere come base dello spazio $\mathcal{V}$. La scelta più naturale è quella di ricorrere alla base "canonica" di $\mathbb{R}^2$, cioè ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e ai corrispondenti in $\mathcal{V}$. Considereremo dunque due coppie di soluzioni: la prima è quella che ha per condizioni iniziali il primo vettore della base di $\mathbb{R}^2$: la indicheremo con $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\omega}{\mapsto} \quad \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}.$$

La seconda invece sarà indicata con $\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}y_0\\ p_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \quad \underset{\omega}{\mapsto} \quad \begin{pmatrix}\beta(x)\\ \delta(x)\end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema è dato da tutte le combinazioni lineari di questa coppia di soluzioni, corrispondenti a condizioni iniziali ottenute con la medesima combinazione lineare delle condizioni iniziali:

$$\begin{pmatrix}y_0\\ p_0\end{pmatrix} = y_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + p_0\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \quad \underset{\omega}{\mapsto} \quad \begin{pmatrix}y(x)\\ p(x)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y(x)\\ p(x)\end{pmatrix} &= y_0\begin{pmatrix}\alpha(x)\\ \gamma(x)\end{pmatrix} + p_0\begin{pmatrix}\beta(x)\\ \delta(x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y_0\alpha(x) + p_0\beta(x)\\ y_0\gamma(x) + p_0\delta(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ \gamma(x) & \delta(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ p_0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{O3.5}$$

Vogliamo ora far vedere come sia possibile dedurre molte conseguenze notevoli per il nostro sistema ottico senza risolvere esplicitamente il sistema di equazioni differenziali (O3.4) e senza bisogno di conoscere soluzioni specificamente connesse con quel sistema ottico. Incominciamo dal

Teorema:

$$\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) = 1. \tag{O3.6}$$

Dim.: Mostriamo prima di tutto che la funzione $\alpha\delta - \beta\gamma$ è una costante.

Infatti derivando rispetto a x abbiamo:

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x)] = \frac{d\alpha}{dx}\,\delta + \alpha\,\frac{d\delta}{dx} - \frac{d\beta}{dx}\,\gamma - \beta\,\frac{d\gamma}{dx}.$$

Ma poiché si tratta di soluzioni del sistema (O3.4) possiamo porre

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{n_0}\,\gamma(x), \qquad \frac{d\gamma}{dx} = 2n_2\,\alpha(x), \qquad \text{ecc.}$$

per cui si ottiene:

$$\frac{d}{dx}[\alpha\delta - \beta\gamma] = \frac{1}{n_0}\gamma(x)\delta(x) + 2n_2\,\alpha(x)\beta(x) - \frac{1}{n_0}\delta(x)\gamma(x) - 2n_2\,\beta(x)\alpha(x) = 0.$$

Per far vedere che la costante vale proprio 1 basta allora calcolarla in un punto qualunque, in particolare per le condizioni iniziali:

$$\alpha(x_0)\delta(x_0) - \beta(x_0)\gamma(x_0) = 1. \;\blacksquare$$

Nota: Si riconoscerà, nell'espressione di cui tratta il teorema, il wronskiano delle due soluzioni $\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\beta\\ \delta\end{pmatrix}$; il teorema è dunque un caso particolare della teoria delle equazioni differenziali lineari.

Raggio marginale e raggio principale

Tornando al nostro sistema ottico, vediamo a che cosa corrisponde fisicamente la scelta delle due soluzioni particolari. Moltiplicando per y_0 e per p_0 le due condizioni iniziali, le relative soluzioni corrispondono ai due raggi indicati in fig. O3–2 nel piano (x, y).

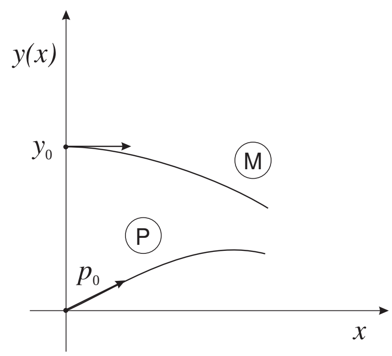

Fig. O3-2

Il primo raggio, indicato con M, parte parallelo all'asse x a una distanza y_0 da questo; il secondo, indicato con P, parte da un punto dell'asse x ($x = x_0$) formando un angolo (*vergenza*) $u = -p_0/n_0$ (dove $n_0 = n(x_0)$). Ricordiamo infatti che essendo $p = p_y \ll p_x \simeq |\vec{p}|$ si può porre

$$u = -\operatorname{arctg}\frac{p_y}{p_x} \simeq -\frac{p_y}{|\vec{p}|} = -\frac{p}{n}.$$

Nota 1: Il segno meno compare perché, uniformandoci alle notazioni tradizionali in ottica, considereremo positiva la vergenza u di un raggio che, attraversando l'asse ottico, passa da valori positivi a valori negativi di y (fig. O3–3).

