CAPITOLO 14

La metrica

Come già sappiamo, una varietà (semi)riemanniana è caratterizzata da una metrica. Possiamo ora darne una definizione precisa.

Definizione: Diremo *metrica* un *prodotto scalare sui vettori tangenti* alla varietà $\mathcal{M}$, ossia un *campo tensoriale* $\mathbf{g}$, di rango $\binom{0}{2}$

$$\mathbf{g} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to F^\infty, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

dove F^∞ è lo spazio delle funzioni C^∞ su $\mathcal{M}$. Si richiede inoltre che $\mathbf{g}$ sia *simmetrico* e *non degenere*:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$
$$\forall\,\mathbf{u}\!: \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = 0.$$

Nota: Quando il prodotto scalare sia definito positivo ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, col segno = valido sse $\mathbf{v} = 0$) si parla di varietà *riemanniana*. Ma a noi interessa l'applicazione alla geometria dello spazio-tempo, dove il prodotto scalare è *indefinito* (varietà *semiriemanniana*): ne riparleremo fra poco.

Assunta una base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ si pone

$$g_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$$

da cui subito:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^\alpha v^\beta \, \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta} \, u^\alpha v^\beta.$$

Si noti che la non-degenerazione di $\mathbf{g}$ equivale a dire che il determinante $\|g_{\alpha\beta}\|$ non si annulla mai.

Inoltre

$$g_{\alpha\beta} \, u^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} \, \langle \boldsymbol{\omega}^\alpha, \mathbf{u} \rangle \langle \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{v} \rangle = \langle g_{\alpha\beta} \, \boldsymbol{\omega}^\alpha \otimes \boldsymbol{\omega}^\beta, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \rangle$$

dove l'estensione di $\langle \ , \ \rangle$ ai prodotti tensoriali è ovvia. Se $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base coordinata abbiamo

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \, \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta,$$

che si abbrevia $g_{\alpha\beta} \, \mathbf{d}x^\alpha \, \mathbf{d}x^\beta$; abbiamo così ritrovato la notazione "ingenua" usata fin dal Cap. 1.

L'esistenza della metrica permette di porre in relazione vettori e forme, al modo seguente. Dato un vettore $\mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{v}$ è definito il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, che è una funzione lineare di $\mathbf{v}$, e come tale determina un elemento dello spazio duale, ossia una forma $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Da qui segue subito

$$\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta.$$

Dunque ogni vettore definisce una forma, ma è anche vero il viceversa:

$$u^\beta = g^{\beta\alpha} \sigma_\alpha,$$

avendo indicato con $g^{\beta\alpha}$ la matrice inversa di $g_{\alpha\beta}$, che esiste certamente, dato che $\mathbf{g}$ non è degenere.

La corrispondenza fra vettori e forme si estende immediatamente a tensori di rango qualsiasi, e viene descritta, quando si ragiona sulle componenti, come "innalzamento e abbassamento degli indici." È questa la ragione per cui nelle trattazioni più tradizionali della relatività non si fa distinzione fra vettori e forme, o fra i vari tensori di rango $\binom{p}{q}$ per un dato $p + q$.

Basi ortonormali

In un varietà (semi)riemanniana, ossia dotata di metrica, ha senso parlare di basi ortonormali. La definizione è la seguente: diremo che la base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è ortonormale se

$$|\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta| = \delta_{\alpha\beta}.$$

Si noti che non abbiamo imposto condizioni sul segno: ciò vuol dire che accettiamo varietà (semi)riemanniane di qualsiasi segnatura. Nel caso dello spazio-tempo la segnatura, come sappiamo, dev'essere -2. In altre parole: in ogni punto A esiste una base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ tale che

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta},$$

dove $\eta_{\alpha\beta}$ è definita da

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Metrica e connessione affine

Diremo che una connessione affine è *compatibile* con la metrica $\mathbf{g}$ se

$$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}: \quad \partial_\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\nabla_\mathbf{u} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_\mathbf{u} \mathbf{w}). \tag{14–1}$$

In parole: chiediamo che tra prodotto scalare e derivata covariante valga la regola di derivazione del prodotto. Un altro modo d'interpretare la (14–1) è il seguente: se ricordiamo (v. (11–7)) che

$$\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \partial_{\mathbf{u}}\,\mathbf{g}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g})(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{v},\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w})$$

la (14–1) si riduce a

$$\forall\,\mathbf{u}\colon\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{g} = 0,$$

che si scrive più semplicemente

$$\nabla\mathbf{g} = 0. \tag{14–2}$$

La (14–2) richiede un breve commento. Finora abbiamo sempre scritto l'operatore di derivazione covariante accompagnato da un indice: il vettore che dà la direzione lungo cui si fa la derivata. Tuttavia $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ è un vettore che dipende linearmente da $\mathbf{u}$, e definisce perciò un tensore di rango $\binom{1}{1}$, che è naturale indicare con $\nabla\mathbf{v}$. La stessa cosa si può fare partendo da un tensore qualsiasi: così $\nabla\mathbf{g}$ è un tensore di rango $\binom{0}{3}$, e la (14–2) dice che questo tensore è identicamente nullo se la derivata covariante è compatibile con la metrica (e viceversa).

