CAPITOLO 13

Riprenderemo ora gli esempi visti al Cap. 10, per estenderli ai concetti introdotti nei Capp. 11 e 12. Le notazioni sono quelle del Cap. 10.

Esempio 1

Per caratterizzare il piano euclideo dal punto di vista della connessione affine dobbiamo individuare la derivazione covariante. Il modo più semplice è dichiarare che (x, y) sono coordinate cartesiane, nel senso definito al Cap. 12; ossia che nella base $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ i coefficienti di connessione sono identicamente nulli. Ne segue immediatamente che le geodetiche hanno equazioni del tipo

$$x = a_1 + b_1\lambda, \quad y = a_2 + b_2\lambda,$$

che il tensore di Riemann è nullo, ecc.

Se però vogliamo usare coordinate polari, sebbene la varietà sia ancora piatta non potremo più supporre $\Gamma = 0$, e vogliamo calcolarli. Se avessimo discusso le proprietà di trasformazione dei coefficienti di connessione per cambiamenti di coordinate, potremmo servirci di quella via; invece dobbiamo procedere diversamente.

Sfrutteremo la conoscenza delle equazioni delle geodetiche in coordinate cartesiane; in particolare ci serviremo delle rette parallele all'asse x:

$$x = \lambda, \quad y = a$$

che in coordinate polari si scrivono:

$$r\,\cos\varphi = \lambda, \quad r\,\sin\varphi = a,$$

da cui:

$$r = \sqrt{a^2 + \lambda^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{\lambda}.$$

Ci serviranno le espressioni delle derivate:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\lambda} &= \frac{\lambda}{r} = \cos\varphi, & \frac{d\varphi}{d\lambda} &= -\frac{a}{r^2} = -\frac{1}{r}\,\sin\varphi \\ \frac{d^2r}{d\lambda^2} &= \frac{a^2}{r^3} = \frac{1}{r}\,\sin^2\!\varphi, & \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} &= \frac{2a\lambda}{r^4} = \frac{2}{r^2}\,\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

Allora dall'equazione delle geodetiche (11–4) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\,\sin^2\!\varphi + \Gamma^r{}_{rr}\,\cos^2\!\varphi - 2\,\Gamma^r{}_{r\varphi}\,\frac{1}{r}\,\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^r{}_{\varphi\varphi}\,\frac{1}{r^2}\,\sin^2\!\varphi &= 0 \\ \frac{2}{r^2}\,\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^\varphi{}_{rr}\,\cos^2\!\varphi - 2\,\Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\frac{1}{r}\,\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}\,\frac{1}{r^2}\,\sin^2\!\varphi &= 0 \end{aligned}$$

e semplificando:

$$r\,\sin^2\varphi + \Gamma^r{}_{rr}\,r^2\cos^2\varphi - 2\,\Gamma^r{}_{r\varphi}\,r\,\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^r{}_{\varphi\varphi}\,\sin^2\varphi = 0$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^\varphi{}_{rr}\,r^2\cos^2\varphi - 2\,\Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,r\,\sin\varphi\cos\varphi + \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}\,\sin^2\varphi = 0.$$

Dalla simmetria delle coordinate è evidente che i Γ non possono dipendere da φ, e perciò si trova subito:

$$\Gamma^r{}_{rr} = \Gamma^r{}_{r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{rr} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = 0$$
$$\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = 1/r.$$

Possiamo anche passare facilmente alla base $\mathbf{e}_{\hat r}, \mathbf{e}_{\hat\varphi}$; i coefficienti non nulli si trovano ricordando la definizione (11–1) dei Γ e la linearità della derivazione covariante:

$$\Gamma^{\hat r}{}_{\hat\varphi\hat\varphi} = -1/r, \qquad \Gamma^{\hat\varphi}{}_{\hat r\hat\varphi} = 1/r.$$

Perché in coordinate polari i coefficienti di connessione non sono nulli? La ragione è che le coordinate polari sono "curve," ossia le linee coordinate non sono tutte rette (geodetiche). Se si trasporta parallelamente un vettore lungo una linea φ (che è un cerchio) le sue componenti non restano costanti: lasciamo per esercizio di verificare che ragionando per via geometrica sul trasporto parallelo si ritrovano per i Γ le espressioni date sopra (conviene usare la base $\mathbf{e}_{\hat r}, \mathbf{e}_{\hat\varphi}$, perché in tal modo si ha a che fare con semplici rotazioni).

Esempio 2

Vogliamo sfruttare questo esempio per far vedere che realmente la connessione affine può essere scelta in modo arbitrario. Introdurremo perciò due diverse connessioni:

Connessione **A**: è caratterizzata dalle geodetiche, come nell'esempio 1. Prendiamo come equazioni parametriche delle geodetiche:

$$\begin{aligned}\vartheta &= 2\,\mathrm{arctg}\Bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+\lambda^2}\Bigr)\\ \varphi &= \varphi_0 + \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{a}\end{aligned} \tag{13–1}$$

dove a, φ_0 individuano il punto di partenza della geodetica.

