CAPITOLO 8

Gli spazi a curvatura costante

Passiamo ora a studiare un quarto esempio di metrica:

$$d\tau^2 = R^2 \bigl(d\eta^2 - d\chi^2 - \Sigma^2 \, (d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2)\bigr) \tag{8–1}$$

dove

$$R = R(\eta), \qquad \Sigma = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \chi & (1) \\ \sin\chi & (2) \\ \sinh\chi & (3). \end{cases}$$

Supporremo, almeno per ora, $\eta \in \mathbb{R}^+$; ϑ e φ come al solito. Quanto a χ, nei sottocasi (1) e (3) avremo $\chi \in \mathbb{R}^+$, mentre nel sottocaso (2) si pone $\chi \in [0, \pi]$.

La geometria dello spazio-tempo descritta dalla (8–1) si chiama *geometria di Robertson–Walker*. Abbiamo distinto i tre sottocasi (1), (2), (3) per ragioni che saranno chiare in seguito. In tutti possiamo dire che η è una coordinata temporale, mentre le altre sono spaziali; ne segue che $\eta =$ cost. individua delle sezioni spaziali, la cui metrica è

$$ds^2 = R^2 \bigl(d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) \, (d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2)\bigr). \tag{8–2}$$

Dalla (8–2) si vede che esiste la simmetria sferica (gruppo SO(3) delle rotazioni in ϑ, φ). Non si tratta però in generale di uno spazio euclideo: mentre la lunghezza in direzione χ è data da

$$dl_{\text{rad}} = R \, d\chi,$$

la lunghezza di un cerchio massimo della sfera $\chi =$ cost. è

$$l_{\text{circ}} = 2\pi R \, \Sigma(\chi),$$

che solo nel sottocaso (1) è quella prevista dalla geometria euclidea. Ci tornerà utile in seguito anche l'espressione dell'elemento di volume:

$$dV = R \, d\chi \cdot R \, \Sigma \, d\vartheta \cdot R \, \Sigma \sin\vartheta \, d\varphi = R^3 \Sigma^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\chi. \tag{8–3}$$

Le diverse sezioni spaziali differiscono solo per il valore di R, che appare nella (8–2) come un fattore di scala: passando da una sezione spaziale all'altra, le distanze variano in modo proporzionale a R.

È ovvio che la completa determinazione della metrica richiede la conoscenza della funzione $R(\eta)$, che si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein, una volta assegnata la distribuzione e le proprietà fisiche della materia presente. Tuttavia molte cose si possono capire anche lasciando indeterminata $R(\eta)$: nell'applicazione alla cosmologia questa si chiama la *cinematica cosmologica.*

Simmetrie e geodetiche

Vogliamo ora studiare alcune geodetiche semplici, sfruttando le proprietà di simmetria della metrica. Dato che la definizione di geodetica ha carattere intrinseco, possiamo scegliere, a seconda dei casi, il sistema di coordinate che più ci facilita il lavoro.

È chiaro per simmetria che la curva $\chi = 0$ è una geodetica (si noti che per $\chi = 0$ non occorre specificare ϑ e φ); ma vediamone un cenno di dimostrazione. Dato il punto iniziale A di coordinate $(\eta_0, 0, 0, 0)$ e la direzione della tangente:

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = 1, \quad \frac{d\chi}{d\lambda} = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

la geodetica è determinata univocamente: infatti le equazioni differenziali di Eulero–Lagrange che si deducono dal principio variazionale sono del secondo ordine. Poiché tanto A quanto la direzione della tangente restano invarianti per tutte le rotazioni dello spazio, lo stesso deve accadere per ciascun punto della geodetica, e tale condizione è soddisfatta solo se $\chi = 0$ lungo tutta la curva ($\chi = 0$ è l'unico *punto fisso* del gruppo delle rotazioni).

Sorge allora la domanda: le curve $\chi = \text{cost.} \neq 0$, $\vartheta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ sono anch'esse geodetiche? Qui l'argomento basato sulla simmetria SO(3) non si può più usare, ma viene in soccorso la simmetria molto più larga che la metrica (8–1) possiede: non per una $\Sigma(\chi)$ generica, ma solo per quelle indicate.

Cominciamo dal caso (1), che è il più semplice. Poiché le sezioni spaziali sono euclidee, accanto alle rotazioni fanno parte del gruppo di simmetria anche le traslazioni, come si vede passando a coordinate cartesiane:

$$d\tau^2 = R^2\,(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2).$$

Il punto $x = y = z = 0$ nelle sezioni spaziali non è un punto privilegiato; la corrispondente geodetica si trasforma per traslazioni in un'altra, di equazioni $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Il gruppo di simmetria completo ha 6 parametri, ed è il *gruppo euclideo* in 3 dimensioni E_3.

