CAPITOLO 2

Coordinate e metrica: primo esempio

È utile studiare qualche esempio per prendere pratica con l'arbitrarietà delle coordinate e col significato fisico della metrica. Siano ξ, η, y, z le coordinate, nelle quali la metrica abbia la forma:

$$d\tau^2 = \eta^2\, d\xi^2 - d\eta^2 - dy^2 - dz^2. \tag{2–1}$$

Dato che la (2–1) è diagonale, dalla semplice osservazione dei segni è ovvio che ξ è la coordinata temporale, η, y, z quelle spaziali. La (2–1) ha la stessa forma della (1–2) per quanto riguarda y e z, che inoltre non figurano nei coefficienti della metrica. Perciò queste coordinate non dicono niente d'interessante e possiamo limitarci alle sezioni $y = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$, eliminando queste coordinate da tutti i calcoli. In linguaggio più matematico, la nostra varietà è il *prodotto* di una varietà bidimensionale (coordinate ξ, η) che dobbiamo studiare, e di un piano euclideo (coordinate y, z) che possiamo lasciare da parte.

La metrica data dalla (2–1) ha le seguenti proprietà:

1) è diagonale (le coordinate sono ortogonali)
2) su ogni curva $\xi = \text{cost.}$ la distanza dall'origine ($\eta = 0$) è fissa, e vale $|\eta|$
3) su di una curva $\eta = \text{cost.}$ si ha $d\tau = |\eta|\, d\xi$.

Dunque la coordinata ξ non misura il tempo di un orologio che abbia η costante (sarebbe improprio dire "fermo"). Occorre invece il fattore correttivo η, che cambia da punto a punto. Questo produce un effetto di "redshift," come vedremo subito. Ma prima occorre studiare la propagazione della luce.

Nota: A rigore dovremmo lasciare un doppio segno: $d\tau = \pm|\eta||, d\xi$. Ma possiamo risolvere l'ambiguità se conveniamo che la coordinata ξ sia sempre orientata nel senso in cui il tempo τ segnato da un orologio cresce.

Le geodetiche della luce

In ogni RIL la propagazione della luce è descritta da $d\tau = 0$; ma questa espressione è invariante, e perciò vale in coordinate arbitrarie. Nelle coordinate ξ, η la linea oraria della luce ha dunque l'equazione differenziale

$$\eta\, d\xi = \pm d\eta$$

(i due segni corrispondono ai due versi di propagazione della luce: per η crescente o decrescente). Integrando si ottiene

$$\eta = \alpha\, e^{\pm\xi}$$

$$\xi = \pm \ln \frac{\eta}{\alpha} = \pm(\ln|\eta| - \ln|\alpha|)$$

che sono due famiglie di curve traslate in direzione ξ (fig. 2–1).

Si noti che η ha il segno di α: dunque i due semispazi $\eta > 0$ e $\eta < 0$ non comunicano. In realtà la metrica è *singolare* per $\eta = 0$; ma il problema è se questa sia una singolarità *fisica*, o solo *matematica*, ossia derivante da una scelta inadatta delle coordinate. Fra poco ritorneremo su questo punto; si tratta infatti di un utile esercizio che ci preparerà a situazioni di gran lunga più importanti, in cui si presenta lo stesso problema.

Se dal punto $\eta = \eta_1 > 0$ s'invia un segnale luminoso (evento A), che arriva in $\eta = \eta_2 > \eta_1$ (evento B); e poi un altro (evento A′) che arriva all'evento B′, avremo

$$\xi_{\mathrm{A}'} - \xi_{\mathrm{A}} = \xi_{\mathrm{B}'} - \xi_{\mathrm{B}} = \Delta\xi; \qquad \Delta\tau_1 = \eta_1\,\Delta\xi, \quad \Delta\tau_2 = \eta_2\,\Delta\xi$$

cioè

$$\Delta\tau_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\,\Delta\tau_1 : \qquad \Delta\tau_2 > \Delta\tau_1.$$

