CAPITOLO 23

Modelli cosmologici

Abbiamo già visto nel Cap. 8 che la geometria di Robertson–Walker è usata nei modelli cosmologici: guardiamo ora la questione più da vicino. L'idea di base della RG, che la geometria dello spazio-tempo è determinata dalla distribuzione della materia, richiede — per essere applicata all'Universo — di avere motivazioni fisiche per postulare una qualche distribuzione della materia. A scala relativamente piccola la distribuzione di materia è assai irregolare: le stelle sono raccolte in *galassie*, le quali formano *ammassi* e *superammassi*. C'è poi della materia in forma di polveri e gas, della quale è più difficile determinare la distribuzione; esiste poi il problema della *materia oscura*, sul quale torneremo.

Solo a scala molto più grande è ragionevole supporre che la distribuzione sia all'incirca omogenea. In realtà in tempi recenti si va facendo strada l'idea che anche a grande scala la materia occupi solo la superficie di *bolle* sostanzialmente vuote; resta però il fatto che anche in questo caso conviene cominciare a ragionare su di un modello omogeneo, e poi studiare le alterazioni prodotte su questo modello dalle disomogeneità. Noi qui ci occuperemo solo del punto di partenza omogeneo.

Insieme all'omogeneità si assume anche l'isotropia delle condizioni fisiche dell'Universo, per la quale valgono considerazioni simili a quelle fatte sopra. Abbiamo però già visto al Cap. 8 un forte argomento in favore dell'isotropia, dato dalle misure sulla radiazione di fondo.

Osserviamo inoltre che non si potrebbe avere isotropia senza omogeneità: se infatti due diverse regioni di spazio contenessero materia in condizioni fisiche diverse, guardando in direzione di quelle due regioni si vedrebbero differenze ad es. nella radiazione che arriva. Allora l'Universo non ci apparirebbe neppure isotropo.

Parlando di omogeneità abbiamo trascurato una difficoltà, ossia che l'Universo *non è statico*, come è messo in evidenza dal redshift cosmologico. Perciò quando si dice "Universo omogeneo" si sottintende che il confronto fra la materia presente in diversi punti dello spazio venga fatto *a un certo tempo*, e noi sappiamo che la RG non ci autorizza a parlare di un tempo assoluto. La soluzione è che stiamo in realtà facendo un'ipotesi più complessa: assumiamo che si possa individuare, nella varietà che costituisce lo spazio-tempo, una famiglia di sezioni spaziali (sottovarietà 3-dimensionali) su ciascuna della quali vale l'omogeneità richiesta.

Tutto questo si riassume nell'enunciato del *principio cosmologico*: *è possibile definire nello spazio-tempo una famiglia di sezioni spaziali, tali che su ciascuna di esse l'Universo ha le stesse proprietà fisiche in tutti i punti e in ogni direzione.*

È intuitivo che la geometria corrispondente debba essere a curvatura costante, e quindi descritta da uno dei tre sottocasi della (8–1). Fino a questo punto è però rimasta imprecisata la funzione $R(\eta)$, ossia la legge di evoluzione temporale del raggio dell'Universo. Il calcolo di tale evoluzione (*dinamica cosmologica*) richiede due ulteriori informazioni:

a) una *legge del moto*; questa discende dalle equazioni di Einstein, che ora conosciamo

b) un'*equazione di stato* per la materia: infatti occorre sapere come varia la densità durante l'evoluzione dell'Universo.

Le equazioni di Einstein legano il tensore di Einstein (dipendente dalla metrica) al tensore energia-impulso (dipendente dalle proprietà fisiche della materia presente). Occorre dunque discutere separatamente i due aspetti.

Il tensore di Einstein

In questo capitolo ci converrà usare per la metrica di Robertson–Walker la forma (8–7):

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2\bigl(d\chi^2 + \Sigma^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\,d\varphi^2)\bigr). \tag{23–1}$$

Ricordiamo che le curve che hanno χ, ϑ e φ costanti sono geodetiche, e che t misura il tempo proprio lungo queste geodetiche. La materia è supposta macroscopicamente in quiete in queste coordinate, che si chiamano perciò coordinate "comoventi." La dinamica è espressa nell'unica funzione incognita $R(t)$.