Esprimendo la (14–1) in componenti secondo una base coordinata otteniamo:

$$u^\alpha\,(g_{\beta\gamma}\,v^\beta w^\gamma)_{,\alpha} = g_{\beta\gamma}\,u^\alpha\,({v^\beta}_{,\alpha} + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu}v^\mu)\,w^\gamma + g_{\beta\gamma}\,v^\beta u^\alpha\,({w^\gamma}_{,\alpha} + {\Gamma^\gamma}_{\alpha\mu}w^\mu)$$

$$\begin{aligned} g_{\beta\gamma,\alpha}\,v^\beta w^\gamma + g_{\beta\gamma}\,{v^\beta}_{,\alpha}w^\gamma + g_{\beta\gamma}\,v^\beta {w^\gamma}_{,\alpha} \\ = g_{\beta\gamma}\,({v^\beta}_{,\alpha} + {\Gamma^\beta}_{\alpha\mu}v^\mu)\,w^\gamma + g_{\beta\gamma}\,v^\beta\,({w^\gamma}_{,\alpha} + {\Gamma^\gamma}_{\alpha\mu}w^\mu) \end{aligned}$$

e da questa

$$g_{\beta\gamma,\alpha} = g_{\mu\gamma}\,{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta} + g_{\beta\mu}\,{\Gamma^\mu}_{\alpha\gamma}. \tag{14–3}$$

Dalla (14–3), permutando gli indici:

$$g_{\gamma\alpha,\beta} = g_{\mu\alpha}\,{\Gamma^\mu}_{\beta\gamma} + g_{\gamma\mu}\,{\Gamma^\mu}_{\beta\alpha} \tag{14–4}$$

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\mu\beta}\,{\Gamma^\mu}_{\gamma\alpha} + g_{\alpha\mu}\,{\Gamma^\mu}_{\gamma\beta}. \tag{14–5}$$

Sommando (14–3) e (14–4), e sottraendo (14–5):

$$g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2g_{\gamma\mu}\,{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$$

e infine:

$${\Gamma^\gamma}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}g^{\gamma\mu}\,(g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}). \tag{14–6}$$

La (14–6) mostra che *esiste una sola connessione affine compatibile con una data metrica.* Si dimostra che *se la connessione affine è compatibile con la metrica, le equazioni* (11–4) *delle geodetiche coincidono con le equazioni di Eulero–Lagrange dedotte dal principio variazionale enunciato al Cap.* 5.

Attenzione: La relazione (14–6) fra tensore metrico e coefficienti di connessione vale solo in una base coordinata!

Trasporto parallelo del prodotto scalare

Vogliamo ora dimostrare che la (14–1) equivale a richiedere che il prodotto scalare (e in particolare il quadrato di un vettore) sia *invariante per trasporto parallelo.*

Cominciamo col considerare il prodotto $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}$ tra due campi vettoriali: il risultato è una funzione scalare del punto. Prendiamo una curva γ che parte da A e arriva in B ($\lambda = \bar{\lambda}$), e sia $\mathbf{u}$ il suo vettore tangente. Allora, a meno di $O(\bar{\lambda}^2)$,

$$\mathbf{t}(B) \cdot \mathbf{w}(B) = \mathbf{t}(A) \cdot \mathbf{w}(A) + \bar{\lambda}\, \partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}). \tag{14–7}$$

Se indichiamo con $\mathbf{t}'$, $\mathbf{w}'$ i risultati del trasporto parallelo di $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}$ da B in A lungo γ abbiamo (sempre a meno di $O(\bar{\lambda}^2)$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}' \cdot \mathbf{w}' - \mathbf{t}(A) \cdot \mathbf{w}(A) &= (\mathbf{t}' - \mathbf{t}(A)) \cdot \mathbf{w}' + \mathbf{t}(A) \cdot (\mathbf{w}' - \mathbf{w}(A)) \\
&= (\mathbf{t}' - \mathbf{t}(A)) \cdot \mathbf{w}(A) + \mathbf{t}(A) \cdot (\mathbf{w}' - \mathbf{w}(A)) \\
&= \bar{\lambda}\, (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}) + \bar{\lambda}\, (\mathbf{t} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Se vale la (14–1) arriviamo a

$$\mathbf{t}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{t}(A) \cdot \mathbf{w}(A) + \bar{\lambda}\, \partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}),$$

e confrontando con la (14–7):

$$\mathbf{t}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{t}(B) \cdot \mathbf{w}(B),$$

ossia la tesi. ■

Aggiungiamo due commenti:

