CAPITOLO 26

Le onde gravitazionali: introduzione

Dedicheremo questo capitolo e i seguenti alla discussione di una delle più importanti previsioni della RG: appunto l'esistenza di *onde gravitazionali.* Dovremo esaminare tre aspetti:

– che cosa sono le onde gravitazionali dal punto di vista della teoria

– quali effetti osservabili producono (in particolare, come possono essere rivelate)

– come vengono prodotte.

Cominciamo col dire che anche un'onda gravitazionale è una geometria dello spazio-tempo, che studieremo in assenza di materia (a parte ovviamente la sorgente). Si tratterà dunque di una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto: $\mathbf{G} = 0$.

Come vedremo, in molte situazioni d'importanza pratica le onde gravitazionali sono assai deboli, il che è quanto dire che possiamo studiarle come una piccola perturbazione rispetto a una *geometria di fondo.* Per semplicità, supporremo che la geometria di fondo sia lorentziana, ossia trascureremo la curvatura dello spazio-tempo di origine cosmologica, o quella prodotta da sorgenti locali, come la Terra.

Siamo dunque nel campo di validità della teoria linearizzata già vista al Cap. 16:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{26–1}$$

Ricordiamo che ponendo

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} h\, \eta_{\alpha\beta} \tag{26–2}$$

e scegliendo opportunamente la gauge, le equazioni di Einstein nel vuoto assumono la forma

$$\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \tag{26–3}$$

con associata la condizione di Lorentz

$$\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\beta} = 0. \tag{26–4}$$

Le (26–3), (26–4) ammettono ancora un'invarianza di gauge, sempre del tipo

$$h_{\alpha\beta} \mapsto h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$$

solo che ora ξ_α non è del tutto arbitrario: si verifica senza difficoltà che occorre la condizione

$$\Box \xi_\alpha = 0. \tag{26–5}$$

Fino a questo punto il tensore $\bar{h}_{\alpha\beta}$ ha 6 componenti indipendenti: infatti ne avrebbe 10 in quanto simmetrico, ma ci sono le 4 condizioni (26–4). Si può sfruttare la residua invarianza di gauge per dimostrare che in realtà le componenti indipendenti sono soltanto due: per vederlo, conviene ragionare su di un tipo particolare di soluzioni.

Onde piane monocromatiche

Le (26–3), (26–4), in quanto lineari e invarianti per traslazioni in tutte e quattro le coordinate, ammettono soluzioni piane monocromatiche:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \exp(ik_\lambda x^\lambda) \tag{26–6}$$

dove le $a_{\alpha\beta}$ sono costanti complesse. Perché le (26–6) soddisfino le (26–3) occorre e basta che sia $k_\lambda k^\lambda = 0$, e questa ci dice che l'onda si propaga con la velocità della luce. Dalle (26–4) segue poi $k^\beta a_{\alpha\beta} = 0$ e le ampiezze indipendenti non sono 10, ma 6.

Applichiamo ora alle (26–6) una trasformazione di gauge del tipo

$$\xi_\alpha = b_\alpha \exp(ik_\lambda x^\lambda)$$

(che soddisfa automaticamente le (26–5)); si verifica che è possibile scegliere le 4 costanti b_α in modo tale che sia

$$\bar{h}_{\alpha 0} = 0 \qquad \bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0. \tag{26–7}$$

La seconda delle (26–7) ci dice che la traccia di $\bar{h}_{\alpha\beta}$ è nulla: ricordando la relazione (26–2) tra $h_{\alpha\beta}$ e $\bar{h}_{\alpha\beta}$ si vede che ora i due tensori coincidono.