Dalla metrica (23–1) possiamo calcolare i coefficienti di connessione, e poi il tensore di Riemann e quello di Einstein, in termini di $R(t)$. Si può procedere per "forza bruta," sfruttando al più le evidenti semplificazioni derivanti ad es. dal fatto che la metrica è diagonale, oppure ricorrere a tecniche più sofisticate. Qui ci limitiamo a dare il risultato, non nella base associata alle coordinate (che è ortogonale, ma non ortonormale) ma in una base ortonormale:

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_{\hat t} \qquad \mathbf{e}_\chi = R\,\mathbf{e}_{\hat\chi} \qquad \mathbf{e}_\vartheta = R\Sigma\,\mathbf{e}_{\hat\vartheta} \qquad \mathbf{e}_\varphi = R\Sigma\,\sin\vartheta\,\mathbf{e}_{\hat\varphi}.$$

La scelta di una base ortonormale è motivata dal fatto che essa fornisce il RIL della materia, nel quale è più semplice esprimere le proprietà di questa.

Ciò posto, le componenti del tensore di Einstein sono:

$$G_{\hat t\hat t} = 3\left(\frac{\dot R}{R}\right)^{\!2} + \frac{3k}{R^2} \tag{23–2}$$

$$G_{\hat\chi\hat\chi} = G_{\hat\vartheta\hat\vartheta} = G_{\hat\varphi\hat\varphi} = -2\,\frac{\ddot R}{R} - \left(\frac{\dot R}{R}\right)^{\!2} - \frac{k}{R^2} \tag{23–3}$$

dove k è il segno della curvatura, definito nel Cap. 8; ovviamente il punto significa derivata rispetto a t. Tutte le altre componenti di $\mathbf{G}$ sono nulle.

La distribuzione della materia

Alla scala cosmologica, la materia consiste

a) di una “polvere” (galassie o altro) con interazioni trascurabili

b) di radiazione e.m. di corpo nero

c) di altre particelle di massa nulla (neutrini, gravitoni).

Il tutto si riassume nel modello di *fluido perfetto*, per il quale si può scrivere, come sappiamo,

$$\mathbf{T} = (\varrho + p)\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p\,\mathbf{g}.$$

Le velocità relative di galassie e stelle entro gli ammassi sono $\lesssim 10^3\,\mathrm{km/s}$ ($v/c \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$) e perciò il loro contributo ϱ_g a ϱ_m è praticamente tutta massa di riposo, e $p_\mathrm{m} \ll \varrho_\mathrm{m}$, allo stato attuale. Per ϱ_g si può dare una stima intorno a $10^{-30}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.

Esiste però una stima indipendente di ϱ_m, data dalla *dinamica* degli ammassi di galassie. Assumendo che gli ammassi siano sistemi legati, e applicando il teorema del viriale, dall’energia cinetica — che è misurabile in base ai moti delle galassie — si risale all’energia potenziale, e si trova che questa richiede una massa maggiore di quella visibile delle galassie, per circa un fattore 10: si parla perciò di densità *dinamica* $\varrho_\mathrm{d} \simeq 10^{-29}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Non è ancora chiarito di che cosa sia costituita questa *materia oscura*.

