O2. Introduzione all'ottica geometrica

Premessa

Lo studio degli strumenti astronomici non può prescindere dal comportamento ondulatorio della luce; tuttavia l'ottica geometrica è un punto di partenza necessario, sia perché costituisce una prima approssimazione, valida in numerose applicazioni, sia perché in ogni caso fornisce la base concettuale e la terminologia che vengono poi impiegate negli sviluppi più avanzati.

Limiteremo la nostra discussione ai mezzi *isotropi*, e supporremo, almeno all'inizio, di aver a che fare con un mezzo *continuo* e perfettamente trasparente per la radiazione che interessa. Le proprietà ottiche del mezzo saranno allora caratterizzate da una sola funzione scalare del punto: l'*indice di rifrazione* $n(x, y, z)$.

Nota 1: Il caso di mezzi omogenei diversi delimitati da superfici di separazione, che è di grande importanza pratica in tutti gli strumenti ottici, può essere visto come un caso limite di un mezzo continuo, in cui n varia (molto rapidamente) solo intorno alle superfici di separazione. Non bisogna però dimenticare che qaundo l'indice di rifrazione varia notevolmente in uno spessore dell'ordine della lunghezza d'onda, si presenta un fenomeno nuovo: la *riflessione parziale*, di cui qui non ci occuperemo ma che può avere importanza pratica nel progetto degli strumenti ottici, in quanto spesso costituisce un disturbo che occorre ridurre quanto possibile.

Nota 2: Com'è ben noto, l'indice di rifrazione in generale dipende dalla lunghezza d'onda della luce: perciò resterà sottinteso che si ha a che fare con luce *monocromatica*. Gli effetti prodotti dalla *dispersione* del mezzo, ossia dalle variazioni dell'indice di rifrazione con la lunghezza d'onda (in primo luogo l'*aberrazione cromatica*) verrano esaminati più avanti.

L'equazione del raggio

In un mezzo continuo non omogeneo i raggi di luce non sono in genere rettilinei: vogliamo ora ricavare una relazione tra la curvatura dei raggi e la variazione dell'indice di rifrazione. In fig. O2–1 è indicato uno straterello del mezzo, delimitato da due superfici di livello dell'indice di rifrazione, per i due valori n e $n + dn$. È anche indicato un raggio, che entra nello straterello con l'angolo d'incidenza i, ed esce con l'angolo $i + di$. Dalle leggi della rifrazione sappiamo che $n \sin i = \text{cost.}$; differenziando

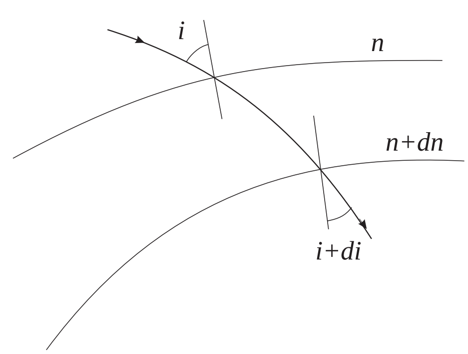

Fig. O2-1

$$\frac{dn}{n} + \frac{d\sin i}{\sin i} = 0 \quad\Rightarrow\quad di = -\frac{dn}{n}\,\mathrm{tg}\, i. \tag{O2.1}$$

La curvatura del raggio è espressa dalla variazione del versore $\vec{\tau}$ della tangente, in funzione della lunghezza s dell'arco. Precisamente:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{\varrho} \tag{O2.2}$$

dove $\vec{\nu}$ è il versore della normale principale e ϱ il raggio di curvatura, definito da

$$\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{di}{ds}\right|. \tag{O2.3}$$

Se introduciamo il versore $\vec{k}$ della normale alle superfici di livello di n, orientato nel senso in cui si propaga la luce, si verifica facilmente che

$$\vec{k} = \vec{\tau}\cos i \mp \vec{\nu}\sin i \quad \text{a seconda che} \quad \frac{di}{ds} \quad 0$$

