

# Geometria dello spazio-tempo e paradossi relativistici\*

(seconda versione, aprile 1992)

E. Fabri

Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa

## **Abstract**

*The classical skier paradox is revisited, with the aim of showing that a strictly geometric approach (i.e. one that makes no use of Lorentz transformations and the like) is more apt at revealing the true nature of the physical problem being studied. In a geometric approach only invariant quantities have meaning, and paradoxes simply “disappear.” A brief discussion is also given of a common misunderstanding: that when dealing with accelerated frames general relativity is necessarily involved.*

## **Premessa**

In più occasioni (v. ad es. [1]) ho sostenuto che in una presentazione elementare della relatività è meglio non far uso delle trasformazioni di Lorentz, e privilegiare invece gli aspetti geometrici, come viene evidenziato fin dal titolo in un classico libro di Taylor e Wheeler [2]. C'è tuttavia un campo nel quale sembra che la formulazione algebrica abbia un vantaggio: quello della discussione dei numerosi paradossi. Infatti si può ragionevolmente sostenere che tecniche algebriche (le trasformazioni di Lorentz) mettono al riparo da errori che sono sempre in agguato, quando in qualche punto del ragionamento ci si affida all'intuizione.

Una prima risposta potrebbe essere che in una formulazione geometrica della relatività molti paradossi non possono essere neppure formulati; il che mi sembra un vantaggio didattico, visto che spesso un paradosso non è altro che un ragionamento sbagliato, derivante da un'applicazione scorretta della teoria. Ai paradossi invece non si sfugge se si comincia a parlare di contrazioni, dilatazioni, ecc. Occorre dunque dimostrare che è proprio di queste idee che non c'è bisogno; la difficoltà deriva solo dal fatto che un tale atteggiamento richiede quasi un “cambiamento di paradigma,” tutt'altro che naturale per chi sia stato educato alla relatività nel modo tradizionale.

Inoltre i paradossi fanno ormai parte del “folklore” della relatività; e anche se insisto sull'opportunità di non farne oggetto diretto dell'insegnamento, resta il fatto che chi ha studiato la relatività secondo linee tradizionali ne ha certo sentito

---

\* *La Fisica nella Scuola* **26** (1993), 6.

parlare, e alcuni potrebbero anche venire in mente a studenti particolarmente acuti: dunque sarebbe bene che l'insegnante fosse preparato ad affrontarli.

Per queste ragioni può essere utile presentare la soluzione di qualche paradosso nel linguaggio geometrico. Naturalmente occorre fare una scelta, per ragioni di spazio; dato che del più classico — il paradosso dei gemelli — ho già trattato in [1] non mi ripeterò qui, e mi dedicherò invece a un caso particolarmente spinoso: il “paradosso dello sciatore.” Esso è stato ripreso qualche tempo fa in un articolo di A. Piazzoli [3], al quale sono grato per avermi indotto a riflettere sul problema. Di questo paradosso esistono diverse versioni; per es. in [2], nel problema 25, è proposto come “paradosso del palo e della baracca.” Rimando all’articolo di Piazzoli per la sua descrizione, nelle due varianti: una che implica un moto accelerato, e l’altra no. Più avanti affronterò la questione se “moto accelerato” significhi “relatività generale,” ma per ora mi limito alla versione che rientra senza dubbio nella relatività ristretta.

## Il paradosso

Per comodità del lettore, e per fissare alcune notazioni, ripeto la schematizzazione che adotterò nel seguito. Nel riferimento  $\mathcal{S}$  una sbarra AB (fig. 1) si muove di moto uniforme lungo una retta; un “buco” CD (cioè una sbarra infinita, mancante di un segmento) parallelo ad AB, si muove uniformemente in una direzione perpendicolare. Se le lunghezze della sbarra e del buco stanno in un’opportuna relazione, è possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che la sbarra attraversi il buco senza toccarne gli estremi (lo sciatore cade nella buca). Il paradosso consiste nel fatto che questa relazione fra le lunghezze sembra dipendere dal riferimento in cui si guarda il fenomeno.

