La candela

Questa puntata è dedicata agli strumenti musicali. O meglio: sarà una passeggiata in questo vastissimo argomento, di cui cercherò di dare qualche idea generale, soprattutto dal punto di vista della fisica. Non ho la minima idea di quanti diversi strumenti siano stati inventati nel mondo, né di quanti siano effettivamente in uso. Dovrò forzatamente limitarmi ad alcuni tipi base: quelli più comuni nella nostra musica, e tra questi, ai più semplici da trattare.

Di sicuro molti strumenti hanno un'origine "naturale"; con ciò intendo che possono presentarsi, almeno in una forma "grezza," come oggetti che possono essere capitati sotto gli occhi e le mani di un esploratore curioso, anche molte migliaia di anni fa. Fondamentalmente gli strumenti che ho definito naturali possono essere raggruppati in due classi: quelli *a corda* e quelli *a fiato*. Di fatto anche la gran parte degli strumenti moderni, evoluti, rientrano nelle stesse due classi.

Ci sarebbero, ancora più naturali e più antichi, gli strumenti *a percussione*; ma non penso di parlarne per una ragione che spiegherò più avanti. Così pure non parlerò dello strumento più naturale di tutti: la *voce umana*. Questo per più ragioni: prima di tutto, perché del suo funzionamento so troppo poco, e quel poco che ne so sarebbe difficile da esporre in queste pagine. Poi si può chiamarlo strumento solo in senso lato; la flessibilità e varietà della voce la rende poco afferrabile, tanto per una classificazione e descrizione, quanto per un'analisi scientifica.

Il precursore degli strumenti a fiato può essere stato una canna, un osso cavo, o qualsiasi altro oggetto, di forma varia, che presentasse una cavità con una o più aperture, e dal quale si potesse ottenere un suono soffiandoci dentro. Per ragioni che vedremo, la forma tubolare, cilindrica o conica, è stata privilegiata.

Gli strumenti a corda sono meno naturali, nel senso che sembra più difficile trovare "in natura" delle corde tese capaci di vibrare. È invece probabile che l'invenzione dei primi strumenti a corda sia da collegare a quella dell'*arco* inteso come arma, per la caccia e per la guerra. Dal punto di vista della fisica gli strumenti a corda sono più semplici, e quindi cominceremo da quelli.

Ma prima di entrare *in medias res*, debbo fornire, a chi non ci fosse arrivato, la soluzione dell'indovinello che avevo proposto nella precedente puntata dedicata alla musica. Si tratta del Concerto per piano e orchestra n. 23 in La maggiore (K 488) di Mozart. Più precisamente, come avevo già detto, delle prime battute del secondo movimento.

* * *

Dal punto di vista di un fisico il prototipo degli strumenti a corda è il *monocordo*: un filo o corda, di materiale vario, teso tra due sostegni rigidi. È ben noto che la corda, se eccitata in un modo qualsiasi (tipicamente *pizzicandola*, ossia afferrandola in un punto per scostarla dalla posizione di equilibrio e poi lasciarla libera) si mette a *vibrare*, emettendo un suono, più o meno puro e più o meno persistente nel tempo.

L'esperienza mostra che il suono emesso varia al variare dei diversi parametri costruttivi dello strumento: della *lunghezza* della corda, della sua *tensione*, del *materiale* di cui è costituita. Volutamente ho usato un'espressione vaga: "il suono varia"; ma tutti sanno che cosa intendevo: varia l'*altezza* del suono, cioè quella che nella terminologia musicale diventerà la *nota* emessa.

Il primo fondamentale risultato sulla dipendenza dai vari parametri è attribuito a Pitagora e alla sua scuola (∼500 a.C.) anche se mi pare che manchino fonti sicure. Si tratta della dipendenza della nota emessa dalla lunghezza della corda; la dipendenza dagli altri parametri (tensione, materiale) è assai più difficile da studiare e avrebbe dovuto aspettare parecchi secoli, fino all'800.

Credo però che a questo punto sia meglio per me abbandonare un'esposizione storica, che non saprei condurre in modo neppure vagamente fedele. In buona parte per mia ignoranza, ma anche perché la storia è complessa e poco documentata. Infatti vi s'intrecciano due aspetti molto diversi: da un lato la storia della musica antica; dall'altro la fisica dei fenomeni vibratori e ondulatori, che si è venuta costruendo in modo faticoso, per tentativi e ipotesi, fino a prendere una forma almeno ben definita, anche se tutt'altro che definitiva, solo alla fine del '700. E non basta, perché tra le due bisogna anche mettere la fisiologia dell'udito, che come vedremo ha una parte importante e per certi versi ancora non del tutto chiarita. Forse pretendo troppo se richiamo chi mi legge a ciò che scrissi parecchi anni fa a proposito del colore [1]:

Il passo successivo mi sembra il seguente: riconoscere che ciò che noi chiamiano "colore" è il risultato di un gioco assai complesso, nel quale entrano di regola quattro giocatori: la sorgente di luce; un corpo illuminato che diffonde, riflette o trasmette la luce; il nostro personale rivelatore (la retina coi suoi coni); infine un elaboratore (il cervello).