Per piccole differenze:

$$\Delta\tau_2 = \left(1 + \frac{\Delta\eta}{\eta}\right)\Delta\tau_1. \tag{2–2}$$

Osserviamo che la cosa essenziale per arrivare alla (2–2) è mostrare che $\Delta\xi$ non cambia dalla partenza all'arrivo. Ma per questo basta osservare che la metrica (2–1) è *invariante per traslazioni* della coordinata ξ, senza bisogno di studiare in dettaglio le geodetiche della luce, come abbiamo fatto. In seguito ci serviremo più volte di invarianze analoghe, per abbreviare i ragionamenti che portano allo stesso risultato in altre situazioni.

Il risultato espresso dalla (2–1) si chiama di solito "redshift," e occorre ora spiegare perché. Supponiamo che nell'intervallo $\Delta\tau_1$ una sorgente in η_1 emetta un treno di onde monocromatiche di frequenza ν_1. Esso conterrà $N_1 = \nu_1\,\Delta\tau_1$ periodi. Quando il treno d'onde arriva in η_2, lo stesso numero di periodi viene ricevuto in un tempo $\Delta\tau_2$: dunque accanto a $N_2 = N_1$ abbiamo $N_2 = \nu_2\,\Delta\tau_2$, ossia la frequenza *deve cambiare*. Esattamente:

$$\nu_2 = \nu_1\,\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \nu_1\,\frac{\eta_1}{\eta_2}$$

e per piccole differenze

$$\nu_2 = \left(1 - \frac{\Delta\eta}{\eta}\right)\nu_1. \tag{2–3}$$

Al crescere di η la frequenza diminuisce, e per questo si parla di redshift.

Il ragionamento che abbiamo fatto va però approfondito: abbiamo dato per scontato che il numero di periodi non cambi, ma che ragioni abbiamo per dire ciò? Possiamo giustificare in modo elementare quest'idea come segue.

Insieme al treno d'onde monocromatico, mandiamo anche una successione d'impulsi di durata molto breve, e intervallati di un periodo dell'onda monocromatica. Poiché gli impulsi sono discreti, non c'è dubbio che il loro numero all'arrivo sarà lo stesso che alla partenza; avremo quindi raggiunto il risultato che cerchiamo se dimostreremo che impulsi e treno d'onde si propagano allo stesso modo (viaggiano insieme). In entrambi i casi si tratta di onde elettromagnetiche; la sola differenza è che gli impulsi non saranno monocromatici, anzi dovranno avere una larga banda spettrale, visto che sono di durata molto breve. Dunque tutto dipende dal supporre che *la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto sia non dispersiva.*

Abbiamo diversi argomenti per questo:

– il fatto è vero in ogni RIL, e perciò dev'essere vero su scala globale

– l'asserzione è già implicita nell'aver usato geodetiche nulle ($d\tau = 0$) per la propagazione della luce, senza condizioni sulla frequenza.

Il riferimento accelerato

Per ora manca l'interpretazione fisica della (2–1): esiste una situazione reale con questa metrica? La risposta sta in un'opportuna trasformazione di coordinate:

$$x = \eta \cosh \xi, \qquad t = \eta \sinh \xi \tag{2–4}$$

$$\eta = \sqrt{x^2 - t^2}, \qquad \xi = \tfrac{1}{2} \ln \frac{x+t}{x-t}. \tag{2–5}$$

Si vede che questa trasformazione è possibile solo per $|x| > |t|$. Si trova poi, sostituendo nella (2–1):

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Siamo dunque nell'ordinario spazio-tempo della relatività ristretta. Ma allora gli effetti discussi sopra sono solo apparenti? Discuteremo ora un po' più a fondo la questione.