- È chiaro dalla dimostrazione che il risultato vale esattamente per il trasporto lungo una curva qualsiasi (basta usare $\bar{\lambda}/n$ e passare al limite per $n \to \infty$).
- Si può dunque dire che il trasporto parallelo compatibile con la metrica *ruota rigidamente* lo spazio dei vettori tangenti, conservando lunghezze e angoli.

Nuove simmetrie del tensore di Riemann

Dal teorema appena dimostrato segue in particolare che lungo una curva chiusa

$$\delta\mathbf{t} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{w} = 0,$$

(a meno di termini del secondo ordine) perché $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}$ riprende lo stesso valore agli estremi della curva. Ricordando la (12–10):

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = 0.$$

In componenti:

$$g_{\alpha\beta}\, w^\alpha R^\beta{}_{\gamma\delta\varepsilon}\, t^\gamma u^\delta v^\varepsilon + g_{\alpha\beta}\, t^\alpha R^\beta{}_{\gamma\delta\varepsilon}\, w^\gamma u^\delta v^\varepsilon = 0$$

$$R_{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\, w^\alpha t^\gamma + R_{\alpha\gamma\delta\varepsilon}\, t^\alpha w^\gamma = 0$$

$$R_{\alpha\gamma\delta\varepsilon} + R_{\gamma\alpha\delta\varepsilon} = 0 \tag{14–8}$$

dove ovviamente

$$R_{\alpha\gamma\delta\varepsilon} = g_{\alpha\beta}\, R^\beta{}_{\gamma\delta\varepsilon}.$$

Abbiamo dunque antisimmetria anche sulla prima coppia di indici; si dimostra poi subito — dalla (14–8) e dalle (12–7), (12–9) — che vale

$$R_{\alpha\gamma\delta\varepsilon} = R_{\delta\varepsilon\alpha\gamma}.$$

Conseguenza di tutte le simmetrie è che *il numero di componenti indipendenti si riduce a* $n^2(n^2-1)/12$, ossia a 20 per $n = 4$.

Possiamo verificare questo risultato al modo seguente. Partendo da un sistema di coordinate $\{x^\alpha\}$ arbitrario, eseguiamo una trasformazione a nuove coordinate $\{y^\alpha\}$ con la stessa origine:

$$y^\alpha = A^\alpha{}_\beta\, x^\beta + B^\alpha{}_{\beta\gamma}\, x^\beta x^\gamma + C^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, x^\beta x^\gamma x^\delta + \cdots$$

e cerchiamo di scegliere i coefficienti A, B, C in modo di semplificare quanto possibile, nel punto scelto come origine, le componenti del tensore metrico, della connessione affine e magari del tensore di Riemann (per semplicità, ci occuperemo solo del caso $n = 4$).

In primo luogo possiamo ridurre il tensore metrico alla forma canonica $\eta_{\alpha\beta}$ della relatività ristretta, imponendo solo 10 condizioni sui 16 coefficienti A: è giusto che restino 6 parametri arbitrari, quanti ce ne sono nella generica trasformazione di Lorentz che lascia invariante la metrica. Con ciò abbiamo esaurito le possibilità consentite dagli A.

Quanto ai B, che sono 40 causa la simmetria negli indici in basso, possiamo usarli tutti per imporre $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ da cui $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$. Infine potremmo pensare di utilizzare i coefficienti C per annullare le derivate seconde di $g_{\alpha\beta}$: se ciò fosse possibile, otterremmo $\mathbf{R} = 0$. Ma le derivate in questione sono 100, mentre i C sono solamente 80: dunque restano 20 derivate su cui non abbiamo "potere," e ad esse corrispondono altrettante componenti indipendenti del tensore di Riemann.