Qualcosa di simile si potrebbe dire per la nostra percezione della musica; per un verso è più semplice, perché dal punto di vista fisico il suono è fenomeno più semplice della luce, e parallelamente è più semplice il funzionamento dell'organo di senso. Inoltre in questo caso i giocatori, semplificando un po', si possono ridurre a tre. Ma è il ruolo del quarto giocatore (il cervello) che non è meno semplice e credo sia meno compreso del corrispondente visivo. Di certo sono io a saperne molto meno, ad avere molte domande di cui non so la risposta. . .

* * *

Restringiamoci dunque (quasi del tutto) alla fisica delle corde vibranti, e vediamo che cosa si può dire in modo semplice e senza dare nessuna giustificazione teorica.

Cominciamo con qualcosa di più generale, che riguarda il modo come possiamo sentire un suono. Non intendo qui entrare nel funzionamento del nostro organo di senso, ossia nell'anatomia e fisiologia dell'orecchio: voglio parlare solo della fisica del suono. Penso sia ben noto che i suoni dal punto di vista fisico sono *vibrazioni del mezzo* ambiente (solitamente l'aria); più esattamente, queste vibrazioni sono variazioni (periodiche se si tratta di un suono) della *densità* e della *pressione* del mezzo. Le variazioni di pressione e quelle di densità sono collegate tramite la *legge di compressione elastica* del mezzo in questione, per cui nota l'una è nota anche l'altra; è abituale riferirsi alla pressione.

Le variazioni di pressione che un orecchio normale percepisce come suono sono incredibilmente piccole: nelle condizioni più favorevoli stanno sotto a un miliardesimo (10^{-9}) della pressione atmosferica. Le vibrazioni nel mezzo si *propagano* con una velocità finita, che nell'aria in condizioni medie vale $\sim$340 m/s, ma aumenta con la temperatura (cosa che ha un certo peso per gli strumenti a fiato, perché influisce sulle note emesse).

Per quanto ovvio, è utile sottolineare che uno strumento (per ora la nostra corda vibrante) emette un suono in quanto le sue vibrazioni si trasmettono all'aria circostante. Tutti gli strumenti hanno delle parti destinate a rendere quanto più efficiente possibile tale trasmissione.

È possibile riconoscere quando due strumenti, anche molto diversi, producono *la stessa* nota, ossia suonano all'*unisono*. A parte altre caratteristiche, che permettono di distinguere uno strumento dall'altro (il cosiddetto *timbro*) e di cui parleremo in seguito, stessa nota significa *uguale frequenza*. Quindi il nostro problema (come dipende la nota emessa dalle caratteristiche fisiche del monocordo?) si trasforma nell'altro: come dipende la frequenza della corda vibrante dai parametri fisici di questa? In particolare, come dipende dalla sua lunghezza?

Qui la risposta è assai semplice (ed è per questo che gli strumenti a corda sono più semplici da studiare): la frequenza è *inversamente proporzionale* alla lunghezza. Qualitativamente, corda più breve significa frequenza maggiore, ossia suono più acuto: ciò si riflette nella scala dimensionale degli strumenti di una stessa famiglia, come ad es. contrabbasso, violoncello, viola, violino.

Va però detto che non è questa la scoperta di Pitagora: non poteva esserlo, dato che a quei tempi non c'era alcun modo di misurare le frequenze di vibrazione. Ci si sarebbe arrivati solo nell'800. In che cosa consisteva dunque la scoperta? Nella connessione tra le diverse lunghezze delle corde e gli *intervalli* tra le note da esse emesse. Ricorderete che la parola "intervallo" è già apparsa nella puntata precedente, e avevo detto allora che ci sarei tornato in seguito per darne una spiegazione; ora è il momento di cominciare a spiegare.

Gli strumenti musicali esistevano ben prima di Pitagora, ed era stato scoperto empiricamente che certe combinazioni di note riescono più gradevoli all'ascolto. Debbo aprire una parentesi cautelativa, perché il termine "gradevoli" è tutt'altro che ovvio e oggettivo: nel campo musicale è continuamente cambiato nel tempo. Tuttavia qualcosa di abbastanza invariante esiste, e per ora non andremo oltre questo.

