La candela

Un po' più di un anno fa concludevo la puntata dedicata alla paroletta "lineare" con una frase che io stesso definivo sibillina: "... perché debbo esaminare altri aspetti del comportamento dei sistemi lineari, i quali per certi versi non sono affatto lineari... È anche da qui possono nascere alcuni dei fraintendimenti cui accennavo all'inizio." Ora ci dedicheremo a capire che cosa volevo dire.

Noterete anzitutto che di soppiatto ho introdotto un'espressione nuova: "sistemi lineari." Fino allora avevo parlato di equazioni lineari, funzioni lineari ...; poi ho cominciato a scrivere "sistemi fisici retti da leggi lineari" e infine ho scritto soltanto "sistemi lineari." È ovvio che ci sarebbe parecchio da dire su questi slittamenti, ma si tratta di un discorso epistemologico, che mi porterebbe fuori tema. Basti tener presente che le leggi che "reggono" un sistema fisico sono ovviamente nostre astrazioni e schematizzazioni, e caso per caso se ne dovrà discutere la validità e l'applicabilità. Mai procedere a testa bassa, senza guardarsi intorno. Ma del resto la questione è stata già discussa, almeno in parte, quando abbiamo passato in rassegna diversi tipi di leggi lineari.

Ammettiamo dunque che sia lecito, per un certo sistema (fisico, chimico, ma anche biologico) che c'interessa, usare leggi lineari. Ma di che leggi sto parlando? Ora non ho in mente una cosa semplice come la legge di Ohm, ma mi voglio dedicare soprattutto a leggi matematizzate mediante *equazioni differenziali*. Le equazioni differenziali sono una delle grandi invenzioni di Newton (o meglio, del suo tempo: non si può non ricordare Leibniz, ma molti altri hanno contribuito). Perché sono state una conquista, e una conquista difficile? Invece di pensare a un esempio tradizionale, come il moto dei pianeti che interessava Newton, consideriamone uno più semplice, addirittura banale come sistema (ma non del tutto come matematica).

Pensate dunque a un recipiente (per es. una lattina di birra) che abbiamo riempito d'acqua. Nel fondo però c'è un forellino, da cui l'acqua esce; l'ovvia domanda sarà: in quanto tempo si svuota? Oppure, volendo andare più nei dettagli: come varia nel tempo il livello dell'acqua? La difficoltà sta in questo: che la quantità d'acqua che esce in un dato tempo non rimane costante, ma diminuisce man mano che il recipiente si svuota. Dobbiamo a Torricelli la legge quantitativa: la velocità di efflusso va come la radice quadrata della distanza del foro dalla superficie libera. Ma non concentratevi sulla radice quadrata: il vero problema è che l'efflusso dipende dal livello dell'acqua, e il livello dell'acqua cambia perché c'è un efflusso... Non siamo di fronte a un circolo vizioso?

Ecco: il passo avanti della scienza di fine '600 è che comincia a non aver paura di simili "circoli viziosi"; anzi ne riesce a dare una trattazione precisa e a risolverli. Vediamo. Se h è il dislivello (che varia nel tempo, ossia è una funzione del tempo: $h(t)$) io so che esso decresce a causa dell'acqua che esce: il deflusso determina la variazione di h (Newton diceva la *flussione*). Se indico la variazione di h con dh/dt, seguendo la notazione di Leibniz, ho che $dh/dt = \ldots$ che cosa? Sarà uguale, o meglio proporzionale, all'acqua che esce per unità di tempo; ma questa dipende da h. Torricelli ci dice che è proporzionale alla radice quadrata di h, ma è più importante dire che dipende da h, e indicare questo fatto con $f(h)$. Siamo così arrivati alla nostra equazione: $dh/dt = f(h)$.

Lo vedete il circolo vizioso? A primo membro si trova la variazione di h nel tempo; se la conosco posso calcolare $h(t)$ (con un integrale). Ma per trovare questa debbo conoscere il secondo membro, dove c'è di nuovo h ... come si può uscirne?

Oggi questo non è un problema, e la tecnica di risoluzione s'insegna al primo anno di università. Ma tre secoli fa è stata una grande conquista; e voglio sottolineare che la conquista non è stata tanto lo scoprire il modo di risolvere il problema, quando riuscire a pensarlo come un problema risolvibile.

Sono certo che avete già riconosciuto in $dh/dt = f(h)$ un esemplare (anche semplice) di equazione differenziale del primo ordine. Ma è un'equazione lineare? In generale no; non lo è in particolare nel caso della lattina di birra, per colpa della radice quadrata di Torricelli. In realtà questo non importa, perché nel caso particolare l'equazione si risolve lo stesso, ma non è il nostro tema. L'equazione sarebbe lineare se $f(h)$ fosse una funzione lineare: così si vede il legame fra due usi del termine "lineare," riferito a una funzione oppure a un'equazione differenziale. (In realtà la classe delle equazioni differenziali lineari è più ampia, ma ora non è il caso di occuparsene.)