(notare che $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ e $\vec{k}$ sono sempre complanari, per la seconda legge della rifrazione). Sostituendo per $\vec{\nu}$ nella (O2.2), e usando la (O2.1) e la (O2.3), troviamo:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{n\,\cos i}\,\frac{dn}{ds}\,(\vec{k} - \vec{\tau}\,\cos i).$$

Calcoliamo ora

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \frac{dn}{ds}\,\vec{\tau} + n\,\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dn}{ds}\,\vec{\tau} + \frac{1}{\cos i}\,\frac{dn}{ds}\,(\vec{k} - \vec{\tau}\,\cos i) = \frac{1}{\cos i}\,\frac{dn}{ds}\,\vec{k} = \frac{dn}{dx}\,\vec{k}$$

avendo orientato l'ascissa x come $\vec{k}$. Ma per definizione di gradiente l'ultima espressione coincide con $\vec{\nabla} n$, il che ci porta infine a

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \vec{\nabla} n. \tag{O2.4}$$

Questa è appunto l'*equazione del raggio*, che sta alla base dell'ottica geometrica.

Alla (O2.4) si può dare una forma più esplicita, pensando all'equazione parametrica del raggio $\vec{r} = \vec{r}(s)$ dove il vettore posizione del generico punto del raggio è scritto come funzione dell'ascissa curvilinea s. Sappiamo infatti che $\vec{\tau} = d\vec{r}/ds$: quindi

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla} n. \tag{O2.5}$$

La (O2.5) equivale a tre equazioni scalari:

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} \qquad \frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial z}$$

per le tre funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$.

Ponendo

$$\vec{p} = n\vec{\tau} \tag{O2.6}$$

si arriva a un'altra forma, che ci tornerà utile:

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{\nabla} n. \tag{O2.7}$$

Le (O2.6), (O2.7) scritte in coordinate cartesiane divengono:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{n}\,p_x \qquad & \frac{dp_x}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{n}\,p_y \qquad & \frac{dp_y}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{n}\,p_z \qquad & \frac{dp_z}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial z}. \end{aligned} \tag{O2.8}$$

Il cammino ottico

Sia P_0 una sorgente di luce puntiforme, e sia P un secondo punto su un raggio di luce γ emesso da P_0. Si definisce *cammino ottico* l'integrale

$$\int_\gamma n(x,y,z)\,ds$$

(qui γ indica a rigore l'*arco* di raggio, di estremi P_0 e P). Nel caso di un mezzo omogeneo n è costante e la luce si propaga in linea retta: perciò il cammino ottico non è altro che la distanza tra P_0 e P moltiplicata per l'indice di rifrazione del mezzo. Il nome di cammino ottico è d'immediata interpretazione se si tiene presente che nell'ottica ondulatoria n è il rapporto tra la velocità della luce c nel vuoto e quella u nel mezzo: $n = c/u$. Allora

$$\int_\gamma n\,ds = \int_\gamma \frac{c}{u}\,ds = \int_\gamma c\,dt = c\int_\gamma dt = c\,\Delta t.$$

Dunque il cammino ottico è la distanza che percorrerebbe la luce nel vuoto nello stesso tempo Δt.

Fissato il punto P_0 e scelto in modo arbitrario P, non è detto che tra i raggi che partono da P_0 ce ne sia sempre uno (e uno solo) che passa per P. È anzi facile vedere, pensando anche a una semplice lente, che possono presentarsi varie situazioni:

– può darsi che *nessun* raggio passi per P
– che ce ne siano *più d'uno*
– che siano addirittura *infiniti*.

Tuttavia si può dimostrare che esiste sempre un intorno di P_0 in cui il raggio per P esiste ed è unico. Per ora supporremo senz'altro di trovarci in queste condizioni.

Allora il cammino ottico può pensarsi come funzione di P: tale funzione è detta *iconale*

$$W(\mathrm{P}) = \int_\gamma n(x,y,z)\,ds. \tag{O2.9}$$

Si deve ricordare che l'integrale in (O2.9) è sempre calcolato *lungo il raggio* che unisce P_0 a P.

