CAPITOLO 27

Sorgenti di onde gravitazionali

Dobbiamo ora occuparci dell'emissione di onde gravitazionali, per collegarla alle caratteristiche dinamiche delle sorgenti. Potremo così discutere quali siano le sorgenti astrofisiche di onde e la relativa potenza; avremo allora i dati per esaminare le possibilità di rivelazione.

Una teoria completa dell'emissione di onde gravitazionali occuperebbe troppo spazio nell'economia del corso; ci limiteremo dunque a un ragionamento analogico, basato su risultati noti per le onde e.m. Ricordiamo un'espressione per il campo di radiazione e.m. emesso da una distribuzione di cariche:

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 R} \left\{ \left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n} \right) \times \vec{n} + \left(\dddot{\vec{q}} \times \vec{n} \right) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{\mu}} \right\} \tag{27–1}$$

L'espressione (27–1) dà i primi termini di uno sviluppo in multipoli: R è la distanza tra sorgente e osservatore, $\vec{n}$ il vettore unitario nella direzione di $\vec{R}$. I vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{\mu}$ sono così definiti:

$$\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a$$

è il *momento di dipolo elettrico*; $\vec{q}$ è dato in termini del *momento di quadrupolo elettrico* Q^{ij} come segue:

$$q^i = \frac{1}{2c} Q^{ij} n_j$$

e infine il *momento di dipolo magnetico* è

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a.$$

Dalla (27–1) si calcola subito la luminosità e.m., ossia la potenza irraggiata:

$$L_{\mathrm{em}} = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{p}} \right|^2 + \frac{1}{20c^5} \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} + \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{\mu}} \right|^2 \tag{27–2}$$

dalla quale si vede che i termini di dipolo elettrico, di quadrupolo elettrico e di dipolo magnetico danno contributi additivi alla luminosità totale (integrata su tutte le direzioni).

Nota: In tutte le formule che precedono, come nelle successive, gli indici vengono alzati e abbassati con la metrica euclidea, quindi senza problemi di segno.

Dobbiamo ora trasportare tutte le relazioni viste, e in particolare la (27–2), al caso gravitazionale. È ovvio che si potranno introdurre anche in questo caso i diversi momenti di multipolo, con la sola sostituzione delle masse alle cariche. Abbiamo quindi in primo luogo

$$\vec{p} = \sum_a m_a \vec{r}_a$$

e si vede che $\ddot{\vec{p}} = 0$ per la conservazione della quantità di moto. Analogamente

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a$$

e questa volta è già $\dot{\vec{\mu}} = 0$ (conservazione del momento angolare).

Resta quindi solo il termine di quadrupolo "elettrico," la cui definizione è

$$Q^{ij} = \sum_a m_a (x_a^i x_a^i - \tfrac{1}{3} r_a^2 \, \delta^{ij}).$$

Come si vede, il momento di quadrupolo è la parte a traccia nulla del tensore d'inerzia. Al posto della (27–2) la RG fornisce, se usiamo le unità geometriche ($c = 1$, $G = 1$),

$$L_{\mathrm{grav}} = \tfrac{1}{5} \, \langle \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} \rangle \tag{27–3}$$

dove $\langle \ldots \rangle$ indica una media temporale. Anche la (27–3) è valida se sono trascurabili i multipoli di ordine superiore.

È bene non dimenticare che la (27–3), come del resto la (27–2), è approssimata: può dare un risultato utile solo quando le dimensioni del sistema sono piccole rispetto alla lunghezza della radiazione emessa, oppure — il che è lo stesso — quando le velocità sono piccole. Inoltre la (27–3) è valida in approssimazione di campo debole, con le ulteriori limitazioni che ciò comporta per i rapporti M/R nel sistema che emette.

La trasformazione della (27–3) alle unità consuete richiede d'introdurre la giusta combinazione di potenze di c e di G. A questo scopo osserviamo che $\dddot{Q}$ ha esattamente le dimensioni di una potenza (luminosità), e che quindi la (27–3) va divisa per una luminosità. Con c e G si può costruire una sola grandezza con le giuste dimensioni:

$$L_0 = \frac{c^5}{G} = 3.6 \cdot 10^{59} \, \mathrm{erg/s}$$

per cui la (27–3) diventa

$$L_{\mathrm{grav}} = \frac{G}{5c^5} \, \langle \dddot{Q}^{ij} \dddot{Q}_{ij} \rangle.$$

Ordini di grandezza

Per avere un'idea degli ordini di grandezza in gioco, conviene anzitutto osservare che L_0 è pari alla luminosità di almeno 10^{15} delle più grandi galassie conosciute.