* * *

Chiusa la parentesi. Era dunque noto per es. che certe coppie di note si accordano così bene che per certi versi sembrano la stessa nota: mi riferisco a quel particolare intervallo che avrebbe a un certo punto preso il nome di *ottava.* Perché ottava? Semplice: perché almeno nelle scale in uso nella musica occidentale, che sono formate — come abbiamo visto — da *sette* note, l'ottava nota è quella che in certo senso *termina* la scala. Che possa essere vista come la stessa nota, è mostrato per es. dal fatto che se due voci, una maschile e l'altra femminile, cantano insieme, viene spontaneo per quella femminile portarsi sull'*ottava alta* rispetto a quella maschile. O viceversa: una voce maschile che ne accompagni una femminile, si porterà sulla sua *ottava bassa.*

Tornando a Pitagora: due corde suonano un intervallo di un'ottava quando una ha lunghezza *metà* dell'altra. Ma c'è di più: anche i rapporti di lunghezze 1:3, 1:4, 1:5 corrispondono a intervalli *consonanti* (ho così introdotto il termine "ufficiale" della terminologia musicale). Il più ovvio è 1:4, che corrisponde a *due* ottave. Infatti dimezzando la corda si sale di un'ottava, e dimezzandola ancora si sale di un'altra: totale due ottave, come detto.

Ma qui è indispensabile una piccola parentesi matematica: non so se l'avete notato, ma dicendo "un'ottava più un'ottava uguale due ottave" ho dato un esempio di una pratica corrente quando si parla d'intervalli musicali: gli intervalli sono *additivi.* Però parlando delle corde ho parlato di rapporti, e il rapporto 1:4 è il *prodotto* di due rapporti 1:2. Dunque *i rapporti si moltiplicano*, mentre *gli intervalli si sommano*!

In teoria tutti coloro che mi leggono dovrebbero aver già capito dove voglio andare a parare; ma in realtà non credo che sia così, perché l'esperienza mi ha insegnato a essere assai pessimista quanto a ciò che resta degli studi scolastici, e in particolare della matematica. Perciò lo dico esplicitamente: la relazione tra lunghezze delle corde e intervalli è *logaritmica.* E siccome ho già detto che le frequenze emesse sono inversamente proporzionali alle lunghezze, anche la relazione tra frequenze e intervalli è logaritmica. Non posso ora spiegare meglio questo "misterioso" logaritmo; ma vedremo poi di prenderci pratica sulla base di esempi, che non mancheranno.

Ma che dire degli altri rapporti che ho chiamato "consonanti"? Per cominciare, 1:3 a che intervallo corrisponde? Basta vederlo come prodotto di 1:2 e di 2:3. Il primo lo conosciamo già: è l'ottava. E il secondo? Basta provare: se una corda suona poniamo un Do, una corda di lunghezza 2/3 suona il

Sol immediatamente superiore. E l'intervallo Do-Sol prende il nome di *quinta.* Perché quinta? La risposta è che bisogna contare sia la prima sia l'ultima nota della scala che ci porta da Do a Sol: Do, Re, Mi, Fa, Sol sono appunto cinque. (Allo stesso modo, andando da Do a Do si contano otto note, quindi ottava.) Perciò se la corda più lunga suona un Do_3, quella che è lunga un terzo suonerà un Sol_4.

Lo stesso ragionamento si fa per il rapporto 1:5. Lo si pensa come prodotto di 1:4 e di 4:5; il primo, come già sappiamo, corrisponde a due ottave; quanto al secondo basta provare, e si scopre che è una *terza* (Do-Mi). Quindi il rapporto 1:5 ci porta dal Do_3 al Mi_5. Il rapporto 1:6 è facile, essendo il prodotto di 1:2 e 1:3, o anche di 1:4 e 2:3, ossia due ottave più una quinta: da Do_3 a Sol_5.

Se ora vi aspettate il rapporto 1:7, sarete delusi. Non perché ritenga opportuno non continuare con gli esempi, ma perché questo rapporto non l'ha mai considerato nessuno (credo). La ragione? Perché non dà luogo a un intervallo consonante, ma *dissonante.* Perché sarebbe dissonante? Potrei rispondere che basta ascoltarlo, ma non sarebbe una risposta corretta, per una ragione che ho già accennato: il giudizio sulla maggiore o minore consonanza di intervalli (e ancor più di accordi) non è rimasto fisso nel tempo. Oggi accettiamo accordi che tre secoli fa sarebbero stati respinti con disgusto... Sta di fatto però che il rapporto 1:7 (o se preferite, quello 4:7 che resterebbe dentro l'ottava) non si trova in nessuna delle varie scale che sono state usate o proposte.

La questione del perché certi intervalli vengano sentiti come consonanti e altri come dissonanti, o se preferite certi appaiano meno consonanti di altri, riguarda almeno in parte l'acustica fisiologica, ed è stata estesamente studiata. Non saprei dire se ne sia stata data una soluzione soddisfacente, ma comunque non vorrei addentrarmici.

Andare oltre sarebbe inutile per un'altra ragione. Il rapporto 1:8 è banalmente 3 ottave; quello 1:9 si riporta alla somma di due ottave e due quinte (da Do_3 ci porta a Re_6); 1:10 fa tre ottave più una terza (da Do_3 a Mi_6). Quanto a 1:11, è di nuovo dissonante ... e qui mi fermo davvero.

