CAPITOLO 21

Il caso generale

A questo punto conviene eliminare tutte le approssimazioni, ossia trattare il gas di Fermi come relativistico, e insieme tener conto della RG. Per l'energia del gas di Fermi l'espressione relativistica esatta è

$$E = \int_0^{P_\mathrm{F}} \sqrt{m^2c^4 + c^2P^2}\, \frac{VP^2dP}{\pi^2\,\hbar^3} = \frac{m^4c^5V}{\pi^2\hbar^3} \int_0^y y'^2 \sqrt{1+y'^2}\, dy'$$

avendo fatto le sostituzioni $P = mc\,y'$, $P_\mathrm{F} = mc\,y$. L'integrale dà:

$$E = \frac{m^4c^5V}{8\pi^2\hbar^3} \left[y\,(1+2y^2)\,\sqrt{1+y^2} - \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right].$$

Per calcolare la pressione $p = -(\partial E/\partial V)_N$ si deve tener conto che y dipende da V: a N costante è $VP_\mathrm{F}^3 = \mathrm{cost.}$ Si ottiene alla fine:

$$p = \frac{m^4c^5}{24\pi^2\hbar^3} \left[y\,(2y^2-3)\,\sqrt{1+y^2} + 3\,\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right] \tag{21–1}$$

mentre y si esprime in funzione di n come segue:

$$y = \frac{\hbar}{mc}\,(3\pi^2n)^{1/3}. \tag{21–2}$$

Si noti che y è un numero puro.

Nane bianche in RG

Per un gas di elettroni la (21–2) permette di scrivere la densità come segue:

$$\varrho = \varrho_*\,y^3, \tag{21–3}$$

dove

$$\varrho_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{m_\mathrm{e}c}{\hbar}\right)^3 \mu m_\mathrm{p} \tag{21–4}$$

mentre per la pressione:

$$p = p_*\,f(y) \tag{21–5}$$

con

$$p_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{m_\mathrm{e}c}{\hbar}\right)^3 m_\mathrm{e}c^2 \tag{21–6}$$

$$f(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} y\,(2y^2-3)\,\sqrt{1+y^2} + 3\,\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Le equazioni di struttura sono sempre le (19–12), (19–14), che riscriviamo per chiarezza:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \varrho \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{(m + 4\pi r^3 p)\,(\varrho + p)}{r\,(r - 2m)}. \end{aligned} \tag{21–7}$$

Questa volta non c'è invarianza di scala, e il problema è più complicato. Per risolvere le equazioni conviene introdurre numeri puri per r e m:

$$r = \lambda x \qquad m = \kappa z.$$

Se si scelgono i parametri λ e κ come segue:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\sqrt{8\pi G \varrho_*}}, \qquad \kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c^2 \lambda}{2G} \tag{21–8}$$

le (21–7) si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= x^2 y^3 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{16\nu}\,\frac{(y^3 + \nu f)\,(z + \nu\, x^3 f)\,\sqrt{1 + y^2}}{x y^4\,(x - z)}. \end{aligned} \tag{21–9}$$

dove

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_*}{\varrho_* c^2} = \frac{m_{\mathrm{e}}}{8\mu m_{\mathrm{p}}}. \tag{21–10}$$

Le (21–9) vanno integrate con le condizioni iniziali $z(0) = 0$, $y(0) = y_{\mathrm{c}}$: la seconda di queste equivale ad assegnare densità e pressione al centro della stella. Come già visto per i modelli semplificati, l'integrazione va condotta fino a quel certo $\bar{x}$ per il quale sia $y(\bar{x}) = 0$: allora massa e raggio della stella saranno dati da

$$M = \kappa\, z(\bar{x}), \qquad R = \lambda \bar{x}.$$

I risultati dell'integrazione per $\mu = 2$ sono riportati (in scala logaritmica) in fig. 21–1: si vede un primo tratto discendente, corrispondente alla relazione $M \propto R^{-3}$ delle nane bianche non relativistiche, seguito da una discesa pressoché verticale, corrispondente al limite ultrarelativistico. Tuttavia la curva non ha un asintoto verticale, come previsto dal limite di Chandrasekhar, ma piega di nuovo verso sinistra, il che indica un massimo della massa ($M = 1.41\,M_\odot$, $R \simeq 900\,\mathrm{km}$) e poi valori di M nuovamente decrescenti insieme con R. Questo è l'effetto delle correzioni di RG: si dimostra però che il tratto della curva al di là del massimo di M *non corrisponde a un equilibrio stabile* della stella.