Nel caso (2) la simmetria si rende evidente osservando che le sezioni spaziali sono sottovarietà di un $\mathbb{R}^4$ nelle coordinate cartesiane w, x, y, z che soddisfano l'equazione

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{8–4}$$

Questo si vede con le posizioni

$$\begin{aligned} w &= \cos\chi \\ x &= \sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= \sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= \sin\chi\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{8–5}$$

Si tratta di sfere S^3 (di raggio R e volume $2\pi^2R^3$). Il gruppo di simmetria è dunque SO(4): il gruppo a 6 parametri delle rotazioni in $\mathbb{R}^4$. Il gruppo agisce transitivamente sulla sfera: comunque scelti due punti, esiste una rotazione (in realtà sono infinite) che manda il primo nel secondo. Da qui segue di nuovo che tutte le curve con x, y, z costanti (ossia con χ, ϑ, φ costanti) sono geodetiche.

Infine nel caso (3) si procede di nuovo con le coordinate w, x, y, z; ma l'equazione (8–4) diventa

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

e occorrono le sostituzioni

$$\begin{aligned} w &= \cosh\chi \\ x &= \sinh\chi\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= \sinh\chi\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= \sinh\chi\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Questa volta si tratta di iperboloidi in $\mathbb{R}^4$; (si può ancora parlare di "raggio" R, o più propriamente di "semiasse trasverso," ma il volume è infinito). Il gruppo di simmetria è ancora a 6 parametri, ma è il gruppo di Lorentz. Anche in questo caso, per le stesse ragioni del caso precedente, ogni curva $\chi =$ cost., $\vartheta =$ cost., $\varphi =$ cost. è una geodetica.

Quello che accomuna i tre casi è che in tutti ogni punto di una sezione spaziale è equivalente a ogni altro, perché si passa dal primo al secondo mediante una simmetria della metrica (tecnicamente, *isometria*). Ne segue che le proprietà di curvatura dello spazio (che definiremo esattamente più avanti) sono le stesse in ogni punto: si parla perciò di spazi *a curvatura costante*: nulla nel caso (1), che è euclideo; positiva nel caso (2); negativa nel caso (3).

Da un punto di vista fisico, il modello di universo così costruito è *omogeneo*, e in particolare la densità di materia, dalla quale dipende la curvatura, dev'essere la stessa in tutti i punti di una sezione spaziale fatta a η costante. Inoltre l'invarianza rispetto al gruppo SO(3) delle rotazioni vale attorno a ogni punto, e questo ci dice che l'universo è anche *isotropo*.

Altre coordinate

Per la geometria di Robertson–Walker sono in uso altri sistemi di coordinate, che presentano ciascuno dei vantaggi a seconda del problema. Li elenchiamo qui di seguito.

Le geodetiche che abbiamo trovato sopra sono di tipo temporale, e sono perciò possibili linee orarie di punti materiali in caduta libera. Lungo queste geodetiche il tempo proprio è misurato da

$$d\tau = R(\eta)\, d\eta. \tag{8–6}$$

Conviene perciò introdurre, in alternativa a η, un'altra coordinata temporale:

$$t = \int R(\eta)\, d\eta$$

ottenendo così per la metrica la forma:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2\bigl(d\chi^2 + \Sigma^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2)\bigr). \tag{8–7}$$

Se si pone $\sigma = \Sigma(\chi)$, e si mantengono le altre coordinate (t, ϑ, φ) si ottiene

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - R^2\left(\frac{d\sigma^2}{\Sigma'^2} + \sigma^2\,\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\bigr)\right) \\ &= dt^2 - R^2\left(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2\,\bigl(d\vartheta^2 + \sin^2\!\vartheta\, d\varphi^2\bigr)\right) \end{aligned}$$

dove $k = 0, 1, -1$ risp. nei casi (1), (2), (3).