Contrazioni del tensore di Riemann

Com'è noto, per un tensore di rango $\binom{1}{1}$ si definisce uno scalare (la *traccia*) al modo seguente:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} T^\alpha{}_\alpha$$

e si dimostra che il risultato non dipende dalla base. È importante osservare che ciò è vero anche se non è data la metrica. La metrica è invece necessaria per definire la traccia di tensori di rango $\binom{0}{2}$ oppure $\binom{2}{0}$:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \qquad T \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}.$$

Un caso importante di contrazione è quella di $\nabla\mathbf{v}$: la si chiama *divergenza* di $\mathbf{v}$ e si indica con $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Anche la divergenza di un campo vettoriale non richiede la metrica. In componenti:

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = v^{\alpha}{}_{;\alpha}.$$

L'operazione di *contrazione* che genera la traccia si estende anche a tensori di rango superiore, in particolare al tensore di Riemann: naturalmente il risultato non è più uno scalare, ma un nuovo tensore, di rango $\binom{p-1}{q-1}$. Allo stesso modo si generalizza la divergenza.

Si definisce $\tilde{\mathbf{R}}$ *tensore di Ricci* come segue:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}.$$

Se esiste la metrica abbiamo:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\beta\mu\alpha} = \tilde{R}_{\beta\alpha}.$$

Dunque $\tilde{\mathbf{R}}$ *è simmetrico.*
Nota: Per un tensore di rango $\binom{1}{3}$ si potrebbero definire altre due contrazioni, ma è facile vedere che nel caso di $\mathbf{R}$, a causa dell'antisimmetria indotta dalla metrica, una di esse è identicamente nulla, e l'altra coincide, a meno del segno, con quella già considerata.

Indicheremo semplicemente con R la traccia del tensore di Ricci:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} R_{\mu\varrho\nu\sigma}$$

e la useremo per definire il *tensore* $\mathbf{G}$ *di Einstein*:

$$\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{R}} - \tfrac{1}{2} R\,\mathbf{g} \qquad G_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta}. \tag{14–9}$$

Si dimostra che dall'identità di Bianchi segue

$$\nabla\cdot\mathbf{G} = 0,$$

relazione che in componenti si esprime come segue:

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \qquad g^{\mu\nu} G_{\alpha\mu;\nu} = 0$$

(si noti che anche **G** è simmetrico, e perciò ha una sola divergenza). Inoltre si può dimostrare che **G** *è l'unico tensore costruito linearmente dal tensore di Riemann che abbia divergenza nulla.*

Possono riuscire utili le espressioni delle componenti del tensore di Einstein per mezzo di quelle del tensore di Riemann:

$$G_0^0 = -({R^{12}}_{12} + {R^{13}}_{13} + {R^{23}}_{23})$$
$$G_1^0 = {R^{02}}_{12} + {R^{03}}_{13}$$

(le altre si ottengono permutando gli indici).

Isometrie di una varietà (semi)riemanniana

Vogliamo ora precisare alcuni concetti già introdotti informalmente nel Cap. 5 e nei successivi. Cominciamo dalla definizione di *isometria.*

Consideriamo un'applicazione (al solito, C^∞) $\chi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ e sia in particolare $\chi(A) = B$. Allora ogni curva γ passante per A (nel senso $\gamma(0) = A$) viene mandata da χ in una curva δ passante per B: $\delta = \chi \circ \gamma$. Se $\mathbf{u}$ è il vettore tangente a γ in A e $\mathbf{v}$ quello tangente a δ in B, in questo modo viene anche indotta un'applicazione χ_* fra gli spazi tangenti $\mathcal{T}_A$ e $\mathcal{T}_B$:

$$\chi_* : \mathcal{T}_A \to \mathcal{T}_B \qquad \mathbf{u} \mapsto \chi_*(\mathbf{u}) = \mathbf{v}.$$

Non è difficile dimostrare che χ_* è un'isomorfismo dei due spazi vettoriali, ed è anche ovvio come estendere χ_* a tensori di rango qualsiasi.

Ciò premesso, diremo che χ è un'isometria di $\mathcal{M}$ se

$$\forall A \in \mathcal{M} : \quad \chi_*(\mathbf{g}(A)) = \mathbf{g}(B).$$

Si può anche vedere la cosa, ricordando la definizione di prodotto scalare, al modo seguente: χ è un'isometria se presi due qualsiasi vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ di $\mathcal{T}_A$, e detti $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i vettori di $\mathcal{T}_B$ loro trasformati mediante χ_*, si ha sempre:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

In parole: *un'isometria di una varietà (semi)riemanniana lascia invarianti i prodotti scalari.*

Sia ora $\mathbf{w}$ un campo vettoriale su $\mathcal{M}$. Abbiamo già definito a suo tempo le curve integrali, e sappiamo che per ogni A passa una e una sola curva integrale γ di $\mathbf{w}$ tale che $\gamma(0) = A$. Fissato ora un valore del parametro λ, possiamo costruire, per ogni A, l'applicazione χ^λ che manda $A = \gamma(0)$ in $B = \gamma(\lambda)$. (Si noti che χ^λ è definita per ogni λ, o almeno per un certo intorno dello zero.) La famiglia χ^λ si chiama *flusso* del campo $\mathbf{w}$.