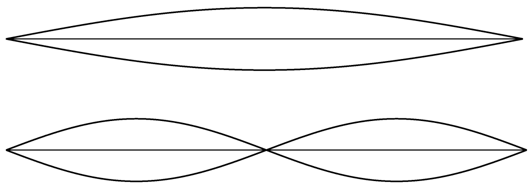
A questo punto il discorso deve diramarsi: c'è la strada che c'introduce alle diverse *scale*, e un'altra che invece porta a introdurre il concetto di *armoniche.* La prima è puramente musicale (con dentro un po' di matematica); la seconda è più fisica. Ho solo l'imbarazzo della scelta, e tutto sommato opto per la seconda, rinviando l'esplorazione della prima a una prossima puntata.

* * *

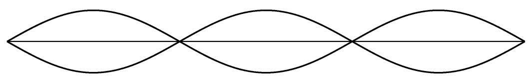
Dunque le armoniche (oppure "gli armonici," come si usa dire in ambito musicale, forse con una diversa sfumatura di significato su cui non posso soffermarmi). Di che si tratta?

Restiamo alla fisica. Prendiamo per es. un corpo solido elastico, che potrebbe essere la nostra corda tesa, o una campana, o altro. Ho detto sopra che la corda tesa se eccitata (per es. pizzicandola) si mette a vibrare ed emette un suono; poi ho parlato di *nota* e di *frequenza* di quel suono. Tutto questo era volutamente semplificato e approssimato, in più modi: non a caso mi ero cautelato, scrivendo anche "più o meno puro e più o meno persistente nel tempo"; per ora conviene fermarsi a questa semplificazione e approssimazione, che riprenderemo in esame in un prossimo futuro. La cosa che voglio ora approfondire è un'altra: ho detto che la corda vibra ed emette un suono di una determinata frequenza. Ma è proprio vero?

C'è un modo semplice per scoprire che il mondo delle vibrazioni di una corda è ben più ricco. Prima di pizzicare la nostra corda, appoggiamo dolcemente un dito nel suo centro: scopriremo che ora la corda suona all'ottava superiore, ossia vibra con frequenza doppia, come se ne avessimo dimezzato la lunghezza. E questa vibrazione persiste anche se togliamo il dito dal punto medio (un gioco ben noto per es. a chitarristi e violinisti).



Che cosa sta succedendo? Osserviamo le figure qui accanto: nella prima ho disegnato la vibrazione della corda libera, nella seconda quella della corda "fermata" nel centro. Si vede bene che le due mezze corde vibrano insieme, ma *con fasi opposte*: quando una metà sale, l'altra scende; e la frequenza è la stessa che produrrebbe una corda di lunghezza metà. Abbiamo dunque scoperto un nuovo modo di *vibrazione spontanea* di una corda.



Si può andare oltre, anche se diventa progressivamente più difficile: se mettiamo il dito a 1/3 della lunghezza, la corda vibra con frequenza tripla (v. figura) e così via per 1/4, 1/5 ... Sono queste le *armoniche*: la frequenza più bassa è detta *fondamentale* o *prima armonica*, segue la *seconda* armonica, la *terza*, ecc.

L'esperienza mostra che lo stesso accade per qualunque solido elastico: *non c'è una sola frequenza* e modo di vibrazione, ma tutta una successione, teoricamente infinita: quelli che si chiamano i *modi propri* di vibrazione, ciascuno con la propria frequenza caratteristica. Ma attenzione: non è vero in generale che le frequenze proprie vadano come gli interi $1, 2, \ldots n, \ldots$; è vero solo per le corde, ed è il motivo per cui le vibrazioni delle corde sono semplici da studiare. Ed è anche il motivo perché producono suoni gradevoli; ma questo è più complicato da capire, e dovremo ragionarci un po' su.

Se invece di una corda tesa prendiamo una piastra metallica (un piatto di batteria, un gong ...) possiamo con opportune tecniche mettere in evidenza che anche questi corpi hanno un insieme di modi propri di vibrazione; ma le loro frequenze *non stanno in rapporti semplici.* Ecco perché non producono suoni altrettanto gradevoli. Fanno storia a sé le campane, che pur essendo di forme complicate (sia per il profilo generale, sia per lo spessore variabile del metallo) sono fatte in modo che almeno le frequenze proprie più basse siano in rapporti consonanti.

Ma è proprio vero che le armoniche di una corda stanno nei rapporti semplici che ho detto? Sì e no: sì in un mondo ideale, dove della corda si dà una certa schematizzazione che spiego tra un momento; no (oppure sì solo come approssimazione) nel mondo reale, dove le corde sono quelle che sono... La schematizzazione è questa: la corda deve essere perfettamente *flessibile*, ossia non deve occorrere alcuna forza per cambiarne la forma, per incurvarla come si vede nelle figure. Si richiede inoltre che l'ampiezza della vibrazione sia *piccola*, in modo che si possa trascurare l'allungamento della corda, che porterebbe a un aumento della sua tensione. Solo se queste condizioni sono soddisfatte, si può dimostrare che le frequenze delle armoniche stanno nei rapporti degli interi.