L'equazione dell'iconale

Il problema che ci poniamo adesso è questo: come cambia il cammino ottico variando di poco il raggio? Consideriamo quindi due raggi molto vicini, γ e γ', entrambi originati in P_0 e passanti rispettivamente per P e per P$'$ (fig. O2–2). Indicheremo con $\vec{r}(s)$ e con $\vec{r}\,' = \vec{r}(s) + \delta\vec{r}(s)$ le equazioni parametriche dei due raggi.

Cominciamo col supporre che i punti P, P$'$ corrispondano, sui due raggi, allo stesso valore $\bar{s}$ di s. Avremo allora:

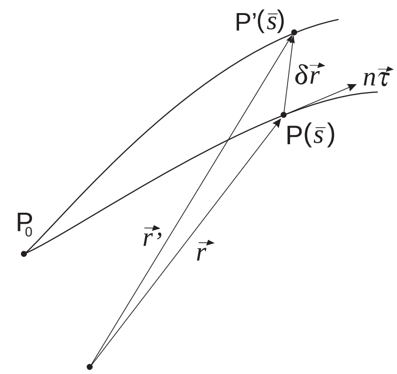

Fig. O2-2

$$\delta W = \delta \int_0^{\bar{s}} n\,ds = \int_0^{\bar{s}} \delta n\,ds. \tag{O2.10}$$

Quanto a δn, possiamo scrivere:

$$\delta n = \vec{\nabla} n \cdot \delta\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{ds} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{ds}(\vec{p}\cdot\delta\vec{r}) - \vec{p}\cdot\frac{d}{ds}\delta\vec{r}$$

e l'ultimo termine si trasforma così:

$$\vec{p}\cdot\frac{d}{ds}\delta\vec{r} = \vec{p}\cdot\delta\frac{d\vec{r}}{ds} = n\vec{\tau}\cdot\delta\vec{\tau} = 0$$

perché da $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$ segue appunto $\vec{\tau}\cdot\delta\vec{\tau} = 0$. Sostituendo δn nella (O2.10):

$$\delta W = (\vec{p}\cdot\delta\vec{r})_{\mathrm{P}}. \tag{O2.11}$$

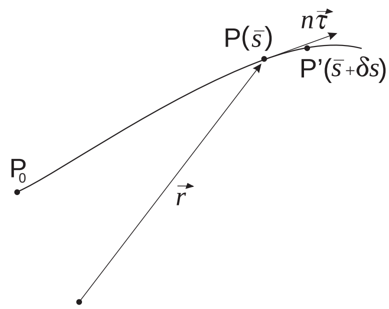

Fig. O2-3

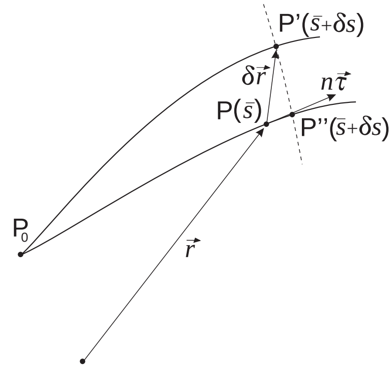

Fig. O2-4

Il secondo caso da considerare è che P$'$ si trovi sullo stesso raggio di P, ma a un diverso $s = \bar{s} + \delta s$ (fig. O2–3). Abbiamo $\delta s = \vec{\tau} \cdot \delta\vec{r}$, da cui

$$\delta W = n\,\delta s = n\,\vec{\tau} \cdot \delta\vec{r} = (\vec{p} \cdot \delta\vec{r})_{\mathrm{P}}.$$

Il caso generale può sempre essere scomposto nei due considerati (fig. O2–4), e perciò la (O2.11) ha validità generale.

