CAPITOLO 10

Alcuni esempi

Vedremo ora alcuni esempi delle idee introdotte nel cap. precedente, scelti in modo da essere al tempo stesso semplici e significativi. Li riprenderemo nel seguito, man mano che svilupperemo l'argomento.

Esempio 1

Consideriamo il consueto piano euclideo, e i due più comuni sistemi di coordinate: cartesiane e polari. Alle coordinate cartesiane (x, y) corrisponde nello spazio tangente la base $\mathbf{e}_x = \partial/\partial x$, $\mathbf{e}_y = \partial/\partial y$. Ovviamente $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y] = 0$ e non c'è molto da aggiungere.

Se invece usiamo le coordinate polari (r, φ) avremo nello spazio tangente la base $\mathbf{e}_r = \partial/\partial r$, $\mathbf{e}_\varphi = \partial/\partial\varphi$, e ancora $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi] = 0$. Alcuni aspetti interessanti di questa base verranno chiariti nel seguito.

La relazione fra le due basi può essere ottenuta osservando che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{x}{r}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\,\frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Da queste si vede che

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{1}{r}\,(x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y)\\
\mathbf{e}_\varphi &= -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

e invertendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\,\sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi\\
\mathbf{e}_y &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Queste relazioni si possono mettere naturalmente in forma di matrici:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_r\\ \mathbf{e}_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r\\ -y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{e}_y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{e}_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\dfrac{\sin\varphi}{r}\\[2ex] \sin\varphi & \dfrac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_r\\ \mathbf{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

e si noterà che le matrici di trasformazione *non sono ortogonali.*

Le basi duali sono $\boldsymbol{\omega}^x = \mathbf{d}x$, $\boldsymbol{\omega}^y = \mathbf{d}y$ e $\boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{d}r$, $\boldsymbol{\omega}^\varphi = \mathbf{d}\varphi$ rispettivamente. La trasformazione si ottiene facilmente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}x &= \cos\varphi\,\mathbf{d}r - r\sin\varphi\,\mathbf{d}\varphi \\
\mathbf{d}y &= \sin\varphi\,\mathbf{d}r + r\cos\varphi\,\mathbf{d}\varphi
\end{aligned}
$$

e invertendo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}r &= \frac{1}{r}\,(x\,\mathbf{d}x + y\,\mathbf{d}y) \\
\mathbf{d}\varphi &= \frac{1}{r^2}\,(-y\,\mathbf{d}x + x\mathbf{d}y)
\end{aligned}
$$

o anche:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{d}x \\ \mathbf{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}r \\ \mathbf{d}\varphi \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{d}r \\ \mathbf{d}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}x \\ \mathbf{d}y \end{pmatrix}.
$$

Le matrici di trasformazione delle $\{\boldsymbol{\omega}^\alpha\}$ sono le trasposte inverse di quelle delle $\{\mathbf{e}_\alpha\}$: si tratta di un fatto generale, di cui lasciamo la dimostrazione al lettore.

Un'altra base che può riuscire utile è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\hat{r}} &= \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\varphi \\
\boldsymbol{\omega}^{\hat{r}} &= \boldsymbol{\omega}^r, & \boldsymbol{\omega}^{\hat{\varphi}} &= r\,\boldsymbol{\omega}^\varphi.
\end{aligned}
$$

Questa *non* è una base coordinata:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}]f &= \left[\mathbf{e}_r, \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\varphi\right] f = \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\varphi f\right) - \frac{1}{r}\,\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{e}_r f) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
[\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}] = -\frac{1}{r}\,\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \neq 0.
$$

La sua utilità sta nel fatto che la trasformazione dalla base associata alle coordinate cartesiane *è ortogonale*; ma per capirne il motivo dobbiamo arrivare a parlare di metrica.

Si noti che le curve integrali di $\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$ hanno lo stesso sostegno di quelle di $\mathbf{e}_\varphi$ (in entrambi i casi si tratta di cerchi $r = \text{cost.}$) ma cambia la parametrizzazione: nel caso di $\mathbf{e}_\varphi$ si ha un giro completo per $\lambda = 2\pi$; nell'altro caso per $\lambda = 2\pi r$.

Esempio 2

Se pensiamo alla sfera S^2, e su di essa alle coordinate polari (ϑ,φ), abbiamo subito la base coordinata $\mathbf{e}_\vartheta = \partial/\partial\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi = \partial/\partial\varphi$ e la base duale $\boldsymbol{\omega}^\vartheta = \mathbf{d}\vartheta$, $\boldsymbol{\omega}^\varphi = \mathbf{d}\varphi$. Naturalmente $[\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi] = 0$.