È ovvio che le corde reali saranno tanto più vicine alla corda ideale, quanto più sono sottili; meno ovvio che il confronto va fatto tra lo spessore della corda e la sua lunghezza, o meglio la lunghezza che intercorre tra due *nodi* della vibrazione. I nodi sono i punti in cui la corda rimane ferma: nel modo fondamentale sono solo gli estremi della corda, ma negli altri modi sono in maggior numero e più vicini tra loro. Ne segue che l'approssimazione della corda ideale sarà rispettata meglio per la fondamentale e le armoniche più basse, peggio per quelle più alte; meglio per corde lunghe, peggio per corde corte. Ecco perché è difficile ottenere buone note alte da un pianoforte, a meno che anche le corde dei tasti estremi a destra non siano abbastanza lunghe: cosa che si realizza meglio in un grande pianoforte da concerto che in un piccolo piano verticale. Una delle varie ragioni per cui il primo è superiore al secondo.

Visto che ho toccato il tema del pianoforte, vediamone un altro aspetto. Tra la nota più bassa e la più alta della tastiera di un pianoforte c'è un rapporto di frequenze di oltre 1:150. Se le corde delle note più alte sono lunghe circa 10 cm, per avere quel rapporto mantenendo lo stesso materiale, lo stesso spessore delle corde e la stessa tensione, le note più basse dovrebbero avere corde lunghe oltre 15 metri! Né è possibile accorciare troppo le corde alte, perché di nuovo se ne peggiorerebbe il suono. D'altra parte, anche i più grandi pianoforti da concerto non superano i 3 metri: come si spiega?

Non si può ridurre la tensione, perché questo nuocerebbe al suono per altri aspetti; si può aumentare un po' lo spessore, ma non troppo, per la ragione detta sopra. La soluzione è che le corde delle note più basse vengono "caricate": anziché essere fatte di una singola corda d'acciaio, consistono di una corda con avvolto intorno a elica un filo di rame che le appesantisce, abbassandone la frequenza di vibrazione. Ancor più questo si rende necessario in un pianoforte verticale, che ha corde molto più corte.

Mi sono voluto soffermare un po' su questo problema costruttivo, per mostrare su un esempio relativamente facile come la realizzazione di uno strumento musicale di qualità sia faccenda tutt'altro che semplice, che ha richiesto l'ingegno e l'esperienza di generazioni di costruttori, e oggi il lavoro di fisici e ingegneri. E in un buon pianoforte, per restare sull'esempio, c'è ben altro che quel poco che ho potuto dire...

* * *

Parlando dei diversi modi di vibrazione e delle armoniche, ho trascurato un punto assai importante, e ora debbo colmare la lacuna. Se pizzichiamo la solita corda, non dobbiamo aspettarci che si metta a vibrare come mostra la prima delle figure: di fatto quel modo di vibrazione *preso da solo* è praticamente irrealizzabile. Qualunque tipo di eccitazione si adotti, la corda effettuerà una vibrazione complessa, che consiste di una *sovrapposizione* dei diversi modi. La parola magica che ho scritto in corsivo non è nuova nei nostri discorsi: l'abbiamo incontrata nella puntata n. 22, ben 15 anni fa [2].

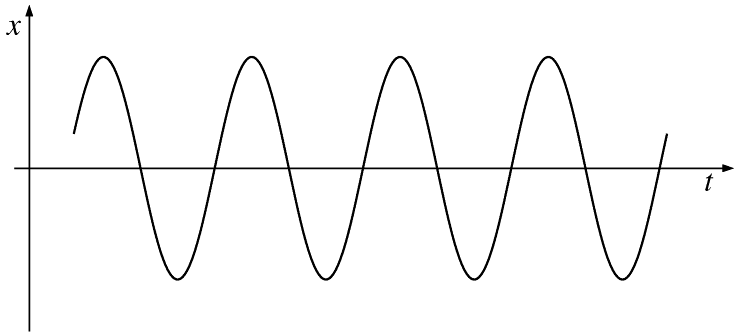
Il nocciolo del discorso era questo: se il sistema fisico (la corda vibrante) si comporta in modo *lineare*, allora un suo moto complesso si può ottenere come sovrapposizione di moti semplici, che nel nostro caso sono le armoniche. Ne riparlerò più avanti; per ora rispondo solo all'ovvia domanda: chi ci assicura che la corda vibrante sia un sistema lineare? Risposta: ce lo assicura l'ipotesi che abbiamo fatta, che l'ampiezza delle vibrazioni sia piccola.