La radiazione (e.m.) osservabile è prevalentemente radiazione nera a 2.7 K ($kT \simeq 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$):

$$\varrho_\mathrm{em} = \frac{8\pi^5}{15\,c^5}\frac{k^4}{h^3}\,T^4 = 4 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{g\,cm^{-3}};$$

ci si aspetta poi un contributo più o meno equivalente in neutrini e gravitoni, e perciò

$$\varrho_\mathrm{r} \simeq 10^{-33}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

Trattandosi di particelle di massa nulla, avremo

$$p_\mathrm{r} = \tfrac{1}{3}\varrho_\mathrm{r}.$$

In realtà il problema della massa dei neutrini è ancora aperto: il limite superiore ricavato dallo spettro del decadimento β è circa 30 eV, mentre quello recente ricavato dalle misure sulle oscillazioni è intorno a 0.01 eV. Se i neutrini avessero massa di questo ordine rientrerebbero nella materia fredda: infatti avremmo un contributo di ciascun neutrino a ϱ, dalla sua massa di riposo, molto maggiore del kT sopra indicato. Possiamo comunque scrivere:

$$\varrho_\nu \simeq \left(\frac{m_\nu}{1\,\mathrm{eV}}\right) \times 7 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}.$$

Questa stima assume che esistano 3 tipi di neutrini, come sembra ormai certo.

A eccezione dei primi secondi dal *big bang*, gli scambi di energia e impulso tra i diversi tipi di materia sono trascurabili, e perciò possiamo applicare separatamente alle varie frazioni le leggi di conservazione note. Nel caso della materia massiva (barioni, ev. neutrini) la conservazione del numero porta alla conservazione della massa di riposo, ma il volume occupato non è costante (cresce come R^3). Dunque

$$\varrho_{\mathrm{m}} R^3 = \text{cost.} \tag{23–4}$$

Quanto alla radiazione, se supponiamo conservato il numero di fotoni (come pure di neutrini e gravitoni) e teniamo conto del redshift, troviamo che mentre la densità numerica va come $1/R^3$, la densità di energia (e quindi di massa) ha un altro fattore $1/R$ per il redshift. In totale:

$$\varrho_{\mathrm{r}} R^4 = \text{cost.} \tag{23–5}$$

Riassumendo:

$$\varrho(t) = \varrho_{\mathrm{m}}(t) + \varrho_{\mathrm{r}}(t) = \varrho_{\mathrm{m0}} \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 + \varrho_{\mathrm{r0}} \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^4$$

$$p(t) = \tfrac{1}{3}\varrho_{\mathrm{r}}(t) = \tfrac{1}{3}\varrho_{\mathrm{r0}} \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^4.$$

D'altra parte, nella stessa base usata per $\mathbf{G}$, le componenti di $\mathbf{T}$ sono

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \varrho \qquad T_{\hat{\chi}\hat{\chi}} = T_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = p. \tag{23–6}$$

Le equazioni di Einstein

Possiamo finalmente usare le equazioni di Einstein: combinando la (23–2) con la prima delle (23–6) si ha

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\varrho \tag{23–7}$$

mentre dalla (23–3) si trova

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{2R^2} = -4\pi p. \tag{23–8}$$

Osserviamo che dalle (23–7), (23–8) si trae una conseguenza per ϱ e p. Basta derivare la (23–7) rispetto a t, ed eliminare $\ddot{R}$ tramite la (23–8), per arrivare a

$$\frac{d}{dt}(\varrho R^3) + p\,\frac{d}{dt}R^3 = 0. \tag{23–9}$$

Si potrebbe verificare che questa è una della componenti di $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$; ma è più interessante osservare che non ci dice niente di nuovo, in quanto è contenuta nelle (23–4), (23–5). Infatti da un lato $\varrho_\mathrm{m} R^3$ è costante per la (23–4), e $p_\mathrm{m} = 0$; dall'altro la (23–5), insieme a $p_\mathrm{r} = \frac{1}{3}\varrho_\mathrm{r}$, mostra che anche ϱ_r e p_r soddisfano la (23–9).

Il termine cosmologico

Quando Einstein cominciò a pensare all'impiego cosmologico della RG, aveva in mente che l'Universo dovesse essere statico: la scoperta di Hubble era ancora nel futuro. Ma è facile vedere che le (23–7), (23–8) non ammettono una soluzione statica: infatti la (23–7) richiede, per una soluzione statica, $k > 0$, mentre la (23–8) richiede $k \le 0$.