La propagazione della luce: il redshift cosmologico

Ci limiteremo alla propagazione "radiale," ossia a ϑ e φ costanti. (Lasciamo per esercizio dimostrare che questa non è affatto una restrizione.) Abbiamo ovviamente dalla (8–1):

$$d\eta = \pm d\chi \quad \Rightarrow \quad \eta = \pm\chi + \text{cost.}$$

Se la luce viene emessa in $(\eta_\mathrm{e}, \chi_\mathrm{e})$ e ricevuta in $(\eta_\mathrm{r}, \chi_\mathrm{r})$ (con $\chi_\mathrm{r} > \chi_\mathrm{e}$) ne risulta

$$\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e} = \chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e}$$

e se sorgente e ricevitore sono fermi (nel senso delle coordinate spaziali usate) per l'emissione di due segnali successivi si ha

$$d\eta_\mathrm{r} = d\eta_\mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau_\mathrm{r}}{d\tau_\mathrm{e}} = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}}$$

(per la (8–6)). Ne segue un effetto di redshift: è tradizionale porre $z = \Delta\lambda/\lambda$ e perciò

$$1 + z = \frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} \qquad z = \frac{R_\mathrm{r} - R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{e}}. \tag{8–8}$$

Questo si chiama *redshift cosmologico*, per distinguerlo da quello gravitazionale, e dall'effetto Doppler dovuto ai moti particolari delle sorgenti. S'intende che avremo realmente redshift solo se $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$, ossia se R è funzione crescente di η.

È interessante studiare il caso in cui χ_r differisce poco da χ_e, e di conseguenza η_r differisce poco da η_e e z è piccolo:

$$z \simeq \frac{1}{R}\frac{dR}{d\eta}\,(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e}) = \frac{dR}{dt}\,(\chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e}).$$

La distanza l fra sorgente e ricevitore all'istante di emissione (o a quello di ricezione, a meno di termini del secondo ordine) vale circa $R\,(\chi_\mathrm{r} - \chi_\mathrm{e})$, e si arriva a

$$z \simeq \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\,l = Hl \tag{8–9}$$

dove abbiamo posto

$$H = \frac{\dot{R}}{R}. \tag{8–10}$$

Questa è la *legge di Hubble*: *il redshift cosmologico è proporzionale alla distanza della sorgente.* H si chiama *costante di Hubble.*

Ricordiamo che storicamente la legge di Hubble ha origine dalle osservazioni: intorno al 1930 fu possibile misurare il redshift della luce proveniente da galassie abbastanza lontane. Per scoprire il redshift cosmologico occorreva infatti che esso fosse prevalente sullo spostamento Doppler dovuto al moto relativo (che farebbe cadere l'ipotesi di coordinate costanti, fatta nella nostra deduzione); d'altra parte all'inizio le sorgenti osservate non erano così lontane perché diventassero importanti le deviazioni dall'approssimazione lineare fatta per arrivare alla (8–9).

La relazione redshift-distanza al secondo ordine

Se l, e quindi z, non è piccolo, la relazione lineare fra z e l non vale più; poiché oggi sono note sorgenti con $z > 4$ è ovvio cercare un'approssimazione migliore. Ci limiteremo qui alle correzioni del secondo ordine.

Occorre in primo luogo definire esattamente l. Intenderemo la distanza *all'istante di ricezione*: allora

$$l = R_\mathrm{r}\,(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e})$$

mentre la (8–8) può essere scritta

$$z = R_{\rm r}\left(\frac{1}{R_{\rm e}} - \frac{1}{R_{\rm r}}\right). \tag{8–11}$$

Prendiamo ora l come variabile indipendente, e scriviamo lo sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{R_{\rm e}} = \frac{1}{R_{\rm r}} + \left(\frac{d}{dl}\frac{1}{R}\right)_{\rm r} l + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dl^2}\frac{1}{R}\right)_{\rm r} l^2 + \cdots$$

Abbiamo poi

$$\frac{d}{dl}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R_{\rm r}}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{R} = -\frac{R}{R_{\rm r}}\frac{d}{dt}\frac{1}{R} = \frac{R}{R_{\rm r}}\frac{\dot R}{R^2} = \frac{1}{R_{\rm r}}\frac{\dot R}{R}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dl^2}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_{\rm r}^2}\frac{d^2}{d\eta^2}\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\rm r}^2}\frac{d}{d\eta}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{R} = \frac{R}{R_{\rm r}^2}\frac{d}{dt}\left(R\frac{d}{dt}\frac{1}{R}\right)\\ &= -\frac{R}{R_{\rm r}^2}\frac{d}{dt}\frac{\dot R}{R} = -\frac{R}{R_{\rm r}^2}\left(\frac{\ddot R}{R} - \frac{\dot R^2}{R^2}\right)\end{aligned}$$

e infine

$$\left(\frac{d}{dl}\frac{1}{R}\right)_{\rm r} = \frac{\dot R_{\rm r}}{R_{\rm r}^2}$$

$$\left(\frac{d^2}{dl^2}\frac{1}{R}\right)_{\rm r} = \frac{1}{R_{\rm r}}\left(\frac{\dot R_{\rm r}^2}{R_{\rm r}^2} - \frac{\ddot R_{\rm r}}{R_{\rm r}}\right).$$