Cominciamo col chiederci: si poteva capire che lo spazio-tempo è piatto senza ricorrere a una trasformazione di coordinate *ad hoc*? Risposta: sì, ma occorrevano tecniche più avanzate (tensore di Riemann = 0). Nelle nuove coordinate la singolarità è scomparsa, dunque era un effetto della scelta delle coordinate; vedremo però fra poco che la separazione dei due semipiani $\eta > 0$ e $\eta < 0$ *ha significato fisico.*

Le (2–4), per η costante, possono essere viste come le equazioni parametriche del moto di un punto materiale. Avremo successivamente:

$$d\tau = \eta \, d\xi \quad \Rightarrow \quad \tau = \eta\xi$$

$$x = \eta \cosh \frac{\tau}{\eta} \qquad t = \eta \sinh \frac{\tau}{\eta}$$

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \sinh\frac{\tau}{\eta}, \quad u^t = \frac{dt}{d\tau} = \cosh\frac{\tau}{\eta} \qquad \Rightarrow \qquad u^\mu u_\mu = 1$$

$$a^x = \frac{du^x}{d\tau} = \frac{1}{\eta}\cosh\frac{\tau}{\eta}, \quad a^t = \frac{du^t}{d\tau} = \frac{1}{\eta}\sinh\frac{\tau}{\eta} \qquad \Rightarrow \qquad a^\mu a_\mu = -\frac{1}{\eta^2}.$$

Si vede inoltre che $a^\mu u_\mu = 0$. Ci si può arrivare in due modi:

a) dall'esame diretto delle componenti

b) derivando l'identità $u^\mu u_\mu = 1$.

Nel riferimento inerziale in cui il punto è momentaneamente in quiete (riferimento inerziale "tangente") il quadrivettore a^μ ha solo componenti spaziali, poiché è ortogonale a u^μ: nel nostro caso una sola componente è diversa da zero, e vale $1/\eta$. Abbiamo dunque a che fare con un moto ad accelerazione costante (*moto iperbolico*, fig. 2–2).

Se consideriamo due punti materiali, che si muovono con la stessa legge (2–4), ma diversi valori di η, si vede che

a) il riferimento tangente per uno lo è anche per l'altro, con lo stesso valore di ξ

b) la loro distanza, calcolata nel riferimento tangente, vale $\eta_2 - \eta_1$ ed è costante durante il moto.

Possiamo dunque pensare a un corpo rigido (per es. un'astronave), ciascun punto del quale si muove di moto iperbolico (con diverse η); e abbiamo tutte le ragioni per chiamare questo corpo un *riferimento rigido accelerato uniformemente.*

Dinamica del moto iperbolico

Verifichiamo in altro modo che il moto iperbolico è la forma relativistica del moto uniformemente accelerato. Consideriamo un punto materiale soggetto a forza costante nel riferimento del laboratorio (ad es. un elettrone in campo elettrico uniforme): dall'equazione del moto

$$F = \frac{dp}{dt}$$

segue subito $p = Ft$, $E = \sqrt{m^2 + F^2 t^2}$, e infine

$$v = \frac{p}{E} = \frac{Ft}{\sqrt{m^2 + F^2 t^2}} = \frac{t}{\sqrt{(m/F)^2 + t^2}}.$$

Dalla prima delle (2–5) si ottiene, per η costante,

$$x\,dx = t\,dt \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} = \frac{t}{\sqrt{\eta^2 + t^2}}$$

e si vede che i due moti coincidono se $\eta = m/F$.

D'altra parte la componente longitudinale della forza è invariante per trasformazioni di Lorentz; quindi anche nel riferimento tangente la forza risulta costante. Di conseguenza, un dinamometro ("accelerometro") montato nel riferimento accelerato mostrerà un allungamento costante, e quindi anche da questo punto di vista è vero che l'accelerazione è costante.

Riferimento rigido?