La prima delle (26–7) ci dice invece che $h_{\alpha\beta}$ ha solo le componenti spaziali h_{ij}, che sono soggette alle seguenti condizioni:

$$\Box h_{ij} = 0 \tag{26–8}$$

$$h^{ij}{}_{,j} = 0 \qquad h^i{}_i = 0. \tag{26–9}$$

Per un'onda piana la prima delle (26–9) diventa $k_j h^{ij} = 0$, ossia l'onda non ha componenti nella direzione di propagazione. Si riassumono le (26–9) dicendo che un'onda gravitazionale piana monocromatica può sempre essere messa — con opportuna trasformazione di gauge — in forma *trasversale e a traccia nulla* (TT). Poiché le (26–9) sono in totale 4 equazioni, risulta dimostrato per un'onda piana monocromatica che *le componenti indipendenti di h_{ij} sono soltanto due.*

D'altra parte ogni soluzione delle (26–3), (26–4) può essere scritta come sovrapposizione di onde piane monocromatiche (integrale di Fourier); dato che le (26–7), (26–8), (26–9) sono lineari, esse saranno soddisfatte da qualsiasi soluzione, e questo dimostra che *tutte le onde gravitazionali possono essere ridotte*, per mezzo di una trasformazione di gauge, *alla forma* TT. D'ora in poi supporremo sempre di essere in queste condizioni.

Stati di polarizzazione

Abbiamo visto che le componenti indipendenti di un'onda gravitazionale sono sempre due; ciò equivale a dire che esistono due soli stati di polarizzazione (indipendenti). Ancora una volta la situazione è analoga a quella di un'onda e.m. La differenza è che l'onda e.m. è descritta da un campo vettoriale (in gauge di Coulomb dal potenziale vettore) e si usano perciò le polarizzazioni lineari secondo direzioni ortogonali. Tutti gli altri stati di polarizzazione, ad es. quelli circolari, si ottengono da combinazioni lineari di questi.

Nel caso gravitazionale abbiamo a che fare con un tensore e gli stati di polarizzazione sono descritti in modo diverso. Supponiamo, per fissare le idee, che l'onda si propaghi in direzione z; allora le sole componenti diverse da zero sarnno h_{xx}, h_{xy}, h_{yx}, h_{yy}. Ci sono però dei vincoli: $h_{xy} = h_{yx}$ per la simmetria e $h_{xx} + h_{yy} = 0$ perché la traccia è nulla. Abbiamo quindi due scelte indipendenti, ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(polarizzazione +)}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(polarizzazione } \times\text{)}$$

Una delle differenze è che mentre nel caso e.m. una delle polarizzazioni si ottiene dall'altra con una rotazione di 90°, ora si passa da $+$ a $\times$ ruotando di 45°.

Possiamo vedere la questione dal punto di vista quantistico come segue: è noto che gli stati di polarizzazione circolare di un'onda e.m. corrispondono a fotoni che trasportano un'unità di momento angolare ($\pm\hbar$) rispetto alla direzione di propagazione (elicità). Il fatto che siano possibili solo due valori per l'elicità è strettamente connesso con la massa nulla dei fotoni e con l'equazione di d'Alembert cui obbediscono i campi. Infatti si dimostra che per una particella di massa nulla l'elicità è invariante per trasformazioni di Lorentz: quindi il valore dell'elicità è una proprietà intrinseca della particella, come la massa. Che si presentino due valori opposti dell'elicità, dipende dal fatto che questa s'inverte per riflessioni, e quindi una teoria invariante anche per riflessioni deve ammettere particelle di entrambe le elicità.

La stessa cosa accade nel caso gravitazionale: la quantizzazione del campo (che per ora si sa fare solo nel caso limite di campo debole) porta a "gravitoni" che trasportano *due* unità di momento angolare (elicità $\pm 2\hbar$). Anche i gravitoni hanno massa nulla (eq. (26–3)) e di conseguenza possono esistere solo nei due stati di elicità massima. Un po' impropriamente possiamo dire che "i gravitoni hanno spin 2."

Effetti osservabili delle onde gravitazionali

Dal momento che un'onda gravitazionale è una particolare curvatura dello spazio-tempo, dobbiamo aspettarci che produca gli effetti che sappiamo associati a tale curvatura. Cominciamo perciò calcolando il tensore di Riemann per un'onda in gauge TT: si trova

$$R^i{}_{0k0} = \tfrac{1}{2} h_{ik,00}$$

e tutte le altre componenti sono nulle.

