CAPITOLO 15

Lo spazio di Weyl

Vogliamo ora discutere che cosa accade se si usa, in una varietà (semi)riemanniana, una derivata covariante non compatibile con la metrica.

Indichiamo con $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ la derivata compatibile, e con $\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ una diversa derivata covariante (sempre simmetrica). È facile dimostrare che *la differenza delle due derivate è un tensore simmetrico* $\mathbf{\Delta}$.

Dim.: Calcoliamo

$$\nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\,\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\partial_{\mathbf{u}}f)\,\mathbf{v}$$
$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\,\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\partial_{\mathbf{u}}f)\,\mathbf{v}$$

e perciò

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) - \nabla_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\,(\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}).$$

Quindi $\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ non è differenziale su $\mathbf{v}$. La verifica della simmetria è immediata, partendo dalla simmetria delle due derivate covarianti. ∎

Poiché $\tilde{\nabla}$ non è compatibile con la metrica, non varrà la (14–1). In particolare:

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{v}\cdot\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{\Delta}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}. \tag{15–1}$$

Possiamo provare a restringere l'arbitrarietà di $\tilde{\nabla}$ richiedendo che il risultato della (15–1) non dipenda dalla direzione di $\mathbf{v}$; si dimostra senza difficoltà che questa condizione richiede la seguente forma di $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{\Delta}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{h} \tag{15–2}$$

dove $\mathbf{h}$ è un arbitrario campo vettoriale. Dalle (15–1), (15–2) si ricava

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{u})\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

ed è ragionevole postulare che l'effetto di $\tilde{\nabla}$ si estenda anche a funzioni scalari che non sono del tipo $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$:

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}f = \partial_{\mathbf{u}}f + (\mathbf{h}\cdot\mathbf{u})\,f \tag{15–3}$$

Una varietà nella quale, oltre alla metrica, sia definito il campo $\mathbf{h}$ e la conseguente derivata covariante $\tilde{\nabla}$, estesa alle funzioni scalari secondo la (15–3), si chiama *spazio di Weyl*.

La "Eichinvarianz"

Indichiamo con $\boldsymbol{\mu}$ la forma associata a $\mathbf{h}$, e supponiamo che sia $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{d}\chi$. Allora

$$(\mathbf{h}\cdot\mathbf{u}) = \langle\boldsymbol{\mu},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{d}\chi,\mathbf{u}\rangle = \partial_{\mathbf{u}}\chi$$

e la (15–3) diventa

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}} f = \partial_{\mathbf{u}} f + (\partial_{\mathbf{u}} \chi)\, f = e^{-\chi}\, \partial_{\mathbf{u}}(f\, e^{\chi}). \tag{15–4}$$

La (15–4) può essere interpretata come segue. Per ogni campo scalare definiamo la trasformazione

$$f \mapsto f' = f\, e^{\chi} \tag{15–5}$$

Allora se $g = \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}} f$ si ha $g' = \partial_{\mathbf{u}} f'$: la trasformazione di scala (15–5) (si noti, dipendente dal punto) riduce la derivata $\tilde{\nabla}$ alla semplice derivata $\partial_{\mathbf{u}}$. Più in generale, anche se $\boldsymbol{\mu}$ non è un differenziale esatto, la trasformazione

$$\boldsymbol{\mu} \mapsto \boldsymbol{\mu} + \mathbf{d}\chi,$$

unita alla (15–5), non altera l'interpretazione della teoria.

Weyl chiama questa proprietà "Eichinvarianz," dal verbo "eichen" che in tedesco significa "tarare." La traduzione inglese è "gauge," con la conseguente "gauge invariance." Sarà già apparsa evidente l'analogia con l'arbitrarietà insita nella definizione del potenziale elettromagnetico: infatti la teoria di Weyl era appunto un tentativo di "geometrizzare" il campo elettromagnetico, accanto alla gravitazione.

La teoria non ha avuto successo perché non si è riusciti a ricavarne le giuste equazioni del campo, ma il termine "gauge invarianza" è sopravvissuto.

Teoria di gauge quantistica

Si può applicare facilmente la visione di Weyl alla meccanica quantistica: basta applicare la (15–5) a una funzione d'onda, modificandola come segue:

$$\psi \mapsto \psi' = \psi\, e^{i\chi}. \tag{15–6}$$

La ragione della modifica è che si vuole conservare il modulo della ψ, che ha significato fisico. Di conseguenza anche il vettore $\mathbf{h}$ verrà preso immaginario, anziché reale:

$$\mathbf{h} = -ie\,\mathbf{A}, \tag{15–7}$$

dove $\mathbf{A}$ è il (quadri)potenziale elettromagnetico; e lasciando da parte il tentativo di unificazione alla Weyl, si potrà sempre usare per ψ la (15–3), che in una base coordinata si scrive

$$(\tilde{\nabla}\psi)_\alpha = \psi_{,\alpha} - ie\, A_\alpha \psi. \tag{15–8}$$

È noto che la sostituzione della (15–8) all'ordinaria derivata fornisce la giusta introduzione dell'interazione elettromagnetica nella teoria quantistica.

In particolare, poniamo $\psi = |\psi|\, e^{i\varphi}$; separiamo cioè in ψ modulo e fase. Se le variazioni del modulo sono poco importanti rispetto a quelle della fase (il che accade nelle situazioni "semiclassiche") potremo scrivere, come si verifica subito:

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\psi = \partial_{\mathbf{u}}\psi - ie\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})\,\psi \simeq i\psi\,(\partial_{\mathbf{u}}\varphi - e\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})$$

il che è quanto dire che per la fase

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\varphi = \partial_{\mathbf{u}}\varphi - e\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}. \tag{15–9}$$

Applichiamo la (15–9) al caso seguente: campo magnetico statico, particella che percorre una curva chiusa γ. Se Σ è l'area racchiusa da γ, abbiamo:

$$\int\limits_{\gamma}\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}}\varphi\,d\lambda = -e\int\limits_{\gamma}\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}\,d\lambda = -e\,\Phi_{\Sigma}(\mathbf{B}). \tag{15–10}$$

Dunque lungo un percorso chiuso *la fase della funzione d'onda ha una variazione proporzionale al flusso del campo magnetico concatenato.*

L'aspetto interessante di questo risultato è il seguente: si può realizzare una situazione in cui $\mathbf{B}$=0 lungo γ, per cui sulla particella non agisce nessuna forza; possiamo avere però un flusso concatenato (ad es. se γ circonda un solenoide). La (15–10) ci mostra che anche in queste condizioni si deve avere una variazione di fase, che sarà rivelabile in un esperimento d'interferenza. Questo è l'*effetto Aharonov–Bohm*, che è stato verificato sperimentalmente.

Abbiamo introdotto nella (15–7) il parametro e (la carica della particella di cui ψ è la funzione d'onda) e tale parametro compare anche nella trasformazione di gauge (15–6). Poiché e è quantizzata, possiamo interpretare la (15–6) come la descrizione di quale sia la *rappresentazione unitaria del gruppo di gauge locale* cui appartiene ψ.

Finora il gruppo di gauge è stato il più semplice possibile: il gruppo unitario unidimensionale U(1), che è un gruppo commutativo. È quasi spontaneo tentare l'estensione della teoria a gruppi d'invarianza più complicati, anche non commutativi, come accade ad es. col gruppo SU(3) di QCD. Ovviamente non è qui il caso di andare oltre.