

## CAPITOLO 24

### Dinamica cosmologica

Nel cap. prec. abbiamo scritto le equazioni dinamiche per un universo omogeneo e isotropo, e abbiamo discusso i diversi contributi alla materia. Vogliamo ora studiare l'evoluzione che risulta da quelle equazioni; per far ciò sarà necessario assumere scelte particolari per l'equazione di stato della materia. Sappiamo che al tempo presente la pressione può essere trascurata, ma questo non è più vero quando  $R$  è piccolo, perché il contributo della radiazione va come  $1/R^4$ , e perciò finisce necessariamente per dominare.

È dunque ragionevole supporre che l'equazione di stato reale sia compresa fra due casi estremi:

- $p = 0$  (modello di Friedmann)
- $p = \frac{1}{3}\varrho$  (modello di Tolman).

Come vedremo i due modelli danno andamenti qualitativamente simili: possiamo quindi aspettarci che anche l'evoluzione reale segua lo stesso andamento. In particolare, entrambi i modelli presentano una *singolarità*: su questo punto torneremo più avanti.

Dato che siamo soprattutto interessati alle fasi iniziali dell'evoluzione, trascureremo il termine cosmologico.

### Il modello di Friedmann

Le equazioni di questo modello sono la (23-7) e la (23-4):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho$$

$$\varrho R^3 = \text{cost.} = \varrho_0 R_0^3$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8}{3}\pi\varrho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \quad (24-1)$$

Conviene porre  $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^3 = R_*$ , dopo di che la (24-1) diventa

$$\dot{R}^2 + k = \frac{R_*}{R}. \quad (24-2)$$

La (24-2) si può integrare elementarmente in tutti i e tre i casi  $k = +1, 0, -1$ . Esaminiamoli separatamente.

Caso  $k = 1$ : La soluzione si esprime in funzione di una variabile ausiliaria  $\eta$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}R_* (1 - \cos \eta) \\ t &= \frac{1}{2}R_* (\eta - \sin \eta). \end{aligned} \tag{24-3}$$

Si noti che  $\eta$  è la stessa coordinata temporale usata nella (8-1), e già apparsa nel Cap. 22. La sola differenza è che mentre nello studio del collasso gravitazionale conveniva prendere l'origine di  $\eta$  e di  $t$  all'inizio del collasso, ossia al massimo di  $R$ , qui abbiamo messo l'origine all'inizio dell'espansione, che è la singolarità accennata sopra (in realtà in questo caso le singolarità sono due: una a  $t = 0$  e l'altra a  $t = \pi R_*$ ).

È chiaro dalle (24-3) che  $R_*$  è proprio il massimo di  $R$ , e che il grafico di  $R$  in funzione di  $t$  è una cicloide (fig. 24-1). Un universo a sezioni spaziali sferiche è quindi limitato anche nel tempo.

Caso  $k = 0$ : Ora la soluzione è molto più semplice:

$$R = \left( \frac{3}{2} R_*^{1/2} t \right)^{2/3}. \tag{24-4}$$

Il grafico si trova in fig. 24-2: in questo caso (sezioni spaziali piatte) l'espansione continua all'infinito, anche se con velocità che tende a zero.

Caso  $k = -1$ : La soluzione ha una forma assai simile alle (24-3), salvo l'uso di funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}R_* (\cosh \eta - 1) \\ t &= \frac{1}{2}R_* (\sinh \eta - \eta). \end{aligned} \tag{24-5}$$

Anche qui l'espansione continua all'infinito, ma asintoticamente  $R = t$ , il che è quanto dire che la velocità di espansione  $\dot{R}$  tende a  $c$ . Il grafico si vede in fig. 24-3.

È interessante osservare che per  $t$  piccolo le soluzioni con  $k \neq 0$  non si distinguono da quella con  $k = 0$ . La cosa si verifica prendendo nelle (24-3), (24-5) i termini di ordine più basso in  $\eta$  e poi eliminando  $\eta$  fra  $R$  e  $t$ , ma si può dedurre direttamente dalla (24-2), dove il secondo membro è sicuramente dominante, rispetto a  $k$ , per  $R$  sufficientemente piccolo. In tutti i casi dunque per  $t$  piccolo si ritrova la (24-4). Questo è un caso particolare di un risultato generale che discuteremo più avanti.