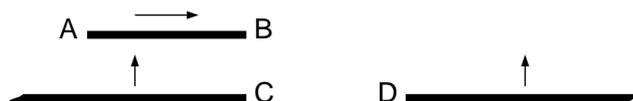


fig. 1

La soluzione tradizionale del paradosso, descritta in [3], fa uso delle trasformazioni di Lorentz per dimostrare che nel riferimento  $\mathcal{S}'$  in cui la sbarra è ferma il buco e la sbarra non sono più paralleli, e bisogna anche fare i conti con la relatività della simultaneità, oltre che con la contrazione delle lunghezze.

Dal mio punto di vista, risolvere il paradosso significa dimostrare che effettivamente la risposta al problema (lo sciatore cadrà nella buca?) in quanto corrisponde a fatti osservabili, obbiettivi, non può dipendere dalla descrizione da noi adottata, e in particolare dal riferimento scelto. È soprattutto di questo aspetto che mi voglio ora occupare, per mostrare come la descrizione geometrica implichi naturalmente non tanto la soluzione, quanto addirittura la “scomparsa” del paradosso.

Ma per far questo, debbo anzitutto spiegare meglio che cosa intendo per “descrizione geometrica” di un problema di relatività; ciò richiederà anche qualche chiarimento di carattere matematico: di una matematica tutto sommato elementare, ma non molto presente nella nostra tradizione didattica.

### Breve *excursus* geometrico

L’idea fondamentale della relatività (tanto ristretta quanto generale) è che si possa parlare dello spazio-tempo come di una realtà fisica avente una ben precisa rappresentazione matematica: quella di una varietà 4-dimensionale, semi-riemanniana nel caso della relatività generale, più semplicemente lorentziana per la relatività ristretta. Nel secondo caso si possono definire (in infiniti modi) coordinate cartesiane  $t, x, y, z$ ; e in termini di queste esprimere tutte le proprietà geometriche, a cominciare dalla *metrica*, che generalizza la distanza dell’ordinario spazio euclideo. La differenza più importante fra la geometria lorentziana e quella euclidea è, come ben noto, che nella prima esistono tre tipi di vettori: quelli spaziali, quelli temporali e quelli nulli. Non mi soffermo su tutta una serie di altre proprietà, che assumo ben conosciute al lettore.

Mi sembra invece importante mettere l’accento su tre punti: il primo è che le proprietà citate dello spazio-tempo, anche se si esprimono comodamente in termini di coordinate cartesiane, sono in realtà indipendenti dall’impiego delle coordinate. Del resto lo stesso accade nella geometria euclidea, dove anzi il concetto trova la sua espressione concreta nella didattica tradizionale, che antepone di molto lo studio della geometria euclidea (in termini di punti, rette, cerchi, angoli, distanze . . .) a quello della geometria analitica (che traduce tutte queste idee in forma algebrica). Naturalmente l’ordine dell’esposizione didattica ripete quello della storia delle idee: tra Euclide e Cartesio ci sono ben 19 secoli!

Il secondo punto da rilevare è che lo spazio euclideo e quello lorentziano, pur avendo struttura diversa, hanno anche un nucleo di proprietà comuni: tutte quelle relative alla *struttura affine*, che include — detto in soldoni — i concetti di retta, piano, intersezione, parallelismo, confronto di lunghezze *lungo una stessa retta o rette parallele*, omotetie; mentre non ne fanno parte angoli, perpendicolari, confronto di lunghezze *in direzioni diverse*, rotazioni, similitudini in generale. Appartiene ad es. alla struttura affine il teorema di Talete, ma non quelli di Euclide e di Pitagora; l’ellisse ma non il cerchio, e via dicendo. Questa osservazione è qui essenziale, poiché abbiamo bisogno di sapere quali argomenti geometrici possiamo trasportare dalla nostra ricca esperienza con lo spazio euclideo allo spazio-tempo della relatività ristretta.