Una conseguenza della (O2.11) è che *le superfici $W =$ cost. sono perpendicolari ai raggi*, e dunque la propagazione della luce potrà descriversi altrettanto bene usando i raggi, come usando l'iconale (fig. O2–5). La situazione è analoga a quella di un campo conservativo, dove le superfici equipotenziali descrivono il campo in modo equivalente alle linee di forza, che sono sempre perpendicolari a quelle.

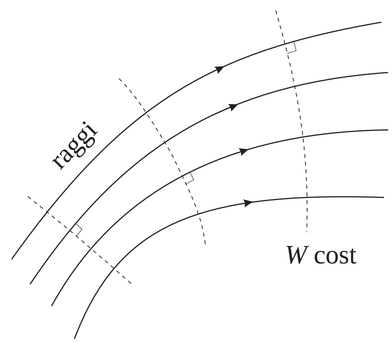

Fig. O2-5

Un importante caso particolare è il seguente: supponiamo che un sistema ottico sia tale che tutti i raggi emessi da una sorgente puntiforme P_0 arrivano in uno stesso punto P_1. In questo caso le superfici di livello di W in prossimità di P_1 sono sfere con centro in P_1 perché perpendicolari ai raggi; la sfera di raggio nullo coincidente con P_1 è anch'essa superficie di livello, il che vuol dire che il cammino ottico tra P_0 e P_1 *ha lo stesso valore lungo tutti i raggi.*

Dalla definizione di gradiente segue $\delta W = \vec{\nabla} W \cdot \delta\vec{r}$, che confrontata con la (O2.11) fornisce

$$\vec{\nabla} W = \vec{p} = n\vec{\tau} \tag{O2.12}$$

Prendendo i moduli dei due termini troviamo la cosidetta *equazione dell'iconale*:

$$\left|\vec{\nabla} W\right| = n \tag{O2.13}$$

che, scritta per esteso, diventa

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z)$$

Nota $n(x,y,z)$, questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, non lineare, per la funzione incognita W. Quando si sapesse risolvere, darebbe come soluzione $W(x,y,z)$ e quindi anche la configurazione dei raggi: l'equazione dell'iconale risolve dunque completamente il problema della propagazione della luce.

Il principio di Fermat

Siamo ora in grado di arrivare a un altro importante risultato: *il cammino ottico calcolato su un raggio è minimo* tra quelli che si possono calcolare su tutte le curve che uniscono P_0 e P_1 (in generale il cammino ottico è *stazionario*; ma nelle ipotesi in cui ci siamo messi, cioè che un solo raggio unisca P_0 e P_1, dimostreremo subito che è sempre minimo).

Dim.: Detto γ il raggio che unisce P_0 a P_1 e γ' un diverso arco di curva tra gli stessi punti, vogliamo provare che

$$\int\limits_{\gamma} n\,ds < \int\limits_{\gamma'} n\,ds.$$

Sappiamo che l'integrale di linea di un gradiente dipende solo dagli estremi e non dalla particolare curva seguita: dunque

$$\int\limits_{\gamma} \vec{\nabla} W \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma'} \vec{\nabla} W \cdot d\vec{r} \qquad \text{ovvero} \qquad \int\limits_{\gamma} \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma'} \vec{p} \cdot d\vec{r}$$

per la (O2.12). In entrambi gli integrali $\vec{p} = n\,\vec{\tau}$ è tangente al raggio che passa per il generico punto: è quindi sempre tangente a γ, ma in generale non lo è a γ'. D'altra parte $\vec{p} \cdot d\vec{r} \le |\vec{p}|\,|d\vec{r}| = n\,ds$ e l'uguaglianza vale solo se $\vec{p}$ e $d\vec{r}$ sono paralleli e concordi. Ciò è vero nel primo integrale, che è fatto lungo un raggio, ma non nel secondo; per cui in definitiva avremo:

$$\int\limits_{\gamma} n\,ds = \int\limits_{\gamma} \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma'} \vec{p} \cdot d\vec{r} < \int\limits_{\gamma'} n\,ds. \ \blacksquare$$