## Il modello di Tolman

Stavolta le equazioni sono la (23-7) e la (23-5):

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3} \rho$$

$$\varrho R^4 = \text{cost.} = \varrho_0 R_0^4$$

dalle quali si ricava

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8}{3}\pi\varrho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \quad (24-6)$$

Conviene porre ora  $\frac{8}{3}\pi\varrho_0 R_0^4 = R_*^2$ , e la (24-6) diventa

$$\dot{R}^2 + k = \frac{R_*^2}{R^2}.$$

Anche questa si può integrare in tutti i e tre i casi  $k = +1, 0, -1$ . Si trova:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{t(2R_* - t)} && \text{per } k = 1 \\ R &= \sqrt{2R_*t} && \text{per } k = 0 \\ R &= \sqrt{t(2R_* + t)} && \text{per } k = -1. \end{aligned}$$

L'andamento qualitativo non è diverso da quello del modello di Friedmann: in particolare, per  $k = 1$  si ha ancora un massimo  $R = R_*$ . I grafici sono rispettivamente una semicirconferenza, un arco di parabola e uno d'iperbole equilatera (figure 24-4, 24-5, 24-6). Si presenta di nuovo il fenomeno già visto: per  $t$  piccolo i tre casi sono indistinguibili.

### La singolarità iniziale

In tutti i casi a  $t = 0$  è presente una singolarità, e si potrebbe verificare, calcolando il tensore di Riemann, che si tratta di una singolarità reale. Del resto la cosa è ovvia se si pensa che  $R$  è il raggio di curvatura delle sezioni spaziali, e quando questo si annulla non c'è dubbio che ci si debba trovare in una singolarità della geometria.

A rigore occorrerebbe qualche precisazione. In primo luogo per  $k = 1$  le singolarità sono due: quella a  $t = 0$  (*big bang*) e quella a  $t = \pi R_*$  nel modello di Friedmann ovvero a  $t = 2R_*$  in quello di Tolman (*big crunch*). Ma anche negli altri casi sarebbe stato possibile dare delle soluzioni in cui  $R$  è funzione decrescente di  $t$ , e termina in una singolarità *nel futuro*; solo che queste soluzioni hanno  $\dot{R} < 0$  a tutti i tempi, e quindi contrastano con le osservazioni.

Più in generale, è immediato concludere dalla (23-7), per qualunque  $k$ , che esiste nel passato un  $t$  al quale  $R$  si annulla. La cosa è ovvia per  $k = 0$  o  $k = -1$ , perché  $\dot{R}$  non si annulla mai. Ma anche se  $k = 1$ , considerato che per le (23-4), (23-5)  $\varrho$  va almeno come  $1/R^3$ , si vede che nel passato  $\dot{R}/R$  era maggiore del valore attuale, che è positivo.

L'esistenza delle singolarità potrebbe comunque essere una peculiarità di questi modelli, che hanno un'elevata simmetria, discendente dal principio cosmologico. Si potrebbe sospettare che scostamenti anche piccoli dalla simmetria

facciano scomparire le singolarità: in parole povere, se le geodetiche della materia non sono più tutte radiali (nel senso della varietà 4-dimensionale) non è detto che debbano passare tutte per uno stesso punto. Una risposta a questo problema è stata data negli anni '60 dal lavoro di Hawking e Penrose, i quali hanno mostrato che sotto ipotesi precise ma sufficientemente ragionevoli dal punto di vista fisico *una singolarità è inevitabile*.

L'unica via per evitarla è dunque quella di modificare le equazioni. A questo proposito c'è da ricordare quanto abbiamo osservato nel Cap. 1: la RG non considera effetti quantistici, e questi diventano importanti quando la densità è sufficientemente alta ( $\rho_P = 5.2 \cdot 10^{93} \text{ g cm}^{-3}$ ). Introducendo questa condizione in entrambi i modelli si trova un tempo dello stesso ordine: vicino a  $T_P/5 \simeq 10^{-44} \text{ s}$ .

