G6. Trasformazioni di coordinate

Generalità

Come si è visto, esistono numerosi sistemi di coordinate celesti che differiscono o per la diversa posizione dell'origine, o per il diverso orientamento, o per entrambe le cose. Ognuno di questi ha una sua specifica utilità a seconda del problema in esame, ma solo raramente si può trattare il problema utilizzando un solo SC.

Per fare un esempio, si voglia determinare se, a un certo istante, un pianeta sia ben visibile da una data località. Tralasciando per ora molti dettagli pure importanti, per prima cosa occorrerà determinare la posizione del pianeta nel sistema solare: per questo scopo il SC più naturale è quello eclittico eliocentrico. Successivamente si dovrà passare a un SC geocentrico e poi topocentrico; infine, per rispondere alla domanda che ci siamo posti, le coordinate da usare saranno quelle orizzontali. Vedremo poi che la trasformazione da coordinate eclittiche a orizzontali richiede, almeno concettualmente, di passare per le coordinate equatoriali.

In un contesto del tutto diverso, ci si può porre il problema di come siano distribuiti nello spazio gli ammassi globulari che si osservano sulla sfera celeste e di cui, per qualche via, si sia potuta determinare la distanza. In questo caso il dato osservativo è riferito in modo naturale al SC di catalogo delle stelle di campo (tipicamente equatoriali equinoziali a un'epoca standard), mentre la distribuzione che interessa sarà meglio riferita a un SC galattiche e galattocentriche.

Bastano questi pochi accenni per capire che il problema delle trasformazioni di coordinate è essenziale in astronomia: senza voler essere del tutto esaurienti, affronteremo questo problema nella sua generalità, mostreremo qualche trasformazione rilevante e concluderemo con qualche applicazione pratica.

Nella presente trattazione non si farà alcun uso della trigonometria sferica — cioè della trigonometria che si applica ai triangoli costruiti su una superficie sferica — com'è tradizionale nell'astronomia classica. Preferiremo l'uso di strumenti più consueti nella fisica (vettori, traslazioni, rotazioni), anche in considerazione del fatto che in questo modo la traduzione in algoritmi per un calcolatore è di gran lunga semplificata. In ogni caso, per comodità del lettore, alla fine del capitolo riportiamo le più utili relazioni della trigonometria sferica.

Fissato un certo punto di osservazione O (origine del SC) la posizione P di un oggetto è individuata dal vettore $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, eventualmente descritto in termini delle sue componenti cartesiane x, y, z, quando si siano definite le direzioni di una terna di assi ortogonali, ovvero dei tre versori di base. Se ci limitiamo alla descrizione della sfera celeste, ogni posizione, riferita al punto di osservazione (centro della sfera), è individuata da un versore; come si è detto al Cap. G1, in questo caso la distanza dell'oggetto considerato non è nota, o comunque non interessa.

È per noi interessante la relazione tra le coordinate sferiche del punto P e le componenti del vettore $\vec{r}$; anche perché, come si è visto sopra, i vari SC differiscono per l'orientamento. Per ogni SC verranno dunque fissati gli assi x e z; l'asse y risulterà definito di conseguenza, trattandosi in ogni caso di terne destrorse.

Nota: Nelle espressioni seguenti ci limiteremo ai punti della sfera celeste (di raggio unitario), cioè alle componenti dei versori.

A. *Coordinate Altazimutali (od Orizzontali)*: A, h

Assi: x verso Sud, z verso lo Zenit $\Rightarrow$ y verso Est (si noti che l'asse x punta in verso opposto all'origine degli azimut).

$$\begin{aligned} x &= -\cos h \cos A \\ y &= \cos h \sin A \\ z &= \sin h. \end{aligned} \tag{G6.1}$$

M. *Coordinate Equatoriali Meridiane*: H, δ

Assi: x verso il Mezzocielo superiore, z verso il Polo Nord Celeste $\Rightarrow$ y verso Est.

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta \cos H \\ y &= -\cos\delta \sin H \\ z &= \sin\delta. \end{aligned} \tag{G6.2}$$

E. *Coordinate Equatoriali Equinoziali*: α, δ

Assi: x verso Υ, z verso il Polo Nord Celeste.

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta \cos\alpha \\ y &= \cos\delta \sin\alpha \\ z &= \sin\delta. \end{aligned}$$

C. *Coordinate Eclittiche*: λ, β

Assi: x verso Υ, z verso il Polo Nord Eclittico.

$$\begin{aligned} x &= \cos\beta \cos\lambda \\ y &= \cos\beta \sin\lambda \\ z &= \sin\beta. \end{aligned}$$

G. *Coordinate Galattiche*: l, b

Assi: x verso il centro della Galassia, z verso il polo Nord galattico.

$$
\begin{aligned}
x &= \cos b \cos l \\
y &= \cos b \sin l \\
z &= \sin b.
\end{aligned}
$$

Abbiamo già accennato al fatto che le scelte dell'origine delle coordinate e dell'orientazione di queste sono indipendenti. Parlando di trasformazioni di coordinate manteniamo questa distinzione, dal momento che un cambiamento di origine, nell'ambito dello stesso SC, si realizza mediante una traslazione, mentre la trasformazione da un SC a un altro avente lo stesso centro corrisponde a una rotazione.