Possiamo ora sostituire nella (8–11), ottenendo

$$z = \frac{\dot R_{\rm r}}{R_{\rm r}}\, l + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot R_{\rm r}^2}{R_{\rm r}^2} - \frac{\ddot R_{\rm r}}{R_{\rm r}}\right) l^2. \tag{8–12}$$

Si usa scrivere la (8–12) nella forma

$$z = H_0 l + \tfrac{1}{2}(1 + q_0)\, H_0^2 l^2 \tag{8–13}$$

dove si sono fatte le posizioni:

$$H_0 = \frac{\dot R_{\rm r}}{R_{\rm r}}$$

(valore presente della costante di Hubble) e

$$q_0 = -\frac{R_{\rm r}\ddot R_{\rm r}}{\dot R_{\rm r}^2} = -\frac{\ddot R_{\rm r}}{H_0^2 R_{\rm r}}.$$

La grandezza q_0 si chiama *parametro di decelerazione.* Una misura delle deviazioni della relazione redshift-distanza dalla semplice proporzionalità fornisce informazioni su q_0.

Orizzonti

Abbiamo visto che nelle coordinate usate la legge di propagazione della luce riesce assai semplice:

$$\eta_{\mathrm{r}} - \eta_{\mathrm{e}} = |\chi_{\mathrm{r}} - \chi_{\mathrm{e}}| \qquad (8\text{–}14)$$

dove il valore assoluto tiene conto dei due casi possibili: $\chi_{\mathrm{r}} \gtrless \chi_{\mathrm{e}}$. Possiamo quindi discutere facilmente il fenomeno degli *orizzonti.*

Chiediamoci in primo luogo: da quali regioni dell'Universo possiamo oggi ricevere segnali? Se facciamo $\chi_{\mathrm{r}} = 0$ la (8–14) diventa

$$\chi_{\mathrm{e}} = \eta_{\mathrm{r}} - \eta_{\mathrm{e}}$$

perché in tutti i modelli è sempre $\chi \geq 0$. Inoltre $\eta_{\mathrm{r}} = \eta_0$ è dato (corrisponde al tempo presente); se perciò esiste un limite inferiore a η, ad es. $\eta \geq 0$, ne segue un limite superiore per χ_{e}, ossia un *orizzonte degli oggetti* (fig. 8–1):

$$\chi_{\mathrm{e}} \leq \chi_{\mathrm{o}} = \eta_0 \qquad (8\text{–}15)$$

Si noti che la (8–14) vale per la luce; qualunque altra azione causale sarà trasmessa lungo linee orarie di tipo temporale o al più nullo, e perciò la (8–15) sarà soddisfatta a maggior ragione.

A titolo di esempio, consideriamo il *modello di Friedmann* (la cui origine fisica verrà esaminata più avanti): in questo modello la funzione $R(\eta)$ ha l'espressione

$$R = R_0\,(1 - \cos\eta) \qquad \text{con} \qquad \eta \in [0, 2\pi] \qquad (8\text{–}16)$$

e la curvatura delle sezioni spaziali è positiva:

$$k = 1, \qquad \Sigma = \sin\chi, \qquad \chi \in [0, \pi].$$

Si vede che R cresce per $\eta < \pi$, e il redshift cosmologico osservato ci assicura che siamo in questa fase: ne segue banalmente $\chi_{\mathrm{o}} < \pi$, e dunque esiste realmente un orizzonte degli oggetti: esistono regioni dell'Universo che non possono ancora aver influito su quella vicina a noi (e ovviamente viceversa).

Si può anche definire un *orizzonte degli eventi*: gli eventi più lontani, fra quelli che hanno luogo *ora* (ossia con $\eta = \eta_0$) e che potranno mai esser visti da noi. Dato che $\eta \leq 2\pi$, abbiamo

$$\chi_{\mathrm{e}} = 2\pi - \eta_0 > \pi;$$

ne segue che per il modello di Friedmann ora non esiste un orizzonte degli eventi. Esso può però esistere in altri modelli.

Il problema dell'isotropia

Riprendiamo il discorso sull'orizzonte degli oggetti, dal seguente punto di vista: per η_0 abbastanza piccolo l'orizzonte ha un'estensione spaziale ristretta, e perciò esistono regioni spaziali che non possono essersi influenzate a vicenda (fig. 8–2). Ne segue che a quel tempo non c'è motivo di trovare proprietà fisiche simili in quelle regioni. Invece l'osservazione, attraverso la radiazione di fondo a microonde, mostra una grande omogeneità (l'isotropia della radiazione osservata è migliore di $3 \cdot 10^{-5}$ per angoli fino a 80°). Questo è il *problema dell'isotropia*, che ha portato, come tentativo di spiegazione, ai *modelli inflazionari*, di cui qui non possiamo parlare.