Su questa base Einstein fu indotto a modificare l'equazione $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$. La modifica è facile: esiste un altro tensore simmetrico a divergenza nulla, oltre a $\mathbf{G}$, ed è il tensore metrico $\mathbf{g}$. Si può dunque scrivere

$$\mathbf{G} - \Lambda\mathbf{g} = \mathbf{T}$$

dove Λ è una nuova costante, detta *costante cosmologica.* Il termine così aggiunto all'equazione ha il nome storico di *termine cosmologico.*

Quando Hubble mostrò che in realtà l'Universo non è statico, Einstein si affrettò a rinnegare il termine cosmologico, definendolo "the greatest blunder of my life." Tuttavia esso è tornato a essere considerato seriamente negli ultimi tempi, ed è per questo che nel seguito ne terremo conto, anche se senza dubbio fa perdere eleganza alla teoria.

A conti fatti, le (23–7), (23–8) si modificano come segue:

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\,\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda \tag{23–10}$$

$$\frac{\ddot R}{R} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 + \frac{k}{2R^2} = -4\pi p + \tfrac{1}{2}\Lambda. \tag{23–11}$$

Invece la (23–9) rimane inalterata.

Ne segue che se usiamo le (23–4), (23–5) una sola delle equazioni (23–10) e (23–11) ci basta, anche se occasionalmente ci farà comodo tenerle presenti entrambe.

Confronto con le osservazioni

Riprendendo la definizione (8–10) della costante di Hubble, abbiamo dalla (23–10):

$$H^2 = \frac{\dot R^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\,\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R^2} \quad \Rightarrow \quad H_0^2 = \frac{8\pi}{3}\,\varrho_0 + \tfrac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{R_0^2} \tag{23–12}$$

dove l'indice $_0$ si riferisce ai valori attuali.

Si definisce *densità critica* $\varrho_{\rm c}$ quel valore di ϱ che corrisponde a $k = 0$, $\Lambda = 0$:

$$\varrho_{\rm c} = \frac{3}{8\pi}\,H^2 \quad\Rightarrow\quad \varrho_{0\rm c} = \frac{3}{8\pi}\,H_0^2. \tag{23–13}$$

È poi tradizionale definire il parametro adimensionale Ω come il rapporto $\varrho/\varrho_{\rm c}$. Se parallelamente si pone

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \qquad \Omega_k = -\frac{k}{R^2H^2}$$

le (23–12) si scrivono

$$\Omega + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \qquad \Omega_0 + \Omega_{0k} + \Omega_{0\Lambda} = 1.$$

La costante di Hubble è ancor oggi molto incerta, principalmente perché è difficile stimare le distanze delle sorgenti lontane. C'è un accordo abbastanza ampio solo per l'intervallo

$$50\,{\rm km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \le H_0 \le 80\,{\rm km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}.$$

Per questa ragione si trova conveniente assorbire l'incertezza in un altro parametro adimensionale h, definito da

$$H_0 = 100\,{\rm km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \cdot h.$$

Dunque h è incerto nell'intervallo $0.5 \div 0.8$. Vedremo che questa incertezza si propaga ad altre grandezze d'interesse cosmologico.

Per cominciare, è incerto il valore di $\varrho_{\rm c}$:

$$\varrho_{0\rm c} = 1.9 \cdot 10^{-29}\,{\rm g\,cm^{-3}} \cdot h^2.$$

Si può poi definire un Ω per ciascuna specie di materia: così facendo, e tenendo conto di come l'incertezza sulla scala delle distanze influisce sui diversi termini, si trova

$$\Omega_{0\rm g} \simeq 0.03 \qquad \Omega_{0\rm d} \simeq 0.2 \div 0.4 \qquad \Omega_{0\rm r} = 2.3 \cdot 10^{-5}\,h^{-2}$$

$$\Omega_{0\nu} \simeq \frac{m_\nu}{1\,{\rm eV}} \times 3.5 \cdot 10^{-2}\,h^{-2}.$$

Di fatto però le stime attuali sono basate piuttosto su misure indirette; ne daremo un cenno nel prossimo capitolo.