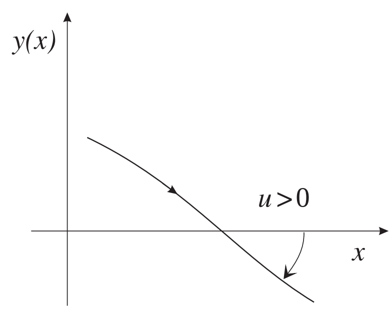

Fig. O3-3

Nota 2: Il prodotto $nu = -p$ si chiama di solito *vergenza ridotta.*

Il motivo per cui due raggi corrispondenti alle soluzioni indipendenti sono stati denominati M e P è che essi vengono per tradizione indicati come raggio *marginale* e *principale* rispettivamente, quando la condizione iniziale si riferisce a un ben preciso punto del sistema ottico. Rinviando al seguito una definizione più rigorosa di questi due termini, vediamo di utilizzare i due raggi per ricavare altre conseguenze generali sui sistemi ottici centrati.

Le due soluzioni indipendenti che corrispondono ai due raggi sono:

$$\mathsf{M}: \quad \begin{aligned} y(x) &= \alpha(x)\, y_0 \\ p(x) &= \gamma(x)\, y_0 \end{aligned}$$

$$\mathsf{P}: \quad \begin{aligned} y(x) &= \beta(x)\, p_0 \\ p(x) &= \delta(x)\, p_0. \end{aligned}$$

Supponiamo adesso che P incontri ancora l'asse ottico in un punto P′ di coordinata x': avremo allora $y(x') = 0$ da cui $\beta(x') = 0$ e $\delta(x') = 1/\alpha(x')$, essendo in x': $\alpha\delta = 1$ per la (O3.6). Riassumendo:

$$\mathsf{P}: \quad \begin{aligned} y(x') &= 0 \\ p(x') &= \frac{1}{\alpha(x')}\,p_0. \end{aligned}$$

Ma la condizione $\beta(x') = 0$ non dipende dal particolare raggio: quindi per ogni raggio si potrà porre (dalla (O3.5)):

$$\begin{aligned} y(x') &= \alpha(x')\,y_0 \\ p(x') &= \gamma(x')\,y_0 + \frac{1}{\alpha(x')}\,p_0. \end{aligned} \tag{O3.7}$$

La prima delle (O3.7) dice che $y(x')$ dipende solo da y_0, e non da p_0. Perciò un fascio di raggi uscenti da uno stesso punto Q nel piano perpendicolare in P all'asse ottico viene concentrato — indipendentemente dal cammino dei singoli raggi — in un punto Q′ del piano perpendicolare all'asse ottico in P′. Non solo: al variare di y_0, $y(x')$ varia in proporzione, cioè mantenendo costante un rapporto di similitudine pari ad $\alpha(x')$, che viene detto *ingrandimento*.

La coppia di punti Q e Q′ sono detti *coniugati* e Q′ è detta *immagine reale* di Q. Per quanto sopra, ogni punto del primo piano ha un punto coniugato nel secondo (in particolare P e P′ sono pure coniugati) e quindi anche i piani stessi sono detti tra loro coniugati.

Se il raggio P incontra più volte l'asse ottico, i diversi piani così individuati sono tutti tra loro coniugati. Su tutti questi piani $\beta(x) = 0$ e ciò permette di mostrare immediatamente che il prodotto $y_{\mathrm{M}}\,p_{\mathrm{P}}$ è costante su di essi: infatti

$$y_{\mathrm{M}}(x')\,p_{\mathrm{P}}(x') = \alpha(x')\,y_{0\mathrm{M}}\,\frac{1}{\alpha(x')}\,p_{0\mathrm{P}} = y_{0\mathrm{M}}\,p_{0\mathrm{P}}.$$

È facile mostrare allo stesso modo che se il raggio marginale M incontra l'asse in un punto x'' vale invece la relazione

$$y_{\mathrm{P}}(x'')\,p_{\mathrm{M}}(x'') = -y_{0\mathrm{M}}\,p_{0\mathrm{P}}.$$

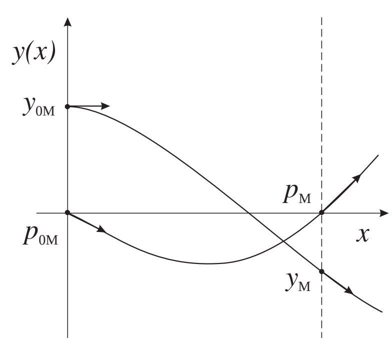

Fig. O3-4

La grandezza $y_{0\mathrm{M}}\,p_{0\mathrm{P}}$ è detta *invariante di Lagrange* della coppia di raggi M e P, in quanto dà il valore del prodotto tra la vergenza ridotta del raggio P e l'ordinata del raggio M o viceversa (a meno del segno), su tutti i piani in cui uno dei due raggi incontra l'asse (fig. O3–4).