Ma allora, direte voi, a che serviva tirare in ballo la lattina di birra, se poi l'equazione che serve non è lineare? Serviva perché si tratta di un esempio intuitivo e concreto; ma si capisce che a noi interessano cose più sofisticate, che abbiano importanza fondamentale nella fisica, nella chimica, nella biologia... Vediamo perciò qualche esempio dai vari campi.

Primo esempio: la propagazione del calore per conduzione. È molto simile alla lattina: un corpo caldo perde calore in proporzione alla sua differenza di temperatura rispetto ai corpi freddi con cui è in contatto, e d'altra parte la sua temperatura varia in proporzione al calore che perde. Ne risulta un'equazione lineare, almeno finché valgono le ipotesi (in particolare, la costanza del calore specifico). L'equazione sarà del tipo $dT/dt = -k(T - T_0)$ dove forse non debbo spiegare i simboli usati.

Secondo esempio: moto di un corpo in presenza di attrito viscoso. La forza frenante è proporzionale alla velocità, e l'accelerazione è proporzionale alla forza; dato che $a = dv/dt$, ne segue $dv/dt = -kv$. Equazione che somiglia moltissimo alla precedente.

Terzo esempio: decadimento radioattivo. Il numero di nuclei presenti di una certa specie decresce in proporzione a quanti ne decadono per unità di tempo, ma il numero di decadimenti è proporzionale al numero di nuclei presenti; quindi $dN/dt = -kN$.

Quarto esempio: scarica di un condensatore. La d.d.p. del condensatore decresce in proporzione alla carica che sfugge dalle armature, ossia alla corrente che passa nella resistenza. Ma la corrente (legge di Ohm) è proporzionale alla d.d.p., e ne risulta $dV/dt = -kV$.

Ricordate quello che dicevo un anno fa: "visto uno, visti tutti"? Ecco qua: sono quattro casi (e avrei potuto citarne altri) in cui l'equazione è la stessa, per cui la soluzione di uno si applica immediatamente agli altri.

Ma questa era sempre fisica: se vogliamo uscire dal mio campo? Ho almeno due esempi belli e pronti, che vi sono certamente familiari. Uno lo prendo dalla cinetica chimica: supponiamo che un certo reagente A sia presente in quantità limitata in un ambiente in cui può avvenire la reazione $\mathrm{A} \to \mathrm{B} + \mathrm{C}$ (oppure che la reazione sia $\mathrm{A} + \mathrm{D} \to \mathrm{B} + \mathrm{C}$, ma la concentrazione di D sia molto maggiore di quella di A). Supponiamo inoltre che i prodotti di reazione B e C scompaiano dalla fase in cui avviene la reazione, ad es. perché precipitano: allora siamo in presenza di quella che credo si chiami una "reazione irreversibile di primo ordine," e l'equazione per la concentrazione di A è $d[\mathrm{A}]/dt = -k[\mathrm{A}]$, di nuovo la stessa già vista. Notate: se la reazione è di secondo ordine o superiore l'equazione *non è* lineare!

Ora un esempio biologico: se una popolazione ha un tasso di mortalità costante, e non si riproduce (oppure se si riproduce a un tasso inferiore alla mortalità) il numero d'individui decresce con la solita equazione: $dN/dt = -kN$. (Qui debbo chiedere scusa: sono certo che i termini usati nella dinamica delle popolazioni non sono questi, ma io non li conosco. Però riconoscerete i concetti.)

Tutta questa massa di esempi serviva a mostrare l'applicabilità assai estesa di un semplice tipo di equazione differenziale lineare. Tanto estesa che chiunque l'avrà incontrata più volte, e ne conosce anche la soluzione: le grandezze esaminate nei vari esempi hanno tutte un decremento *esponenziale*. E con questo ci sono arrivato. Dove? Ma alla "frase sibillina"! Abbiamo infatti dei sistemi lineari, il cui comportamento nel tempo segue una legge esponenziale…

Dove vedete quanto sia facile fare confusione, se non si ha un minimo d'infarinatura sul tema. Qui "lineare" si riferisce alle equazioni di base (differenziali). Ma l'andamento delle grandezze nel tempo non è affatto lineare. Se uno non ha idee chiare, pensate che pasticci ne possono uscire fra "lineare" e "non lineare"…

* * *

Prima di procedere nel discorso debbo però sviluppare un punto che ho trascurato di proposito. Tutti gli esempi che ho dato avevano in comune un fatto: il *decremento* della grandezza era proporzionale alla grandezza stessa, come è mostrato dalla costante presenza di un segno meno nel secondo membro delle equazioni. Ora ci si può chiedere: non ci sono esempi in cui la grandezza rilevante abbia un *incremento* ad essa proporzionale? Certo che sì!