Quello che ho detto sopra sulla corda che non vibra mai solo nel modo fondamentale, nel linguaggio acustico/musicale si esprime in altro modo: nessuna corda (in realtà nessuno strumento) produce mai un *suono puro*. Che cosa s'intende dicendo questo?

Ho già osservato che i suoni emessi da corpi vibranti danno impressioni diverse, anche quando vengono rappresentati con la stessa nota: del resto è per questo (ma non solo per questo: vedremo) che è possibile riconoscere uno strumento dall'altro. La stessa nota suonata da un flauto, da un violino, da una chitarra, all'orecchio appaiono ben diverse; forse è anche sensazione comune che tra questi strumenti quello che più si avvicina al suono puro è il flauto; e ancor meglio il *diapason*, che non è propriamente uno strumento ma è sempre un corpo solido che vibra.

Tra le tantissime cose che non so sulla storia della musica e su quella della fisica del suono c'è questa: non so dire quando si è capito quale fosse la *sostanza fisica* del suono puro. Mi viene in mente un nome, quello di Hermann von Helmholtz: fisico e medico vissuto a metà dell'800, che sicuramente fu uno dei maggiori studiosi del suono, dal punto di vista fisiologico come da quello fisico, teorico e sperimentale. A dire il vero Helmholtz, sebbene meno conosciuto di altri fuori dell'ambito specialistico, fu uno dei massimi scienziati del suo secolo; diede contributi importanti in diversi campi della fisica (e non solo), tanto che non poche leggi, fenomeni, equazioni, portano ancora il suo nome. Tuttavia non saprei dire se sia stato il primo a capire che cos'è un suono puro.

Lasciamo quindi da parte la storia, e andiamo al dunque. Un suono puro è una vibrazione (del corpo vibrante, quindi dell'aria) il cui andamento nel tempo è *sinusoidale*, come mostra la figura qui accanto. (Sono rappresentati 4 periodi; in ascissa c'è il tempo, in ordinata una grandezza x che può essere per es. lo scostamento della pressione dell'aria dal suo valore medio.) Si caratterizza quindi con tre parametri: *frequenza*, *ampiezza*, *fase*. La frequenza è in diretta corrispondenza con la *nota*, più genericamente *altezza* del suono; l'ampiezza è legata all'*intensità* (attenzione: legata, non uguale); la fase possiamo dire che non ha importanza, perché l'orecchio non è attrezzato per riconoscerla.



* * *

Una breve parentesi didattico/epistemologica. Questa parte del mio ragionamento sugli strumenti mostra una caratteristica comune all'indagine scientifica in qualunque campo, e anche nell'insegnamento. Mi riferisco a questo: qualunque campo di fenomeni naturali (il suono non fa certo eccezione) è assai complesso, presenta un'immensa varietà e diversi aspetti, che nel fenomeno così come si presenta alla prima osservazione appaiono fusi insieme. Anzi, da un punto di vista più filosofico si potrebbe anche sostenere che il solo fatto di parlare di "aspetti" di un fenomeno costituisce già un primo passo di *interpretazione*, di lettura della realtà, che in sé e per sé è unitaria e non è composta di parti, di forme distinte, di livelli … insomma di tutto l'armamentario concettuale e terminologico col quale siamo soliti descriverla e rappresentarla.

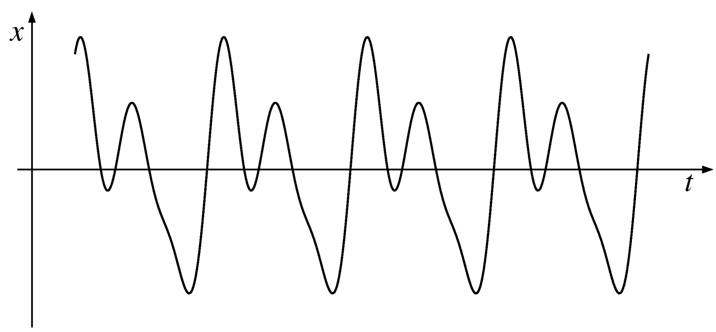
Ma fatta questa riserva, va anche detto che la classificazione, la distinzione, l'analisi, sono passi essenziali per la nostra comprensione del mondo. E non solo: altrettanto esssenziale è un lavoro di *semplificazione*, di *schematizzazione*; di ricerca di *elementi costitutivi* più semplici da studiare. Sappiamo tutti che questo atteggiamento è particolarmente insito nel *modus operandi* del fisico, e spesso viene criticato perché così facendo si rischia di perdere di vista quel carattere unitario (*olistico*, per usare il termine caro ai critici) della realtà, che dicevo sopra. Ho già trattato il tema in altre puntate (26, 41, 42, cominciando da 14 anni fa) e qui non intendo dire di più: volevo solo richiamare l'attenzione su questo gioco ineludibile, tra un campo fenomenico complesso e i passi di analisi e semplificazione necessari per penetrarlo e comprenderlo, nonché per esporre i fatti e la nostra comprensione.