### Fisica e geometria dei riferimenti inerziali

Il terzo punto ha natura diversa dai precedenti, in quanto tocca la fisica. Intendo parlare della definizione di “sistema di riferimento” (brevemente “riferimento”). Troppo spesso si tende a identificare un riferimento con un sistema

di coordinate, ma ciò non è corretto e non è opportuno. È senz'altro vero che un sistema di coordinate sottintende un riferimento, ma il riferimento è *un concetto fisico*: in poche parole, significa *un laboratorio dotato di tutti gli strumenti necessari per le misure che interessano*. Niente vieta — e talvolta sarà comodo — introdurre nel laboratorio un sistema di coordinate spazio-temporali, ma ciò si potrà fare in infiniti modi; incidentalmente, non sarà affatto necessario che si tratti delle coordinate cartesiane di cui si diceva sopra.

Il principio di relatività ci assicura che tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti: su ciò non posso intrattenermi. Ma vorrei sottolineare che le proprietà dello spazio-tempo *hanno carattere intrinseco*, e perciò non possono essere influenzate dalla scelta del riferimento, perfino se questo non fosse inerziale. Su questo punto tornerò più avanti, quando discuterò se il paradosso dello sciatore ha o no a che fare con la relatività generale.

Come si traduce in termini matematici un riferimento inerziale? Ogni punto del riferimento si muove secondo il principio d'inerzia, per cui la sua legge oraria è rappresentata nello spazio-tempo da una retta. Tutti i punti hanno la stessa velocità: dunque tutte queste rette sono parallele. Un laboratorio è un *corpo rigido*; perciò tra due suoi punti si può sempre definire senza ambiguità una *sincronizzazione degli orologi*. Si noti che la rigidità del riferimento e la comune velocità dei suoi punti possono essere ricavate sperimentalmente, ad es. con la tecnica radar: si tratta dunque di proprietà *osservabili* in un senso ben preciso.

L'insieme degli eventi sincronizzati con un evento dato è un iperpiano spaziale, ortogonale (nel senso di Lorentz–Minkowski) alle rette di cui sopra. Ad ogni riferimento va dunque associato questo sistema di rette e iperpiani, che lo caratterizzano completamente. Ne segue anche una definizione naturale della coordinata temporale  $t$  associata al riferimento:  $t$  è il tempo segnato da tutti gli orologi sincronizzati. Dato che ciascuno degli iperpiani di cui sopra è caratterizzato da un determinato valore della coordinata  $t$ , riesce spontanea la notazione  $\pi_t$  per indicare uno di questi iperpiani. (A rigore la coordinata  $t$  è definita a meno di una trasformazione lineare; ma per il nostro scopo ciò non ha importanza.)

Le famiglie  $\{\pi_t\}$  relative a riferimenti distinti sono diverse: è questa la forma geometrica della “relatività della simultaneità.” Poiché questo articolo non ha lo scopo di offrire una presentazione didattica, non mi soffermerò a far vedere come si possa collegare direttamente, senza alcuna difficoltà, la descrizione geometrica al fatto fisico che essa esprime, legato — come tutti sanno — all'invarianza della velocità della luce.

Abbiamo ora preparato il terreno per discutere il paradosso dello sciatore. Un inconveniente di una trattazione geometrica è che lo spazio-tempo ha quattro dimensioni, il che rende quanto meno problematico servirsi di figure. Per fortuna però nel nostro caso una delle tre dimensioni spaziali non entra in gioco (tutto si svolge in uno stesso piano spaziale): possiamo perciò dimenticare la

coordinata  $z$ , e ragionare con uno spazio-tempo tridimensionale, disegnare diagrammi tridimensionali (con due coordinate spaziali e una temporale), ecc. Gli iperpiani descritti sopra si ridurranno a piani ordinari, per cui potremo dire che l'intersezione di due piani è una retta, e così via.