È dunque certo che la RG cade in difetto per tempi vicini alla supposta singolarità, e quindi i teoremi di singolarità di Hawking–Penrose non sono applicabili. La via d'uscita sarebbe quella di avere una teoria quantistica della gravità: obiettivo che finora non è stato realizzato.

### Il problema del “fine tuning”

Abbiamo già notato che in entrambi i modelli, di Friedmann e di Tolman, il comportamento iniziale non dipende da  $k$ . Vogliamo ora studiare più da vicino questo fenomeno. Riprendiamo la definizione di  $\Omega$  data al cap. precedente:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho}{H^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho R^2}{\dot{R}^2} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho R^3}{R\dot{R}^2}.$$

Derivando  $\ln \Omega$  rispetto a  $t$  si ha:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{1}{\rho R^3} \frac{d}{dt}(\rho R^3) - \frac{\dot{R}}{R} - 2 \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{1}{\rho R^3} \frac{d}{dt}(\rho R^3) - H - 2 \frac{\ddot{R}}{HR}.$$

Usando la (23–9):

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = -\frac{p}{\rho R^3} \frac{d}{dt}R^3 - H - 2 \frac{\ddot{R}}{HR} = -\frac{3pH}{\rho} - H - 2 \frac{\ddot{R}}{HR}$$

e infine, eliminando  $\ddot{R}$  con la (23–8) e semplificando:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \frac{8\pi}{3} \frac{\rho}{H\Omega} (\Omega - 1) \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right) = H (\Omega - 1) \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right).$$

Ancora, essendo  $\dot{\Omega} = \dot{R}(d\Omega/dR)$ :

$$\frac{1}{\Omega(\Omega - 1)} \frac{d\Omega}{dR} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right). \quad (24-7)$$

Abbiamo ottenuto la (24-7) senza approssimazioni, e senza fare ipotesi sull'equazione di stato. Supponiamo ora che l'espressione in parentesi a secondo membro sia limitata inferiormente, da un  $\alpha > 0$ : avremo allora

$$\frac{1}{\Omega(\Omega - 1)} \frac{d\Omega}{dR} \geq \frac{\alpha}{R} \quad (24-8)$$

dalla quale si vede anzitutto che  $d\Omega/dR$  ha sempre il segno di  $\Omega - 1$ , il che è quanto dire che le soluzioni sono sempre crescenti o sempre decrescenti a seconda che sia  $\Omega \gtrless 1$ . Si dimostra poi senza difficoltà che in ogni caso  $\Omega \rightarrow 1$  quando  $R \rightarrow 0$ .

Ad esempio, se poniamo  $p = \frac{1}{3}\varrho$ , ossia  $\alpha = 2$ , integrando la (24-7) si trova

$$1 - \frac{1}{\Omega} \propto R^2.$$

Calcoliamo ora il rapporto tra il valore attuale di  $R$  e quello al limite di validità della RG:

$$\frac{R_0}{R_{\text{lim}}} \gtrsim \left( \frac{\varrho_{\text{lim}}}{\varrho_0} \right)^{1/4} > 10^{30}.$$

Dato che oggi  $\Omega$  non è molto diverso da 1, ne segue che inizialmente doveva differire da 1 solo sulla 60-ma cifra!

Si può obiettare che  $p = \frac{1}{3}\varrho$  è la condizione caratteristica di un universo dominato dalla radiazione, cosa certamente falsa al tempo presente. Però anche se si limita il calcolo alla fase in cui la radiazione è dominante, e lo si modifica per i tempi successivi, non si ottiene un risultato sostanzialmente diverso. Questo perché nella (24-7) è ovviamente più importante la fase in cui  $R$  è piccolo.

Poiché non sembra ragionevole un tale “aggiustamento fino” del valore iniziale di  $\Omega$ , si deve cercare un'altra strada, che passa chiaramente per la negazione dell'ipotesi fatta sopra, che sia sempre  $1 + 3p/\varrho \geq \alpha > 0$ . Occorre che vi siano fasi dell'evoluzione dell'universo in cui al contrario  $1 + 3p/\varrho < 0$ , il che implica pressione negativa. Sono questi i *modelli inflazionari*, di cui qui non possiamo parlare.