In una reazione di fissione nucleare, il numero di fissioni è proporzionale al numero di neutroni presenti; e questo aumenta in proporzione al numero di fissioni. Ne segue un'equazione del tipo $dN/dt = kN$, dove N è il numero di neutroni; e la costante k è *positiva*. S'intende che ho fatto alcune ipotesi semplificative: ho trascurato che un po' di neutroni vanno perduti per diverse cause, e ho supposto che ci sia materiale fissile in abbondanza. Il primo fatto spiega perché esista una "massa critica," e perché si può arrestare una reazione inserendo degli assorbitori di neutroni nel materiale fissile. Il secondo lascia prevedere che il processo avrà termine in qualche modo, magari con un'esplosione...

L'altro esempio lo prendo ancora dalla dinamica delle popolazioni: basta invertire le ipotesi, ossia supporre che il tasso di mortalità sia inferiore a quello di riproduzione, e che entrambi siano proporzionali alla popolazione. Il che sarà vero se ciascun individuo si riproduce indipendentemente dagli altri... E qui mi accorgo di essere nei guai: so bene che esiste un termine per indicare questa situazione ma non ricordo quale sia (riproduzione agamica?) e non so neppure dove andare a cercarlo. Credo di sapere che le ipotesi saranno verificate finché la popolazione è abbastanza dispersa e ha nutrimento in abbondanza. Allora avremo la stessa equazione di cui sopra: $dN/dt = kN$.

Per trovare un esempio chimico, credo che dovrei ricorrere all'autocatalisi, ma temo che tutti i lettori ne sappiano più di me, perciò non azzardo, e lascio a chi legge di trovare l'esempio giusto.

Riassumendo: che cosa succede se l'equazione è $dN/dt = kN$, con k costante positiva? Succede che la soluzione è ancora esponenziale, ma con andamento crescente, anziché decrescente. Di solito è a questo caso che ci si riferisce più di frequente quando si parla di andamento esponenziale, e ora vorrei soffermarmici un momento.

* * *

Avrete certamente notato che da qualche tempo a questa parte il termine "esponenziale" è diventato di moda: non si fa che leggere e sentire di aumenti esponenziali, di prezzi, di traffico, d'inquinamento... Come credo di aver già detto, sono sicuro che praticamente tutti quelli che usano la parola non hanno idea di che cosa esattamente significa, e la intendono come sinonimo di "assai rapido," o peggio ancora di "molto grande." In realtà un andamento esponenziale non è necessariamente né rapido né grande, e ha invece delle proprietà caratteristiche che bisognerebbe aver presenti (e insegnare nelle scuole!).

Perché dico che un andamento esponenziale non è necessariamente rapido né grande? Perché tutto dipende da quella costante k. È facile verificare che k in tutte le formule che ho scritto rappresenta l'inverso di un tempo, tanto è vero che $1/k$ viene spesso indicata con τ e chiamata *costante di tempo* del fenomeno. Non voglio eccedere con le formule, per le ben note ragioni, per cui mi limito a dare dei risultati, che forse sono già noti a tutti quelli che stanno leggendo.

Il significato di τ è che in questo tempo la grandezza che c'interessa (numero d'individui, concentrazione ...) si *moltiplica* per un fattore fisso, che non è altro che il famoso numero di Eulero: $e = 2.718\ldots$ Dove il punto centrale è il "si moltiplica." Se la costante di tempo è un anno, la quantità in questione diventa 2.718... volte maggiore dopo un anno; dopo due anni sarà $2.718 \times 2.718 = 7.39$ volte più grande, e così via. In altre parole, dopo uguali intervalli di tempo la successione dei valori è una *progressione geometrica.* Già, perché esponenziale e progressione geometrica sono parenti assai stretti.

Va da sé che se abbiamo un'esponenziale decrescente, nel tempo τ invece di moltiplicare per 2.718 dovremo dividere, ossia moltiplicare per 0.368, eccetera.

Questa proprietà della progressione geometrica non è caratteristica dell'intervallo τ, ma vale per qualsiasi intervallo fisso; per esempio si usa spesso, in decadimenti radioattivi o fenomeni analoghi, definire il "tempo di dimezzamento," che è ovviamente quello in cui la grandezza si dimezza. Il tempo di dimezzamento è $0.693\,\tau$, dove $0.693\ldots$ non è che il logaritmo naturale di 2; ma ora non occorre pensarci.