Le stelle di neutroni

L'altro caso semplice, ossia quello di materia completamente neutronizzata, non richiede altro che la modifica di alcune costanti. Possiamo ancora usare le (21–3), (21–5) con la stessa forma per $f(y)$, ma scrivendo al posto delle (21–4), (21–6):

$$\varrho_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{m_{\text{p}}c}{\hbar}\right)^3 m_{\text{p}} \tag{21–11}$$

$$p_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{24\pi^2}\left(\frac{m_{\text{p}}c}{\hbar}\right)^3 m_{\text{p}}c^2. \tag{21–12}$$

Le (21–8) non cambiano, e così pure le equazioni di struttura (21–9), solo che ora abbiamo semplicemente $\nu = 1/8$.

In fig. 21–2 abbiamo riportato la curva per le stelle di neutroni insieme con quella già vista per le nane bianche: si vede che i due andamenti sono simili, a parte il fatto che per le stelle di neutroni il tratto verticale (ultrarelativistico) non è visibile. Ciò dimostra quanto avevamo asserito: per le stelle di neutroni gli effetti relativistici nel gas di Fermi non hanno importanza, perché si fanno sentire prima le correzioni di RG.

Nella figura i numeri accanto ai triangoli danno il logaritmo decimale della densità centrale (in g/cm^3). Per quello che abbiamo detto, una nana bianca non può essere stabile per $\varrho_{\text{c}} \gtrsim 10^{11}$ g/cm^3, e la curva dovrebbe interrompersi lì: si noterà che per lo stesso valore di ϱ_{c} una stella di neutroni avrebbe massa molto minore. In altre parole, fra le due curve c'è un "gap": come mai?

Una parte della spiegazione è la già accennata instabilità; ma prima di tutto occorre ricordare che nel passare dalla nana bianca (nuclei e gas di elettroni) alla stella di neutroni (elettroni completamente catturati dai nucleoni, ossia neutronizzazione totale) abbiamo saltato una transizione: quella corrispondente a una neutronizzazione parziale. Senza entrare nella discussione, indichiamo solo l'andamento (semiqualitativo) di questa zona di transizione, tratteggiata nella figura.

Si notano diversi aspetti:

- in primo luogo, la massa delle nane bianche (per una data densità centrale) viene sensibilmente ridotta, e così pure il suo massimo, che riesce intorno a $1.2\,M_\odot$
- fenomeno opposto si ha per le stelle di neutroni, che hanno massa assai maggiore di quella calcolata prima
- le due curve sono ora fuse in una, ma un tratto della curva (quello punteggiato) è *instabile*
- c'è un intervallo di masse (fra 0.3 e $0.8\,M_\odot$) nel quale sono possibili tanto nane bianche quanto stelle di neutroni
- per $\varrho_{\text{c}} \gtrsim 10^{16}$ g/cm^3, corrispondente a $0.8\,M_\odot$, anche le stelle di neutroni sono instabili.

Prima di concludere dobbiamo rilevare che nel calcolo che porta alla fig. 21–2 c'è ancora un semplificazione non realistica: il gas di neutroni è stato supposto perfetto, il che vuol dire che sono state trascurate le interazioni. Alle densità in gioco questo non è lecito, ma non è facile decidere quale sia la corretta equazione di stato. La questione è ancora aperta, e i calcoli vengono periodicamente aggiornati: diciamo solo che si presume per la massa limite un valore $M_{\rm lim} \sim 3M_\odot$.

Al di là delle stelle di neutroni

Resta dunque aperto il problema: che cosa accade a una stella di massa superiore a $M_{\rm lim}$ quando raggiunge la fine della sua evoluzione? Oppure: cosa capita se nell'esplosione di una supernova il nucleo viene compresso a una densità superiore a $\sim 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3}$?

Fino a poco tempo fa sembrava non vi fossero alternative: in entrambi i casi deve aversi un collasso gravitazionale estremo, il cui risultato è un *buco nero.* Tuttavia risultati di osservazioni recenti sembrano indicare un'altra possibilità, che era stata adombrata in ambito teorico, ma senza possibilità di previsioni sicure: la formazione di una *stella di quark.* I nucleoni potrebbero fondersi, mettendo in comune tutto il corredo di quark, e formando uno stato di materia del quale si sa assai poco; in particolare non se ne sa dare un'equazione di stato attendibile.

Le osservazioni citate sopra indicano però che esistono oggetti assai compatti, che per più ragioni non sembra possano essere stelle di neutroni. La ragione più importante è il raggio troppo piccolo, al di là del limite di stabilità di una stella di neutroni, situato attorno a 10 km (fig. 21–2). Dato però che non abbiamo un'equazione di stato da cui partire, non possiamo affrontare nessun calcolo, per cui ci limitiamo a questo accenno.