Analogamente al caso del piano, riesce utile un'altra base:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat\vartheta} &= \mathbf{e}_\vartheta, \qquad & \mathbf{e}_{\hat\varphi} &= \frac{1}{\sin\vartheta}\,\mathbf{e}_\varphi \\ \boldsymbol{\omega}^{\hat\vartheta} &= \boldsymbol{\omega}^\vartheta, \qquad & \boldsymbol{\omega}^{\hat\varphi} &= \sin\vartheta\,\boldsymbol{\omega}^\varphi. \end{aligned}$$

Anche questa non è una base coordinata: si verifica subito che

$$[\mathbf{e}_{\hat\vartheta}, \mathbf{e}_{\hat\varphi}] = -\operatorname{cotg}\vartheta\,\mathbf{e}_{\hat\varphi}.$$

Un altro sistema di coordinate interessante si ottiene ponendo

$$x = \sin\vartheta\,\cos\varphi, \qquad y = \sin\vartheta\,\sin\varphi.$$

Si tratta ovviamente della proiezione ortogonale della sfera sul piano tangente nel polo. Se cerchiamo la trasformazione dalla base $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ all'altra $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, è più semplice procedere con le basi duali:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}x &= \cos\vartheta\,\cos\varphi\,\mathbf{d}\vartheta - \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\mathbf{d}\varphi \\ \mathbf{d}y &= \cos\vartheta\,\sin\varphi\,\mathbf{d}\vartheta + \sin\vartheta\,\cos\varphi\,\mathbf{d}\varphi \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}x, \mathbf{e}_\varphi \rangle &= -\sin\vartheta\,\sin\varphi = -y \\ \langle \mathbf{d}y, \mathbf{e}_\varphi \rangle &= \sin\vartheta\,\cos\varphi = x \end{aligned}$$

e perciò

$$\mathbf{e}_\varphi = -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y.$$

Analogamente si ottiene:

$$\operatorname{tg}\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y.$$

È interessante studiare i campi vettoriali:

$$\begin{gathered} \mathbf{L}_x = -\cos\vartheta\,\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{L}_y = \cos\vartheta\,\mathbf{e}_x \\ \mathbf{L}_z = x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\varphi. \end{gathered}$$

Come esercizio si verifichi che

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = -\mathbf{L}_z, \qquad [\mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z] = -\mathbf{L}_x, \qquad [\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_x] = -\mathbf{L}_y$$

e poi

$$\mathbf{L}_z x = -y, \qquad \mathbf{L}_z y = x, \qquad \text{ecc.}$$

Non è difficile riconoscere da queste relazioni i generatori delle rotazioni attorno agli assi x, y, z (a rigore questo modo di esprimersi ha senso solo se pensiamo alla sfera come sottovarietà di un E^3!) È anche interessante cercare le curve integrali di questi campi: allo scopo usiamo le coordinate (x, y). Allora per $\mathbf{L}_x$ abbiamo le equazioni:

$$\frac{dx}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{dy}{d\lambda} = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

La prima dice subito che x è costante: $x = x_0$; la seconda s'integra senza difficoltà, e porta

$$y = -\sqrt{1 - x_0^2}\,\sin\lambda.$$

Quanto a $\mathbf{L}_y$, abbiamo:

$$x = \sqrt{1 - y_0^2}\,\sin\mu, \qquad y = y_0.$$

Sebbene queste nel piano (x, y) siano due sistemi di rette parallele agli assi cartesiani, dev'esserci traccia del fatto che $\mathbf{L}_x$ e $\mathbf{L}_y$ non commutano. In effetti, se dal punto $(0, 0)$ si segue prima la curva di $\mathbf{L}_x$ fino a un certo λ, e poi la curva di $\mathbf{L}_y$ fino a un certo μ, il punto cui si arriva ha coordinate

$$x = \cos\lambda\,\sin\mu, \quad y = -\sin\lambda;$$

se si fa il viceversa si arriva invece in

$$x = \sin\mu, \quad y = -\sin\lambda\,\cos\mu.$$

Nel seguito ci riusciranno utili le espressioni di $\mathbf{L}_x$, $\mathbf{L}_y$, $\mathbf{L}_z$ nella base $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta - \cos\varphi\,\operatorname{cotg}\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{L}_y &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_\vartheta - \sin\varphi\,\operatorname{cotg}\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{L}_z &= \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \tag{10–1}$$