Vogliamo invece, a titolo d'esercizio, tradurre in termini quantitativi quanto detto sopra. Il problema s'imposta così: all'epoca attuale ($\eta = \eta_\mathrm{r}$) riceviamo, da tutte le direzioni, radiazione emessa in un'epoca lontana ($\eta = \eta_\mathrm{e}$). Prese due direzioni che formano un angolo α, vogliamo vedere se una delle due regioni può essere stata influenzata dall'altra prima di emettere la radiazione che noi vediamo, ossia per $\eta < \eta_\mathrm{e}$.

Nelle sezioni spaziali dell'Universo abbiamo tre punti importanti: quello R dove siamo noi; quello S che dovrebbe aver influenzato l'altro; infine quest'ultimo, che diremo E. Gli eventi rilevanti si susseguono in questo modo:

– da S parte un segnale che si propaga verso E, dove arriva *prima* che da qui parta, al tempo η_e, la radiazione che arriverà in R al tempo η_r
– successivamente (al tempo η_e) da S parte anche la radiazione che arriva in R, anch'essa al tempo η_r.

Abbiamo quindi il triangolo RSE, del quale sappiamo i seguenti dati:

– i tre lati sono geodetiche dell'ipersfera
– in termini della coordinata χ, i lati SR ed ER valgono $\eta_1 = \eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e}$
– il lato SE vale al più η_e
– l'angolo in R è α.

Vogliamo trovare il massimo di α per dati η_e, η_r.

Le cose sono più semplici se invece di dire che ER vale η_1, ci limitiamo a richiedere che valga $\eta_2 \le \eta_1$. Infatti un disegno nel piano (fig. 8–3) mostra che in tal caso il massimo di α si ha se il triangolo è rettangolo in E. Questo è vero anche nell'ipersfera, solo che occorre la trigonometria sferica per arrivare alla relazione voluta:

$$\sin \alpha \le \frac{\sin \eta_\mathrm{e}}{\sin(\eta_\mathrm{r} - \eta_\mathrm{e})}. \tag{8–17}$$

Vediamo sommariamente come si può arrivare alla (8–17) per altra via. Useremo il sistema di coordinate (w, x, y, z) definite dalle (8–5), scegliendo in un primo tempo l'origine della χ in E, e poi in R. Nel primo caso avremo

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\eta_2 & \sin\eta_2 & 0 & 0 \\ \cos\eta_\mathrm{e} & 0 & \sin\eta_\mathrm{e} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

e nel secondo

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{S} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w' & x' & y' & z' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\eta_2 & -\sin\eta_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\eta_1 & -\sin\eta_1\cos\alpha & \sin\eta_1\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La trasformazione dalle coordinate (w, x, y, z) alle (w', x', y', z') è una rotazione in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\eta_2 & \sin\eta_2 & 0 & 0 \\ -\sin\eta_2 & \cos\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che lascia invariate y e z. Perciò $y'_\mathrm{S} = y_\mathrm{S}$ ossia $\sin\eta_1 \sin\alpha = \sin\eta_\mathrm{e}$, da cui la (8–17).

Sappiamo che η_r è dell'ordine di $\pi/2$, mentre — come vedremo subito — η_e per la radiazione di fondo è piccolo; allora anche α è piccolo:

$$\alpha \lesssim \eta_\mathrm{e}. \qquad (8\text{–}18)$$

Resta solo da calcolare η_e: la (8–16) per η piccoli dà $R = \frac{1}{2} R_0 \eta^2$. Dalle (8–8), per $R_\mathrm{r} \gg R_\mathrm{e}$, si ha

$$z \simeq \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} \simeq \frac{R_0}{R_\mathrm{e}} = \frac{2}{\eta_\mathrm{e}^2}$$

e infine, con la (8–18):

$$\alpha \lesssim \sqrt{2/z}.$$

Poiché per la radiazione di fondo $z \gtrsim 10^3$, si arriva a

$$\alpha \lesssim 0.05\,\mathrm{rad} \simeq 3^\circ,$$

che è molto più piccolo del valore osservato.

Aggiungiamo che i dati ottenuti col satellite COBE hanno mostrato una piccola anisotropia, dell'ordine di 10^{-5}, insufficiente a eliminare il problema.