Che si usi la costante di tempo, oppure il tempo di dimezzamento, il punto importante è che fenomeni diversi, descritti da un andamento esponenziale, possono differire solo per la loro *scala temporale*, misurata appunto dalla costante di tempo. Perciò un andamento esponenziale può essere rapidissimo o lentissimo, a seconda della costante di tempo: un tasso costante d'inflazione darà sempre un incremento esponenziale dei prezzi, tanto se il tasso è dell'1% annuo, quanto se è del 20% (ricordate?).

Dato che ho usato l'espressione "scala temporale," vorrei fare ancora una piccola digressione linguistica. Il concetto di scala temporale è ovviamente centrale non solo in fisica, ma in qualunque scienza; perciò abbiamo a che fare con un termine di gergo, soggetto a curiose vicissitudini. Per esempio mi accorgo che almeno nel gergo astrofisico italiano da qualche anno si usa dire "tempo scala," per intendere la stessa cosa. Non è difficile capire da dove viene questa espressione (che a me riesce alquanto ostica ...): basta chiedersi come si direbbe in inglese "scala temporale." Risposta: "time scale." Non so chi abbia introdotto quella barbara traduzione italiana, ma temo che ormai non ce ne libereremo più...

* * *

Dato che un esponenziale crescente ... cresce indefinitamente, in progressione geometrica, è facile capire che pur di aspettare si raggiungeranno per la grandezza in esame valori enormi, probabilmente assurdi. Così ad es. se stiamo parlando di una popolazione batterica, a forza di crescere il volume dei batteri finirebbe per superare quello del brodo di coltura; gli individui colpiti da un'epidemia supererebbero l'intera popolazione esistente sulla Terra, ecc.

Se questo discorso vi suona insensato (sappiamo benissimo che ciò non accade, dunque perché parlarne?) voglio sottolineare che invece in fisica simili ragionamenti "per assurdo" si usano spesso. Proprio allo scopo di mostrare che le ipotesi fatte debbono avere dei limiti di validità, e che quindi bisogna cercarli, e non applicare le formule a occhi chiusi. Nel caso dei batteri molto probabilmente entrerà in gioco un fattore limitante legato alla disponibilità finita di nutrimento (o forse altro che ignoro). Sapete bene che è possibile fare un modello matematico anche di questi accrescimenti limitati, che in certe ipotesi portano alla famosa "curva logistica." Ma non vado oltre, perché certamente le equazioni che portano alla curva logistica *non sono lineari*, e perciò escono dal mio tema.

Notate che anche nel caso di decremento prodotto da equazioni lineari si ha lo stesso fenomeno: spesso il decremento esponenziale vale fino a un certo punto, poi non più. Un caso ben familiare è quello dell'omeopatia. Le diluizioni omeopatiche sono una progressione geometrica decrescente, e ben presto si arriva a un tale grado di diluizione che nella soluzione non c'è più neppure una molecola della sostanza attiva...

È interessante chiedersi quale sia l'ipotesi che cade in difetto. La risposta è: il decremento esponenziale (o geometrico, che è lo stesso) vale finché la quantità in oggetto può essere trattata come una grandezza *continua.* Nel nostro caso parliamo di una concentrazione, che è sì espressa da un numero reale (ad es. moli per litro) ma alla fine dei conti sta a indicare quante molecole sono presenti. E poiché le molecole sono discrete, non si può avere in soluzione una molecola e mezza, e tanto meno un decimo di molecola: a questo punto il calcolo della diluizione fatto dividendo per 100 la concentrazione precedente non vale più, e prevalgono effetti statistici. Potrò solo dire che *in media* mi aspetto un certo numero di molecole, ma quando questo numero è piccolo, le fluttuazioni attorno al numero medio atteso saranno assai notevoli.

* * *

Ho già scritto molto, e temo ancora una volta di essere stato un po' pesante. Perciò è meglio che interrompa qui il discorso, che pure è tutt'altro che finito. Anzi, forse il più interessante deve ancora cominciare. Giusto per darvi un'anticipazione, ecco di che cosa ancora si potrebbe ragionare:

– Strettamente connesso con l'esponenziale c'è il tema dell'*instabilità* (o della stabilità) di un sistema o di un equilibrio.

– Questo ci porta a discutere se e quanto siano utili le equazioni lineari, le linearizzazioni, e quali siano i loro limiti.

– Da qui, guardando quello che capita quando le condizioni lineari non sono rispettate, è facile il passo al *caos deterministico.*

– Poi occorre notare che non tutti i sistemi lineari hanno andamenti esponenziali: ci sono anche le *oscillazioni.*

– Instabilità più oscillazioni porta ancora in un altro terreno: gli equilibri preda–predatore, le oscillazioni nelle reazioni chimiche…
– Poi ci sono le onde, lineari e non…

Come vedete, un campo sterminato. Vuol dire che ce ne occuperemo un'altra volta, speriamo prima del 2001. *Ars longa, vita brevis…*