È importante convincersi che il riferimento accelerato è rigido, nel modo più diretto possibile: useremo a questo scopo una procedura operativa, consistente nella misura *radar*. Dalla coda dell'astronave ($\eta = \eta_1$) mandiamo un segnale radar verso la testa (evento A in fig. 2–3). Il segnale si riflette alla testa dell'astronave ($\eta = \eta_2$, evento B) e torna in C alla coda. Indicheremo con τ_{A}, τ_{B}, τ_{C} i tempi segnati da orologi a bordo dell'astronave in corrispondenza di tali eventi. Le coordinate x, t degli eventi saranno date da:

$$x_{\mathrm{A}} = \eta_1 \cosh \frac{\tau_{\mathrm{A}}}{\eta_1} \qquad x_{\mathrm{B}} = \eta_2 \cosh \frac{\tau_{\mathrm{B}}}{\eta_2} \qquad x_{\mathrm{C}} = \eta_1 \cosh \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{\eta_1}$$

$$t_{\mathrm{A}} = \eta_1 \sinh \frac{\tau_{\mathrm{A}}}{\eta_1} \qquad t_{\mathrm{B}} = \eta_2 \sinh \frac{\tau_{\mathrm{B}}}{\eta_2} \qquad t_{\mathrm{C}} = \eta_1 \sinh \frac{\tau_{\mathrm{C}}}{\eta_1}$$

mentre la propagazione del segnale impone le relazioni

$$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{A}}$$

$$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{C}} = t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{B}} + t_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{C}} + t_{\mathrm{C}}.$$

Da queste si ottengono

$$\eta_2\, e^{-\tau_{\mathrm{B}}/\eta_2} = \eta_1\, e^{-\tau_{\mathrm{A}}/\eta_1}$$

$$\eta_2\, e^{\tau_{\mathrm{B}}/\eta_2} = \eta_1\, e^{\tau_{\mathrm{C}}/\eta_1},$$

da cui

$$\eta_2^2 = \eta_1^2 \exp \frac{\tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}}}{\eta_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}} = 2\eta_1 \ln \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

e infine:

$$l_{12} = \tfrac{1}{2}(\tau_{\mathrm{C}} - \tau_{\mathrm{A}}) = \eta_1 \ln \frac{\eta_2}{\eta_1} \simeq \eta_2 - \eta_1,$$

dove l'ultima espressione vale se $\eta_2 - \eta_1 \ll \eta_1$.

Ci sono due punti da osservare:

– La distanza radar non è esattamente $\eta_2 - \eta_1$. Ciò dipende dal redshift gravitazionale: se la misura fosse condotta dalla testa verso la coda, darebbe risultato diverso (quale?); la misura corretta andrebbe fatta sommando tante misure su piccoli tratti, e leggendo il tempo di ciascuna sull'orologio locale.

– Comunque l_{12} non cambia nel tempo, il che ci assicura che l'astronave è rigida.

Può sembrare paradossale, visto che il riferimento è rigido, che l'accelerazione dei diversi punti non sia la stessa (è inversamente proporzionale a η); ma la cosa si capisce mettendosi nel riferimento tangente. A un dato istante l'astronave è ferma, ma accelerata; dopo un certo tempo, vista dallo stesso riferimento, essa avrà acquistato velocità e quindi apparirà contratta: dunque la testa dell'astronave deve avere un'accelerazione minore della coda. Lasciamo per esercizio la verifica quantitativa.

Orizzonte

Nel piano della fig. 2–3 la regione $\eta > 0$ corrisponde al quadrante di destra ($x > |t|$), e la regione $\eta < 0$ al quadrante di sinistra ($x < -|t|$). I due quadranti sono *causalmente disgiunti*, nel senso che nessun punto dell'uno può trasmettere segnali a nessun punto dell'altro (e quindi neppure riceverne). Per un riferimento accelerato esiste dunque un *orizzonte*. Si noti però che gli altri due quadranti non sono affatto rappresentati nelle coordinate ξ, η, e ci sono anche altri aspetti paradossali, legati solo alla scelta delle coordinate.

Accanto all'astronave accelerata, prendiamone un'altra, che sia ferma a una x positiva, e quindi rappresentata da una retta verticale in fig. 2–4. Essa attraversa la retta di equazione $x = t$ (evento A), senza che a bordo accada niente di notevole; ma dopo di quell'istante i segnali radio che emette non raggiungono più l'astronave accelerata: è caduta "al di là dell'orizzonte." E si noti che questa "caduta" accade in un tempo proprio finito. Invece tutto il fenomeno, misurato col tempo proprio dell'astronave accelerata, ha una durata infinita, come vedremo fra poco.