Calcolando come prima le derivate prime e seconde di ϑ, φ rispetto a λ e sostituendo nelle equazioni differenziali (11–4) si trovano, dopo qualche semplificazione, le relazioni

$$\begin{aligned}&(a^2 + 3a^2t^2 - 8t^4) + 2t\,(4t^2 - a^2)\,\Gamma^\vartheta{}_{\vartheta\vartheta}\\ &\qquad\qquad + 2a\,(1+t^2)\,\sqrt{4t^2-a^2}\,\Gamma^\vartheta{}_{\vartheta\varphi} + \frac{a^2}{2t}\,(1+t^2)^2\,\Gamma^\vartheta{}_{\varphi\varphi} = 0\\ &-2a\,(1+t^2)^2\,\sqrt{4t^2-a^2} + 4t^2(4t^2-a^2)\,\Gamma^\varphi{}_{\vartheta\vartheta}\\ &\qquad\qquad + 4at\,(1+t^2)\,\sqrt{4t^2-a^2}\,\Gamma^\varphi{}_{\vartheta\varphi} + a^2(1+t^2)^2\,\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = 0\end{aligned}$$

dove t sta per $\mathrm{tg}(\vartheta/2)$.

Se si fa uso del fatto che a è arbitrario, e della simmetria in φ (valida anche per le geodetiche (13–1)) si arriva subito alla soluzione:

$$\begin{gathered}{\Gamma^\vartheta}_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta/2, \qquad {\Gamma^\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta, \qquad {\Gamma^\varphi}_{\vartheta\varphi} = 1/\sin\vartheta \\ {\Gamma^\vartheta}_{\vartheta\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\vartheta\vartheta} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi\varphi} = 0.\end{gathered} \tag{13–2}$$

Possiamo usare le (13–2) per calcolare il tensore di Riemann; cominciamo con

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{w} &= ({w^\vartheta}_{,\vartheta} + w^\vartheta\tan\vartheta/2)\,\mathbf{e}_\vartheta + ({w^\varphi}_{,\vartheta} + w^\varphi/\sin\vartheta)\,\mathbf{e}_\varphi \\ \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} &= ({w^\vartheta}_{,\varphi} - w^\varphi\sin\vartheta)\,\mathbf{e}_\vartheta + ({w^\varphi}_{,\varphi} + w^\vartheta/\sin\vartheta)\,\mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Da queste si calcolano senza difficoltà $\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w}$ e $\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{w}$, e si vede che sono uguali: dunque dalla definizione (12–1)

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{w} = 0$$

(si ricordi che $[\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi] = 0$ perché si tratta di una base coordinata). Inoltre

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{w} = \mathbf{R}_{\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{w} = 0$$

per la (12–7). Ne segue che

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}\mathbf{w} = 0$$

qualunque siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ossia $\mathbf{R} = 0$ e *la varietà è piatta*!

Il risultato, che sembra paradossale, c'insegna a non lasciarsi trascinare dall'intuizione (la varietà dell'esempio 2 non è una sfera?) Riflettiamo perciò sulla definizione (13–1) delle geodetiche. Se introduciamo le coordinate

$$\begin{aligned}\xi &= 2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\,\cos\varphi \\ \eta &= 2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\,\sin\varphi\end{aligned} \tag{13–3}$$

le (13–1) diventano

$$\begin{aligned}\xi &= a\cos\varphi_0 - \lambda\sin\varphi_0 \\ \eta &= a\sin\varphi_0 + \lambda\cos\varphi_0,\end{aligned}$$

da cui si vede che la varietà ha la connessione affine di un piano euclideo con le coordinate cartesiane (ξ, η). In effetti le (13–3) rappresentano una proiezione della sfera dall'antipolo sul piano tangente nel polo (proiezione stereografica) e le geodetiche (13–1) sono i cerchi passanti per l'antipolo, che in proiezione stereografica si trasformano in rette.

Connessione **B**: procediamo all'inverso, definendo in primo luogo i Γ:

$$\begin{gathered}\Gamma^{\vartheta}{}_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{tg}\vartheta/2, \qquad \Gamma^{\vartheta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \Gamma^{\varphi}{}_{\vartheta\varphi} = \operatorname{cotg}\vartheta \\ \Gamma^{\vartheta}{}_{\vartheta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\varphi} = 0.\end{gathered} \tag{13–4}$$

Anziché scrivere l'equazione delle geodetiche, vediamo se — e in quali condizioni — i campi $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_z$, introdotti al Cap. 10 possano essere vettori tangenti di geodetiche. Più esattamente, posto

$$\mathbf{L} = a\,\mathbf{L}_x + b\,\mathbf{L}_y + c\,\mathbf{L}_z$$

dove a, b, c sono costanti arbitrarie, vogliamo vedere se $\mathbf{L}$ possa soddisfare l'equazione $\nabla_{\mathbf{L}}\mathbf{L} = 0$.