Riprendiamo ora l'eq. (16–2) per l'accelerazione di marea e otteniamo

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -R^i{}_{0k0}\,\xi^k = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi^k \qquad (26\text{–}10)$$

che s'interpreta come segue: se abbiamo due masse libere in un RIL, in una regione investita da un'onda gravitazionale, esse oscilleranno secondo la (26–10). La loro distanza in generale varierà nel tempo, e questo è un effetto osservabile, come quello prodotto da una forza di marea statica.

In particolare, supponiamo (come di solito accade) $|h_{ik}| \ll 1$: allora l'ampiezza dell'oscillazione sarà piccola rispetto alla distanza media, e possiamo approssimare la (26–10) con

$$\frac{d^2\delta\xi^i}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi_0^k$$

dove ξ_0 indica la posizione media e $\delta\xi$ lo scostamento dalla media. Integrando:

$$\delta\xi^i = -\tfrac{1}{2}h_{ik}\,\xi_0^k \qquad (26\text{–}11)$$

e si vede che $\delta\xi/\xi$ è dello stesso ordine di h.

Se invece le due masse sono collegate elasticamente avremo

$$\frac{d^2\delta\xi^i}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\ddot{h}_{ik}\,\xi_0^k - \omega_0^2\,\delta\xi^i$$

e per onde monocromatiche di frequenza ω questa s'integra immediatamente:

$$\delta\xi^i = \frac{\omega^2 h_{ik}\,\xi_0^k}{2(\omega_0^2 - \omega^2)}. \qquad (26\text{–}12)$$

Rispetto alla (26–11) abbiamo il fattore di risonanza $\omega^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$, nel quale ovviamente abbiamo trascurato l'effetto dello smorzamento dell'oscillatore.

I due casi (26–11) e (26–12) descrivono — in estrema semplificazione — i due tipi di antenne gravitazionali in uso o in costruzione: la prima corrisponde al sistema LIGO (VIRGO) dove le masse sono libere, e la sensibilità viene aumentata realizzando più grande possibile la loro distanza ξ_0; il secondo rappresenta invece il classico sistema di Weber, dove la molla è costituita dalla stessa elasticità del blocco rigido che costituisce l'antenna.

La sensibilità di VIRGO, a frequenze di 100 Hz e con tempi d'integrazione dell'ordine di un anno, dovrebbe arrivare a 10^{-26}: vogliamo ora vedere che cosa ciò significa in termini di energia. A questo scopo abbiamo bisogno di una formula, che non possiamo qui giustificare, per la densità di energia di un'onda gravitazionale:

$$T_{00} = \frac{1}{32\pi} \langle \dot{h}_{ik} \dot{h}^{ik} \rangle$$

dove la media va intesa su regioni spaziali grandi rispetto a una lunghezza d'onda, e su tempi lunghi rispetto a un periodo.

Per un'onda monocromatica $h_{xx} = -h_{yy} = a \cos(kz - \omega t)$ si trova

$$T_{00} = \frac{1}{32\pi} \omega^2 a^2$$

che bisogna moltiplicare per c^2/G se vogliamo usare unità ordinarie, e ancora per c per avere l'intensità. Dunque

$$S = \frac{c^3 \omega^2 a^2}{32\pi G}. \qquad (26\text{–}13)$$

Con i dati che abbiamo assunti in precedenza ($a = 10^{-26}$, $\omega = 600\,\mathrm{rad/s}$) si trova $S = 10^{-10}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}}$.

Per stimare questo risultato, confrontiamolo con la radiazione e.m. totale che arriva da una stella: si ottiene la stessa intensità per stelle di magnitudine 13, ossia visibili già con un piccolo telescopio. Le stelle più deboli che si possono rivelare con gli strumenti odierni hanno intensità inferiori per almeno 4 ordini di grandezza. Questo ci porta a una prima conclusione: la rivelazione delle onde gravitazionali è molto meno efficiente di quella delle onde e.m. Quando avremo valutato, più avanti, la potenza emessa da sorgenti realistiche, potremo anche concludere che non si può dire invece che l'emissione sia debole in assoluto.