Traslazioni

Ci limiteremo a trattare brevemente due situazioni frequenti: la trasformazione da coordinate eliocentriche a geocentriche e quella da coordinate geocentriche a topocentriche (oltre che, naturalmente, le rispettive inverse).

Detti $\vec{r}_\mathrm{e}$ e $\vec{r}_\mathrm{g}$ i vettori che individuano la posizione di un oggetto nei due riferimenti, eliocentrico e geocentrico rispettivamente, occorre ancora conoscere la posizione della Terra rispetto al Sole, descritta dal vettore $\vec{\varrho}$. La trasformazione sarà allora:

$$\vec{r}_\mathrm{e} = \vec{\varrho} + \vec{r}_\mathrm{g}. \tag{G6.3}$$

Si vede che il calcolo di $\vec{r}_\mathrm{g}$ richiede di conoscere dell'orbita della Terra; di conseguenza $\vec{r}_\mathrm{g}$ dipende dal tempo attraverso $\vec{\varrho}$.

In modo assolutamente analogo si passa dal sistema geocentrico a quello topocentrico, quando sia noto il vettore $\vec{\varrho}\,'$ che definisce la posizione della località considerata rispetto al centro della Terra:

$$\vec{r}_\mathrm{g} = \vec{\varrho}\,' + \vec{r}_\mathrm{t}. \tag{G6.4}$$

Qui $\vec{r}_\mathrm{t}$ dipende ancora dal tempo, a causa della rotazione terrestre, a meno che non si lavori in un SC solidale alla Terra (altazimutali o equatoriali meridiane). Inoltre il calcolo di $\vec{r}_\mathrm{t}$ richiede la conoscenza della forma della Terra, delle coordinate geografiche del luogo, e della sua altitudine.

Rotazioni

Fissiamo adesso il centro di osservazione, scegliendo ad esempio sistemi geocentrici, e vediamo come si trasformano le coordinate da un sistema all'altro.

In tutti i casi si tratta di una rotazione e dunque può essere descritta mediante una matrice 3×3, ma non sempre è ovvio individuare l'asse e l'angolo di rotazione. È però sempre possibile ridurre una trasformazione alla composizione di più trasformazioni successive: se per queste è possibile scrivere le corrispondenti matrici, la trasformazione richiesta sarà data dal prodotto di quelle matrici.

Ci limiteremo ai tre casi più frequenti di trasformazione di coordinate:

1) A $\rightarrow$ M (*da Altazimutali a Equatoriali Meridiane*):

Rotazione attorno all'asse y di un angolo pari alla colatitudine del luogo $\varphi' = \pi/2 - \varphi$.

$$M_{\mathrm{MA}} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}. \tag{G6.5}$$

2) M $\rightarrow$ E (*da Equatoriali Meridiane a Equatoriali Equinoziali*):

Rotazione attorno all'asse z di un angolo Θ pari a $H(\gamma)$ (angolo orario del punto γ), dipendente dall'istante cui ci si riferisce. Si tratta del tempo siderale già introdotto nel cap. prec.

$$M_{\mathrm{EM}} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) E $\rightarrow$ C (*da Equatoriali Equinoziali a Eclittiche*):

Rotazione attorno all'asse x di un angolo pari all'obliquità dell'eclittica ε.

$$M_{\mathrm{CE}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Come esempio si consideri una stella di cui si siano misurate le coordinate altazimutali A, h e di cui si vogliano determinare le coordinate equatoriali meridiane H, δ. Dette x_{A}, y_{A}, z_{A} le componenti del versore che individua la direzione della stella nel sistema altazimutale, basta applicare ad esse la matrice (G6.5) per ottenere le componenti x_{M}, y_{M}, z_{M} del medesimo versore nel SC equatoriale meridiano:

$$\begin{pmatrix} x_{\mathrm{M}} \\ y_{\mathrm{M}} \\ z_{\mathrm{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{M}} &= x_{\mathrm{A}} \sin\varphi + z_{\mathrm{A}} \cos\varphi \\ y_{\mathrm{M}} &= y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{M}} &= -x_{\mathrm{A}} \cos\varphi + z_{\mathrm{A}} \sin\varphi. \end{aligned}$$

Esplicitando in termini delle coordinate polari tramite le (G6.1), (G6.2) si ha:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos H &= -\cos h\cos A\sin\varphi + \sin h\cos\varphi \\ \cos\delta\sin H &= -\cos h\sin A \\ \sin\delta &= \quad\cos h\cos A\cos\varphi + \sin h\sin\varphi \end{aligned} \tag{G6.6}$$

ricavando infine:

$$\begin{aligned} \delta &= \arcsin(\cos h\cos A\cos\varphi + \sin h\sin\varphi) \\ H &= \arcsin\left(-\frac{\cos h\sin A}{\cos\delta}\right). \end{aligned}$$

Si noti che nell'inversione delle funzioni trigonometriche relative alla coordinata ciclica (H in questo caso) sorge sempre il problema della corretta determinazione del quadrante; questo è uno motivi che inducono a preferire l'uso delle coordinate cartesiane, in modo da dover passare a coordinate polari solo alla fine del calcolo.