### Il paradosso dello sciatore, *more geometrico*

Le linee orarie degli estremi A e B dello sci sono rette parallele nello spazio-tempo, che indicherò ancora con A e B; esse individuano un piano  $\pi_{AB}$  e lo sci descrive un striscia  $\sigma_{AB}$  di tale piano, delimitata dalle rette A e B (fig. 2). Lo stesso si può ripetere per il buco, che determina altre due rette C e D tra loro parallele, un altro piano  $\pi_{CD}$ , e in esso una striscia  $\sigma_{CD}$  delimitata dalle rette C e D. Nel riferimento  $\mathcal{S}$  a un dato istante  $t$  corrisponde un piano spaziale  $\pi_t$ ; le intersezioni di  $\sigma_{AB}$  e  $\sigma_{CD}$  con  $\pi_t$  sono due segmenti, corrispondenti alla posizione dello sci e del buco all'istante  $t$ . Dai dati del problema sappiamo che questi segmenti sono paralleli. Ne segue che anche l'intersezione R di  $\pi_{AB}$  e  $\pi_{CD}$  è parallela ai  $\pi_t$ , perciò esiste un particolare  $\pi_t$  che contiene R: a quell'istante nel riferimento  $\mathcal{S}$  sci e buco sono sulla stessa retta. Ciò naturalmente era ovvio in partenza, ma la discussione dimostra che il riferimento  $\mathcal{S}$  ha una caratteristica che lo distingue nell'insieme dei riferimenti inerziali. Perciò non sarà in generale lecito trasportare le conclusioni raggiunte in  $\mathcal{S}$  a un riferimento qualsiasi.

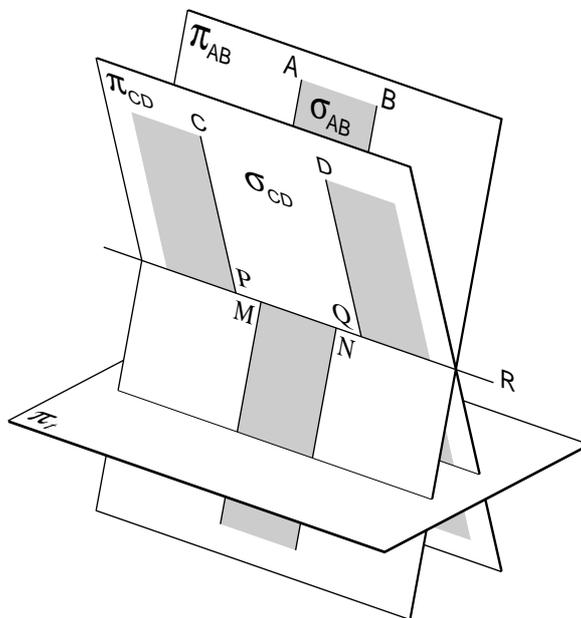


fig. 2

Si vede anche che  $\mathcal{S}$  non è l'unico riferimento ad avere la proprietà ora vista: lo stesso accade per ogni riferimento i cui piani  $\pi_t$  sono paralleli a R. Un riferimento che si muova rispetto a  $\mathcal{S}$  con velocità perpendicolare alla traiettoria dello sci va ancora bene, incluso quello  $\mathcal{S}''$  in cui il buco è fermo. Non è dunque vero che in  $\mathcal{S}''$  lo sci appaia inclinato, come si dice in [3].

Perché lo sciatore cada nella buca, occorre e basta che  $\sigma_{AB}$  non intersechi  $\pi_{CD} - \sigma_{CD}$ . Dette M, N le intersezioni delle rette A, B con R e P, Q quelle di C, D sempre con R questa condizione si esprime con

$$MN \subset PQ.$$

Si noti che  $M, N, P, Q$  sono *eventi*, e in quanto tali hanno significato fisico indipendentemente dal riferimento. Come si vede, è necessario (ma non sufficiente)

$$\overline{MN} < \overline{PQ}$$

dove  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$  indicano le distanze invarianti, nel senso della geometria di Lorentz–Minkowski, fra gli eventi dati. Le condizioni scritte, essendo espresse in modo geometrico, *non dipendono dal riferimento*: in questo senso, non esiste nessun paradosso.

Dato che nel riferimento  $\mathcal{S}$  i quattro eventi sono simultanei,  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$  coincidono, *in questo riferimento*, con le distanze ordinarie: ecco perché  $\mathcal{S}$  è particolarmente comodo per discutere il problema. Anzi da qui si ricava un utile insegnamento: spesso si può semplificare la risoluzione di un problema di relatività se si sceglie in modo intelligente il sistema di riferimento (cosa che del resto non è vera solo in relatività!)