Come si verifica facilmente, $\chi^\lambda \circ \chi^{\lambda'} = \chi^{\lambda+\lambda'}$: il flusso è un gruppo a un parametro. In termini intuitivi, la relazione fra $\mathbf{w}$ e il suo flusso è quella fra il generatore di una trasformazione infinitesima e le trasformazioni finite che essa genera.

Esempio 1: Per la sfera S^2 con le coordinate polari, esaminata nel Cap. 10 (esempio 2) è naturale usare la metrica (indotta) euclidea:

$$\mathbf{g} = \mathbf{d}\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, \mathbf{d}\varphi^2. \tag{14–10}$$

Se allora poniamo $\mathbf{w} = \mathbf{e}_\varphi$, il flusso χ^λ di $\mathbf{w}$ non è altro che una rotazione di angolo λ attorno all'asse z.

Vettori di Killing, costanti del moto

Possiamo ora dare la definizione di *vettore di Killing* (o campo di Killing) di una varietà (semi)riemanniana: si dice che $\mathbf{w}$ è vettore di Killing di $\mathcal{M}$ se *il suo flusso è un'isometria per ogni λ per cui è definito.*

Esempio 2: È intuitivo, ma lo verificheremo tra poco, che $\mathbf{e}_\varphi$ è vettore di Killing per la sfera S^2 con la metrica (14–10).

Enunciamo, senza dimostrazione, una semplice caratterizzazione di un vettore di Killing: *condizione necessaria e sufficiente perché* $\mathbf{w}$ *sia vettore di Killing* è

$$w_{\alpha;\beta} + w_{\beta;\alpha} = 0 \tag{14–11}$$

(notare le componenti *covarianti*). Le (14–11) si traducono in un sistema di equazioni differenziali *lineari omogenee* di primo ordine per le w_α; risolte queste, si trovano tutti i vettori di Killing per una data varietà (semi)riemanniana.

Dalle (14–11) è ovvio che se $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}$ sono due campi di Killing, lo è qualunque loro combinazione lineare *a coefficienti costanti*; dunque i vettori di Killing formano uno spazio vettoriale. Molto meno ovvio — e non lo dimostriamo — che anche $[\mathbf{t}, \mathbf{w}]$ sia un vettore di Killing: le due proprietà insieme dicono che *i vettori di Killing formano un'algebra di Lie.* Occorre subito notare che la dimensione di quest'algebra *non ha niente a che vedere con quella della varietà*: può essere maggiore, uguale o minore.

Esempio 3: Consideriamo il piano euclideo, con le usuali coordinate cartesiane (x, y). Dato che le componenti del tensore metrico sono costanti, è ovvio che le traslazioni lungo entrambi gli assi sono isometrie, quindi $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ sono vettori di Killing. Ma è anche noto che esiste l'invarianza per rotazioni: lasciamo per esercizio dimostrare che alle rotazioni attorno all'origine corrisponde il vettore di Killing $x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x$. I commutatori non forniscono niente di nuovo, per cui l'algebra di Lie ha dimensione 3.

Esercizio: Tornando alla sfera S^2 del Cap. 10, dimostrare che i campi $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_z$ sono vettori di Killing, e che sono una base dell'algebra. Come abbiamo già ricordato ad es. al Cap. 4, il gruppo delle isometrie è SO(3), e quella ora trovata ne è appunto l'algebra di Lie.

Un'ultima proprietà, fisicamente importante, dei vettori di Killing è la seguente: *se* $\mathbf{w}$ *è un vettore di Killing, e* γ *una geodetica con vettore tangente* $\mathbf{u}$*, il prodotto scalare* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ *è costante lungo* γ.
Dim.: Vogliamo dimostrare che $\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = 0$. Abbiamo:

$$\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$$

(il primo termine è zero per definizione di geodetica). Ma dalla (14–11)

$$0 = u^\alpha u^\beta w_{\alpha;\beta} = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\gamma}\, w^\gamma{}_{;\beta} = g_{\alpha\gamma}\, u^\alpha\, (u^\beta w^\gamma{}_{;\beta}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}. \ \blacksquare$$

È questo teorema che di fatto abbiamo ampiamente usato, ricavandolo dalla definizione variazionale di geodetica e dal teorema di Nöther, per ottenere tutte le costanti del moto negli esempi di varietà già discussi.