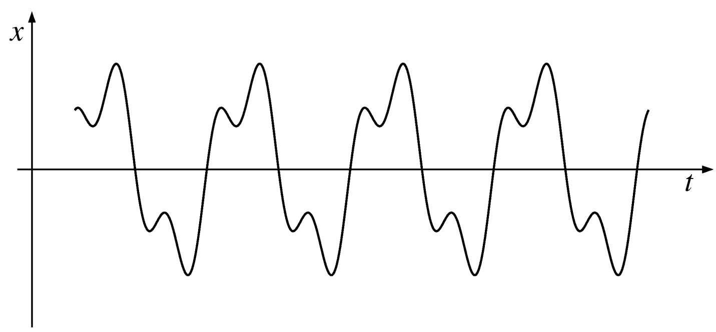
* * *

Ciò detto, vediamo come questo gioco di semplificazione e schematizzazione sta entrando nel nostro discorso. In primo luogo ho parlato di *suono*, e non mi sono curato di darne una definizione, contando su conoscenze comuni. È tradizionale distinguere tra suono e *rumore*, ma poi bisognerebbe subito chiarire che la distinzione può non essere netta e facile: che cosa produce una batteria? suoni o rumori? Poi ho introdotto il "suono puro," e ho asserito che dal punto di vista fisico suono puro significa vibrazione con legge sinusoidale. Ma nel frattempo avevo rimarcato che i suoni emessi dagli strumenti musicali non sono puri, anche se alcuni ci si avvicinano più di altri. Avevo fatto notare che spesso i suoni degli strumenti sono smorzati, anche se non è sempre vero: è smorzato un pianoforte o una chitarra, ma non un violino o una tromba. . .

Tutto bene, all'ingrosso; ma c'è qualcosa che manca, e che ormai non posso più ignorare. Stabilito che i suoni reali emessi dagli strumenti non sono puri, e messo da parte lo smorzamento, che non c'è sempre, che cosa distingue uno strumento da un altro? Come riconosciamo strumenti anche simili, per es. un clarinetto e un'oboe? La risposta usuale è il *timbro*, ma questa è solo una parola, che non spiega niente: che cosa c'è di diverso, dal punto di vista fisico, tra il suono di un clarinetto e quello di un'oboe?

Per quanto possa sembrare strano, per rispondere debbo prima chiarire che cosa hanno in comune. Voglio dire: se entrambi gli strumenti suonano poniamo un Si$\flat_3$, in che senso le due note sono la stessa, visto che le sentiamo in qualche modo diverse? Sappiamo la risposta: hanno la stessa *frequenza.* Infatti la frequenza non è una proprietà solo dei suoni puri: perché si possa parlare di frequenza occorre e basta che il suono sia *periodico*, ossia che la vibrazione si ripeta invariata a uguali intervalli, anche senza essere sinusoidale. L'intervallo di ripetizione si chiama *periodo*, e la frequenza non è che l'inverso del periodo. Esempio: il Si$\flat_3$ si cui sopra ha una frequenza di circa 466 Hz, e un periodo di circa 2.15 ms.





I grafici qui accanto potrebbero essere quelli del solito Si$\flat_3$, suonato da un'oboe (sopra) e da un clarinetto (sotto): mentre si vede bene che sono entrambi periodici, con lo stesso periodo, è anche chiaro che l'andamento nel tempo è ben diverso.

Per onestà, debbo dire che quei grafici non li ho presi da misure eseguite su strumenti reali, perché non mi è riuscito di trovarne (almeno non ne ho trovati di utilizzabili per il nostro scopo); li ho inventati, ossia ricostruiti per via matematica, conservando quella che so essere una caratteristica distintiva dei due strumenti, e di cui dirò tra poco.

* * *

Ora debbo introdurre dei risultati generali, in parte fisici e in parte matematici, tutti studiati e compresi nel corso dell'800. Cominciamo con la matematica. Si può dimostrare che sotto ipotesi che non preciso, ma che sono ampiamente soddisfatte nel nostro problema, ogni funzione periodica (come la x funzione di t dei grafici) può essere espressa come una *somma* di un certo numero di funzioni *sinusoidali*, i cui periodi sono tutti *sottomultipli* di quello della funzione in esame. Ossia, se T è il periodo della vibrazione che stiamo studiando, questa sarà somma di vibrazioni sinusoidali, di periodi T, $T/2$, $T/3\ldots$ Detto in altro modo, le frequenze saranno tutte *multiple* di quella *fondamentale*: se questa è $f = 1/T$, le altre saranno $2f$, $3f\ldots$