Prendendo ad esempio le coordinate eclittiche, mostriamo in dettaglio come si opera a partire dalle componenti cartesiane x_{C}, y_{C}, z_{C}. Detta ϱ la lunghezza della proiezione del versore sul piano dell'eclittica, potremo scrivere

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x_{\mathrm{C}}^2 + y_{\mathrm{C}}^2} \\ \beta &= \arcsin\frac{z_{\mathrm{C}}}{\varrho} \\ \lambda &= \operatorname{arctg}\frac{y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{C}}}. \end{aligned}$$

Nella determinazione di λ il quadrante verrà poi fissato analizzando i segni di x_{C} e y_{C}.

Negli altri casi si procede in modo analogo, facendo attenzione all'origine e al verso della coordinata ciclica: ad esempio, nelle coordinate orizzontali l'origine è fissata a Nord (verso negativo del corrispondente asse x) e il verso è orario.

Le relazioni fondamentali della trigonometria sferica

Invertendo l'ordine storico e la tradizione, possiamo usare le formule di trasformazione viste sopra, per es. quelle da altazimutali a equatoriali meridiane, per ricavare le relazioni base della trigonometria sferica.

Consideriamo infatti la fig. G6–1, dove si vedono: una stella S, lo zenit Z e il polo nord celeste P. Questi tre punti costituiscono il cosiddetto *triangolo fondamentale*. Nella figura sono anche indicati i *lati* del triangolo (archi della sfera celeste) e due degli *angoli*: come si può vedere, i lati sono rispettivamente i complementi φ', δ', h' della latitudine del luogo, della declinazione della stella e della sua altezza; l'angolo in Z vale $A' = 2\pi - A$, e quello in P coincide con H.

Tenendo conto di tutto ciò, le (G6.6) si scrivono:

$$
\begin{aligned}
\sin\delta'\cos H &= -\sin h'\cos A'\cos\varphi' + \cos h'\sin\varphi' \\
\sin\delta'\sin H &= \sin h'\sin A' \\
\cos\delta' &= \sin h'\cos A'\sin\varphi' + \cos h'\cos\varphi'.
\end{aligned}
\tag{G6.7}
$$

Ovviamente la validità delle (G6.7) non dipende dal significato di lati e angoli come coordinate celesti; se quindi sostituiamo i nomi P, S, Z con dei generici A, B, C, designiamo i lati opposti con le corrispondenti lettere minuscole, e gli angoli con α, β, γ, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\sin c\cos\alpha &= \cos a\sin b - \sin a\cos b\cos\gamma \\
\sin c\sin\alpha &= \sin a\sin\gamma \\
\cos c &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma.
\end{aligned}
\tag{G6.8}
$$

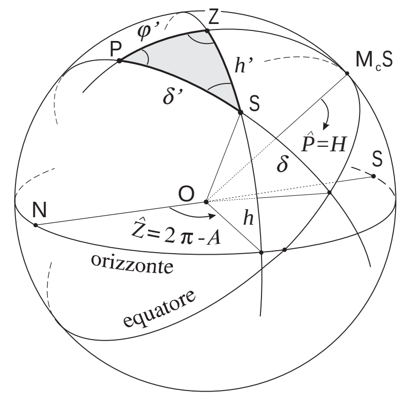

Fig. G6-1

Le (G6.8) esprimono i tre teoremi base della trigonometria sferica: la prima è il *teorema delle proiezioni*, la seconda il *teorema dei seni* e la terza il *teorema del coseno*. Non è difficile verificare che se $a, b, c \ll 1$, ossia se il triangolo sferico può essere confuso con un triangolo piano, le (G6.8) divengono le omonime formule della trigonometria piana, il che giustifica i nomi.

È spesso utile avere presente il caso particolare di un triangolo rettangolo. Sia ad es. $\gamma = \pi/2$ (fig. G6–2): si ha allora

$$
\begin{aligned}
\sin c\cos\alpha &= \cos a\sin b \\
\sin c\sin\alpha &= \sin a \\
\cos c &= \cos a\cos b
\end{aligned}
$$

e dividendo la prima per la terza:

$$
\mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, c\cos\alpha \tag{G6.9}
$$

mentre dividendo la seconda per la prima:

$$
\mathrm{tg}\, a = \sin b\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{G6.10}
$$

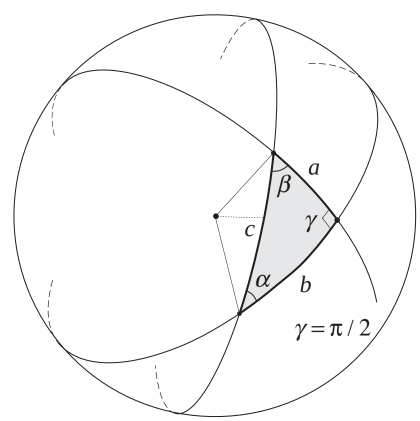

Fig. G6-2