Fin qui abbiamo parlato di fatti fisici reali; ma se tentiamo di descriverli nelle coordinate ξ, η ci troviamo in difficoltà. L'astronave accelerata è rappresentata da una retta verticale (η = cost.), mentre l'astronave ferma (nel riferimento inerziale, non dimentichiamolo) ha una linea oraria che s'incurva a sinistra, ma non passa mai al di là dell'asse ξ (fig. 2–5). Non occorre fare conti per capirlo: la curva dovrà restare sempre all'interno del cono luce di ogni suo punto, e già sappiamo che le geodetiche della luce non attraversano l'asse ξ. Dunque in queste coordinate l'evento A *non è rappresentabile*, e si potrebbe credere che non avvenga mai. Dalla figura si vede anche che l'astronave accelerata continua sempre a ricevere segnali: dal suo punto di vista la caduta oltre l'orizzonte dura un tempo infinito.

Vedremo più oltre nel corso che questa situazione ha uno stretto analogo nella fisica del collasso gravitazionale (buchi neri).

Il redshift gravitazionale

Cominciamo col chiederci: se il redshift è un effetto fisico del riferimento accelerato, lo si può dedurre con la sola relatività ristretta nelle consuete coordinate t, x ? La risposta è affermativa: la radiazione che viene emessa (evento A_1 in fig. 2–6) da una sorgente momentaneamente in quiete, ma solidale all'astronave accelerata, viene ricevuta (evento A_2) quando l'astronave ha acquistato velocità, per cui il ricevitore si allontana: allora la frequenza ricevuta riesce necessariamente minore di quella emessa. Si può anche fare il calcolo diretto dei tempi propri alla partenza (eventi A_1, B_1) e all'arrivo (eventi A_2, B_2) dei due segnali. *Problema*: Studiare i dettagli del ragionamento, e ritrovare l'espressione (2–3) del redshift.

Dal principio di equivalenza segue che il redshift si deve vedere anche in un campo gravitazionale. Partiamo dalla (2–3): poiché nel moto iperbolico l'accelerazione è $1/\eta$, dovremo sostituirvi g, mentre al posto di $\Delta\eta$ scriveremo h. Occorre infine un fattore $1/c^2$per tornare alla unità consuete, e si trova:

$$\nu_2 = \nu_1\,(1 - gh/c^2). \tag{2–6}$$

A conti fatti nel campo della Terra si ha un effetto di 10^{-16} per metro di dislivello.

La (2–6) è stata scritta da Einstein nel 1911; i primi esperimenti (Pound–Rebka–Snider) risalgono al 1960 e anni seguenti, e rivelarono direttamente il redshift in un dislivello di 25 m, usando una sorgente γ e un rivelatore a effetto Mössbauer. In seguito Briatore–Leschiutta (1975) e altri hanno compiuto esperimenti strettamente aderenti allo schema che ci ha portato alla (2–2), confrontando orologi atomici su dislivelli di migliaia di metri (montagne o aerei). Effetti maggiori per molti ordini di grandezza si possono avere con sorgenti astronomiche.

Concludiamo osservando che la formula (2–6) del redshift presenta aspetti a prima vista paradossali:

– se si fa propagare la luce in senso opposto (il che equivale a cambiare il segno di h) non si ottiene il rapporto inverso per le frequenze

– se si raddoppia h la variazione di frequenza raddoppia, il che non è compatibile con un esperimento "in due tempi," fatto su due tratti lunghi h, che darebbero un risultato diverso.

Entrambi gli effetti descritti sono dovuti a una sola causa: la (2–6) *è approssimata*, e vale solo per $gh/c^2 \ll 1$. Si pone quindi la questione di quale sia la formula esatta, valida per distanze qualsiasi. Lasciamo la ricerca della soluzione come esercizio.