La fig. 5 descrive il classico esperimento ideale (treno e stazione) che mostra la relatività del sincronismo fra eventi e ha lo scopo di mostrare come si ragiona su un diagramma spazio-tempo *senza far uso di coordinate.* Per questo motivo la figura è tracciata senza assi cartesiani: ci sono soltanto, nell'angolo in alto a sinistra, le direzioni delle linee orarie di segnali luminosi (linee orarie di tipo luce).

Ogni direzione compresa fra quelle due è una direzione di *tipo tempo*, mentre una esterna è di *tipo spazio.* In particolare due rette simmetriche rispetto a una delle due linee di tipo luce sono *ortogonali* nel senso della metrica di Minkowski: esiste un riferimento in cui la retta di tipo tempo contiene eventi che avvengono nello stesso punto spaziale del rif., mentre quella di tipo spazio contiene eventi simultanei in quel rif.

Nella figura, le tre rette parallele A, B, C sono le linee orarie delle estremità e del punto medio del treno. Il segmento EF (che è simmetrico di A, B, C nel senso detto sopra) unisce due eventi E, F simultanei nel rif. $\mathcal{T}$ del treno. Questi eventi sono le emissioni di due segnali luminosi, che si propagano nei due versi spaziali: sono le linee tratteggiate.

Le linee orarie EGH e FKG s'incontrano in G: dico che G sta sulla linea oraria del punto medio C del treno. Come si dimostra questo? Immaginiamo che nella figura manchi la retta C. Vogliamo dimostrare che la retta che unisce G al punto medio O di EF è parallela alle rette A, B.

Dim.: EFG è un triangolo rettangolo per costruzione; O è il centro della circonferenza che passa per E, G, F e di cui EF è un diametro. Ne segue che EO, GO sono uguali e il triangolo EGO è isoscele. Dunque gli angoli in E e in G sono uguali. Ma per costruzione (simmetria) l'angolo in E è uguale a quello acuto che EG forma con la retta A; dunque le due rette A e GO formano con EG angoli alterni interni uguali, e sono parallele, il che significa che GO coincide con C, c.v.d.

Cosa abbiamo dimostrato? Che i due segnali luminosi emessi agli eventi E, F arrivano simultaneamente nel punto medio C del treno, e questa è la definizione di *eventi simultanei.*

Consideriamo ora il rif. $\mathcal{S}$ della stazione. A′, B′, C′ sono le linee orarie di tre punti fermi in questo rif., che agli eventi E, F, O si trovano a coincidere con A, B, C. Si noti che anche C′ è punto medio (nel senso dello spazio fisico, non della figura, che è un diagramma spazio-tempo) tra A′, B′, perché su qualunque trasversale le tre rette A′, B′, C′ staccheranno segmenti uguali.

Nel rif. $\mathcal{S}$ i segnali luminosi emessi in E, F raggiungono C′ agli eventi H, K, con H che *segue* K: dunque in $\mathcal{S}$ i due eventi E, F *non sono simultanei*, ma E *segue* F.

Nota importante sui ragionamenti e sulla dimostrazione.

Lo spazio-tempo ha la metrica di Minkowski, quindi in esso non ha senso *in generale* confrontare le lunghezze di segmenti: il confronto è consentito solo tra segmenti *paralleli*. Analogamente non ha senso in generale il confronto di angoli. Allora la dimostrazione data non sta in piedi? Questo è un punto delicato, da esaminare bene.

In realtà la figura non è priva di metrica (non è un puro spazio affine) perché esiste appunto la metrica di Minkowski. Come ho già detto, vettori ortogonali nel senso di Minkowski sono simmetrici rispetto alle linee orarie di tipo luce.

La geometria di Minkowski e quella euclidea hanno in comune tutte le proprietà *affini*, come il parallelismo di due rette, il punto medio di un segmento, ecc. Niente impedisce di studiare una figura con la geometria euclidea: se riusciamo a ricavarne proprietà che hanno significato per la geometria di Minkowski, questo risultato è perfettamente valido. La dimostrazione che ho data è euclidea, ma conclude con una proprietà minkowskiana: il punto G sta sulla parallela C alle rette A, B, passante per il punto medio O di EF.