È anche utile un'intepretazione semiqualitativa di $\dddot{Q}$, per un sistema di masse che si muova di moto periodico (come ad es. una stella binaria). Il tensore d'inerzia avrà un ordine di grandezza pari al prodotto della massa del sistema per il quadrato del suo diametro: MR^2. La derivata terza richiederà di dividere per la terza potenza del periodo; quindi $\dddot{Q} \sim MR^2/T^3$. Ma R/T dà una tipica velocità del moto, e si arriva a $\dddot{Q} \sim Mv^2/T$. Poiché Mv^2 è l'energia cinetica del sistema, abbiamo $\dddot{Q} \sim E_{\rm cin}/T$. Il significato di $E_{\rm cin}/T$ è il seguente: l'energia cinetica è localizzata, a un certo istante, là dove si trovano le masse. Nel corso del moto queste si spostano, cambiando completamente posizione in un tempo dell'ordine di T. Dunque $E_{\rm cin}/T$ misura la potenza del trasporto di energia interno al sistema, e possiamo chiamarla $L_{\rm int}$. Concludendo: la (27–3) ci dice che la potenza irraggiata è dell'ordine del quadrato della potenza interna:

$$L_{\rm grav} \sim L_{\rm int}^2$$

dove è inteso che le luminosità sono misurate in unità L_0.

Procediamo con la stima degli ordini di grandezza: in un sistema legato gravitazionalmente l'energia cinetica è dello stesso ordine dell'energia potenziale, e possiamo stimarla come M^2/R. D'altra parte la terza legge di Keplero ci dice che $R^3 \sim MT^2$. Eliminando T:

$$L_{\rm grav} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5. \qquad (27\text{–}4)$$

La (27–4) mostra che la radiazione gravitazionale cresce molto rapidamente col rapporto M/R, che è necessariamente minore di 1, e anzi molto minore salvo casi estremi. Ricordiamo infatti che qui M è misurato in unità di lunghezza, e perciò $M \gtrsim R$ corrisponderebbe a un buco nero. A titolo di esempio, per due stelle di massa solare, a distanza di un'unità astronomica, $M/R \simeq 10^{-8}$, che porta a $L_{\rm grav} \sim 10^{-40}\,L_0 \simeq 10^{19}\,\text{erg/s} \simeq 10^{-14} L_\odot$. Basta però passare a $M/R \simeq 10^{-5}$ per trovare $L_{\rm grav} \simeq 10\,L_\odot$.

Gli eventi dai quali ci si può aspettare una radiazione gravitazionale osservabile sono le esplosioni di supernovæ e meglio ancora il conseguente collasso gravitazionale del nucleo a formare un buco nero. Le antenne in costruzione, come quelle già realizzate, mirano a rivelare questi oggetti. Per avere un'apprezzabile frequenza degli eventi occorre poterli rivelare anche se avvengono in altre galassie.

Caso di un sistema binario

L'emissione di onde gravitazionali comporta perdita di energia del sistema. Vediamone le conseguenze osservabili, pensando per semplicità a un sistema binario composto di due masse uguali m. Sappiamo che l'energia dipende solo dal semiasse maggiore dell'orbita relativa, e dalle masse:

$$E = -\frac{m^2}{8a}.$$

Perciò una variazione di E comporta una variazione di a:

$$\frac{dE}{E} = \frac{da}{a}.$$

Essendo $dE/dt \propto -(m/a)^5$, ne segue

$$\frac{da}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^3$$

e usando la relazione di Keplero $a^3 \propto m\,T^2$:

$$\frac{dT}{dt} \propto -\left(\frac{m}{a}\right)^{5/2} \propto -\left(\frac{a}{T}\right)^5 \propto -\left(\frac{m}{T}\right)^{5/3}.$$

Si vede che tanto il semiasse quanto il periodo decrescono nel tempo, e questi potrebbero essere effetti osservabili. Entrambi vanno come una potenza di m/a, che sarà bene quindi prendere il più grande possibile. La sola speranza è quindi un sistema binario formato da oggetti compatti (come le stelle di neutroni) che possono stare a distanze non troppo più grandi del loro raggio di Schwarzschild. Vedremo nel prossimo capitolo che sistemi del genere esistono, e sono stati osservati e misurati.