Il teorema che vi ho enunciato in modo assai sommario presenta in effetti una difficoltà non da poco, che ha dato filo da torcere ai matematici per ben più di un secolo: io me la sono cavata parlando di somma, ma in realtà la somma in generale consiste di *infiniti termini*, ossia è quella che in matematica si chiama una *serie*. In altre parole, abbiamo fatto conoscenza (una conoscenza assai sommaria, a dire il vero) con le *serie di Fourier* e col teorema dello stesso nome. Sarebbe bello, ma è impossibile per non uscire del tutto dal seminato, raccontare dove ha portato, nel puro campo della matematica, lo sforzo di capire come vanno trattate queste strane somme. Voglio solo raccontare assai brevemente che Jean-Baptiste Joseph Fourier, agli inizi dell'800, si trovò a dover inventare questa teoria per dar conto di un fenomeno fisico di tutt'altro genere: la propagazione del calore in un anello metallico riscaldato solo in una sua porzione. L'opera in cui espose i suoi risultati è la *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Valeva la pena dirlo, perché da allora la teoria delle serie di Fourier è diventata uno strumento di lavoro di cui la fisica non può fare a meno in nessun campo. E certamente non può farne a meno la fisica del suono e degli strumenti musicali...

Che cosa ci dice il teorema di Fourier sul suono emesso dell'oboe o dal clarinetto? Trattandosi di funzioni periodiche, Fourier ci assicura che possiamo vederle come *sovrapposizioni di suoni puri*, le cui frequenze sono multiple di una fondamentale. Quello che il teorema non ci dice è quali saranno le ampiezze e le fasi di questi suoni puri (funzioni sinusoidali: ricordate). Ed è qui che sta la differenza tra i due strumenti: in quello che nel linguaggio dell'acustica musicale si chiama il diverso *contenuto armonico.* In particolare, se facessimo i calcoli necessari (in realtà per un occhio allenato la cosa è evidente dalla sola ispezione dei grafici) scopriremmo una differenza fondamentale tra i due strumenti: nel suono dell'oboe sono presenti *tutte le armoniche*, prima, seconda, terza ... mentre in quello del clarinetto *mancano le armoniche pari.*

Perché succede questo? La risposta la diedero i fisici matematici dell'800, e sta nella diversa conformazione della canna: conica per l'oboe, cilindrica per il clarinetto. Purtroppo non posso dire di più. Ma la teoria sviluppata mostrò che queste sono le due sole forme che danno luogo a frequenze proprie che stanno in rapporti semplici: 1:2:3 ... per la canna conica, 1:3:5 ... per quella cilindrica.

Una domanda che potrebbe fare un lettore con buone inclinazioni matematiche: ma se costruissi uno strumento di forma diversa (e del resto ne esistono) non sarebbe ugualmente vero il teorema di Fourier? E questo non ci assicura che si può sempre fare una scomposizione in armoniche?

L'apparente contraddizione si risolve subito ricordando l'ipotesi base del teorema di Fourier: la funzione deve essere *periodica.* Perciò se uno strumento ha frequenze di vibrazione che non sono multiple di una fondamentale, ne segue che il suono che quello strumento emette *non è periodico*: alla logica non si scappa...

* * *

Arrivati alla fine di questa lunga puntata si rende necessario un riepilogo di quanto abbiamo visto.

- Primo: la nota emessa da una corda vibrante ha una frequenza che è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda.
- Secondo: i suoni con frequenze che stanno in rapporti semplici sono tra loro consonanti, e corrispondono a intervalli familiari della scala diatonica maggiore: ottava, quinta, terza...
- Terzo: un corpo vibrante (non solo una corda) ha diversi modi di vibrazione, ciascuno con una frequenza caratteristica: per una corda le frequenze vanno come i numeri interi, e sono dette "armoniche."
- Quarto: nessun corpo messo in vibrazione emette un suono puro, perché in genere vibra su più modi contemporaneamente.
- Quinto: in alcuni casi (corde sottili, tubi cilindrici o conici) le frequenze proprie stanno in rapporti semplici, come gli interi.
- Sesto: ciò che distingue e fa riconoscere uno strumento da un altro è in primo luogo (ma non solo) il contenuto armonico del suono emesso.
- Settimo: lo strumento matematico per lo studio di tutti questi problemi è la teoria di Fourier.

Questo sommario in realtà tralascia diverse questioni che abbiamo trattato o appena accennato, senza contare i molti casi in cui ho annunciato che "ne riparleremo," "approfondiremo"... Ciò significa una cosa sola: che per il futuro difficilmente mi troverò a non saper che cosa scrivere; tutto starà a vedere se avrete ancora voglia di leggermi. Ma la prossima puntata dovrà trattare tutt'altro argomento, perché come sapete ho lasciato in sospeso un complesso discorso sulla fisica quantistica.

[1] Naturalmente **9** (1996), n. 3 e
`http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/candela/candel14.pdf`

[2] Naturalmente **11** (1998), n. 4 e
`http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/candela/candel22.pdf`