Conviene calcolare, a partire dalla (11–2) e dalle (13–4), le componenti $L^{\alpha}{}_{;\beta}$. Si trova:

$$\begin{gathered}L^{\vartheta}{}_{;\varphi} = -(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin^2\vartheta - c\sin\vartheta\cos\vartheta \\ L^{\varphi}{}_{;\vartheta} = a\cos\varphi + b\sin\varphi + c\operatorname{cotg}\vartheta \\ L^{\vartheta}{}_{;\vartheta} = L^{\varphi}{}_{;\varphi} = 0\end{gathered}$$

(si noti che $L^{\vartheta}{}_{;\varphi} = -\sin^2\vartheta\, L^{\varphi}{}_{;\vartheta}$).

Perché sia $\nabla_{\mathbf{L}}\mathbf{L} = 0$ deve dunque essere $L^{\varphi}{}_{;\vartheta} = 0$ lungo tutta la geodetica, e in coordinate cartesiane (x, y, z) questa condizione diviene

$$ax + by + cz = 0,$$

ossia un piano per il centro della sfera. Dunque le geodetiche che così si trovano sono *i cerchi massimi* della sfera, ed è facile capire che si ottengono tutte, data l'arbitrarietà di a, b, c. Si lascia al lettore di verificare un ultimo punto: un parametro affine sulle geodetiche è dato dalla lunghezza dell'arco.

Conclusione: *la connessione* (13–4) è *quella naturale per la sfera immersa nello spazio euclideo* E^3.

Per calcolare il tensore di Riemann conviene ricorrere alla definizione (12–1). Le componenti indipendenti sono 4:

$$R^{\vartheta}{}_{\vartheta\vartheta\varphi}, \quad R^{\vartheta}{}_{\varphi\vartheta\varphi}, \quad R^{\varphi}{}_{\vartheta\vartheta\varphi}, \quad R^{\varphi}{}_{\varphi\vartheta\varphi}$$

e le si ottengono tutte da

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\varphi}\,\mathbf{e}_\vartheta &= [\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}, \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}]\mathbf{e}_\vartheta = \nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{e}_\vartheta - \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta \\ &= \nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}(\Gamma^{\varphi}{}_{\vartheta\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi) = \nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}(\operatorname{cotg}\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi) \\ &= -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\mathbf{e}_\varphi + \operatorname{cotg}\vartheta\,\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\mathbf{e}_\varphi + \operatorname{cotg}^2\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathbf{e}_\vartheta,\mathbf{e}_\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi &= [\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta},\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}]\mathbf{e}_\varphi = \nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}\mathbf{e}_\varphi \\
&= \nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}(\Gamma^\vartheta{}_{\varphi\varphi}\,\mathbf{e}_\vartheta) - \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}(\Gamma^\varphi{}_{\vartheta\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi) \\
&= -\nabla_{\mathbf{e}_\vartheta}(\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta) - \nabla_{\mathbf{e}_\varphi}(\operatorname{cotg}\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi) \\
&= -(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,\mathbf{e}_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\,\nabla_{\mathbf{e}_\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\
&= -(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,\mathbf{e}_\vartheta + \cos^2\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta = \sin^2\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta.
\end{aligned}
$$

Dunque:

$$
\begin{aligned}
&R^\varphi{}_{\vartheta\vartheta\varphi} = -1, \quad R^\vartheta{}_{\varphi\vartheta\varphi} = \sin^2\vartheta \\
&R^\varphi{}_{\vartheta\varphi\vartheta} = 1, \qquad R^\vartheta{}_{\varphi\varphi\vartheta} = -\sin^2\vartheta
\end{aligned}
\tag{13–5}
$$

e tutte le altre sono nulle.

Ci si può chiedere dove appaia nelle (13–5) il fatto che si tratta di una sfera, ossia che la curvatura è costante. Per rispondere, cominciamo col riscriverle nella base $\mathbf{e}_{\hat\vartheta}$, $\mathbf{e}_{\hat\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
&R^{\hat\varphi}{}_{\hat\vartheta\hat\vartheta\hat\varphi} = -1, \quad R^{\hat\vartheta}{}_{\hat\varphi\hat\vartheta\hat\varphi} = 1 \\
&R^{\hat\varphi}{}_{\hat\vartheta\hat\varphi\hat\vartheta} = 1, \qquad R^{\hat\vartheta}{}_{\hat\varphi\hat\varphi\hat\vartheta} = -1.
\end{aligned}
\tag{13–6}
$$

In questa base le componenti sono tutte costanti e uguali tra loro in valore assoluto, il che può sembrare soddisfacente. Ma in realtà la questione non aveva senso, perché l'interpretazione del tensore di Riemann come misura della curvatura *è legata all'esistenza di una metrica*. Come vedremo poi, si dà il caso che con la metrica indotta sulla sfera dall'ordinaria metrica euclidea di E^3, la base $\mathbf{e}_{\hat\vartheta}$, $\mathbf{e}_{\hat\varphi}$ sia *ortonormale*: allora le (13–6) dicono realmente che la curvatura è costante.

Esercizio: Verificare che $\vartheta\,\cos\varphi$, $\vartheta\,\sin\varphi$ sono coordinate normali di Riemann per la connessione $\mathbf{B}$.