Matrice di un sistema ottico tra mezzi omogenei

Consideriamo adesso un sistema fisico realistico, costituito da una successione di lenti, cioè da una serie di superfici di separazione tra mezzi omogenei aventi indice di rifrazione diversi. Ancora non c'interessa vedere il comportamento di ogni componente del sistema: ci basta supporre che la lunghezza in x del sistema sia finita, cioè che si possano individuare due piani per due punti O e O$'$, fuori dei quali l'indice di rifrazione si mantiene costante (sistema ottico centrato tra due mezzi omogenei).

Poiché la propagazione della luce in un mezzo omogeneo è banale (rettilinea), sarà sufficiente studiare le coordinate $\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix}$ del raggio uscente sul piano per O$'$, assumendo note quelle $\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}$ sul piano per O (fig. O3–5). Detta x_0 l'ascissa di O e x' quella di O$'$, delle funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ecc. è interessante conoscere adesso solo il valore in $x = x'$. Abbiamo così 4 numeri, che continueremo a indicare con $\alpha = \alpha(x')$, $\beta = \beta(x')$ ecc. La relazione tra le coordinate dei raggi in ingresso e in uscita è dunque:

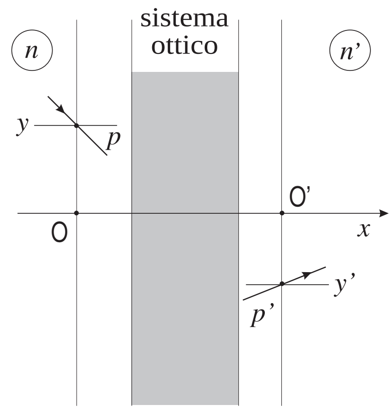

Fig. O3-5

$$\begin{pmatrix} y' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} \tag{O3.8}$$

e il sistema ottico è completamente definito da quei 4 numeri, anzi da 3 di essi, visto che è ancora $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Specchi

Da tutto quanto detto finora sembrano escluse le superfici riflettenti: sia perché abbiamo parlato sempre e soltanto di rifrazione, sia perché abbiamo esplicitamente supposto che la luce si propaghi nel sistema ottico senza mai tornare indietro. Se così fosse, si tratterebbe di una grave limitazione, vista l'importanza che hanno gli specchi negli strumenti astronomici.

Fortunatamente è possibile, con un espediente formale, far rientrare gli specchi nella trattazione fin qui fatta. L'idea è rappresentata nella fig. O3–7, dove è mostrato a sinistra il caso di uno specchio concavo, ma senza che ciò limiti la validità generale di quanto stiamo per dire.

Si tratta di sostituire al percorso effettivo dei raggi, che in conseguenza della riflessione invertono il verso di propagazione, un percorso “virtuale,” come mostrato a destra. Si disegna una superficie riflettente “speculare,” simmetrica rispetto al piano tangente allo specchio nel suo vertice, e si tracciano i raggi riflessi verso destra, a partire da tale superficie. In questo modo i raggi vanno sempre nel senso delle x crescenti, ed è solo un problema geometrico quello di ricavare $y(x)$, $p(x)$ al di là dello specchio dati y, p per una x prima dello specchio, usando la legge della riflessione.

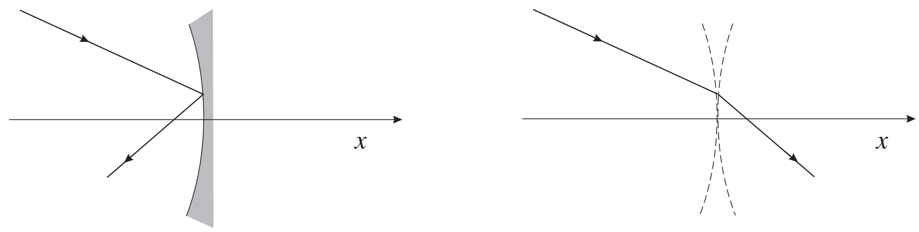

Fig. O3-6

Non entriamo nei dettagli, ma si può ancora introdurre l’approssimazione di Gauss, e quindi i coefficienti α, β, γ, δ, come in precedenza. Pertanto nel seguito non faremo più distinzione, e assorbiremo il caso degli specchi nella discussione generale.