Da quanto è stato detto, dovrebbe risultare ben chiaro perché il riferimento  $\mathcal{S}'$  non può essere usato in modo semplice nel nostro problema: i suoi piani  $\pi'_t$ , ovviamente diversi da quelli di  $\mathcal{S}$ , non sono paralleli alla retta  $R$ . In particolare, le lunghezze dello sci e della buca misurate in  $\mathcal{S}'$  non servono a rispondere alla domanda del problema. Viceversa le distanze invarianti  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$  possono benissimo essere calcolate anche in  $\mathcal{S}'$ , ma in quanto distanze fra eventi *non simultanei*; e di fatto questo è l'unico modo per risolvere il problema in  $\mathcal{S}'$ . Mi sembra però molto più istruttivo insegnare a identificare il riferimento più adatto per il problema, che non forzare a risolverlo in un riferimento scomodo.

### Per gli *aficionados* della contrazione di Lorentz

Si può osservare che la nostra soluzione non è completa: abbiamo mostrato che ciò che conta è che nel riferimento  $\mathcal{S}$  lo sci sia più corto della buca, ma non abbiamo detto che la lunghezza dello sci nel suo riferimento di quiete  $\mathcal{S}'$  è maggiore di  $\overline{MN}$ . Questa è la ben nota contrazione di Lorentz, e dobbiamo ora vedere come ci si può arrivare senza ricorrere alle trasformazioni di Lorentz. Nella dimostrazione che darò non c'è niente di originale (si veda ad es. [4], p. 109 e seg.)

Per questa discussione è sufficiente limitarsi agli eventi appartenenti al piano  $\pi_{AB}$ , che appare in fig. 3. I piani  $\pi_t$  di  $\mathcal{S}$  sono rappresentati da rette orizzontali; le linee orarie dei punti fermi in  $\mathcal{S}$  da rette verticali. Le linee orarie degli estremi dello sci sono le rette oblique  $A$  e  $B$ .

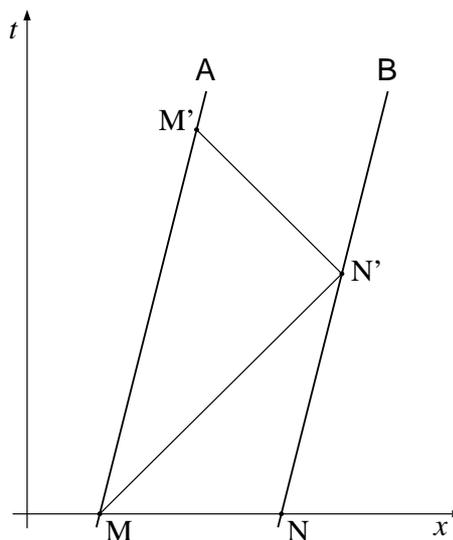


fig. 3

Indichiamo con  $l$  la lunghezza di AB *misurata in*  $\mathcal{S}$ , ossia la distanza fra i punti  $M$  e  $N$  in fig. 3. La misura in  $\mathcal{S}'$  può essere fatta ad es. con un radar: si trasmette un segnale radio da A verso B, si riceve l'eco di ritorno, e si ricava la lunghezza voluta dall'intervallo di tempo  $\Delta\tau$  trascorso fra la trasmissione del segnale e la ricezione dell'eco. Sempre in fig. 3, le rette  $MN'$  e  $N'M'$ , disegnate a  $45^\circ$ , sono le linee orarie dei segnali radio in andata e in ritorno.

Le equazioni orarie degli estremi A, B della sbarra sono

$$x = x_M + v(t - t_M) \quad (1)$$

$$x = x_N + v(t - t_N) \quad (2)$$

dove  $t_M = t_N$ , mentre quelle dei segnali radio sono

$$x = x_M + (t - t_M) \quad (3)$$

$$x = x_{N'} - (t - t_{N'}) \quad (4)$$

(ho posto  $c = 1$ ). Dalle (2) e (3) si ottengono le coordinate di  $N'$ ; usando poi le (1), (4) si ricavano quelle di  $M'$ . Il risultato è

$$t_{M'} - t_M = \frac{2l}{1 - v^2}, \quad x_{M'} - x_M = \frac{2lv}{1 - v^2}. \quad (5)$$

Con la definizione di tempo proprio

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2} \quad (6)$$

si trova subito, per l'intervallo fra gli eventi  $M$  e  $M'$ :

$$\Delta\tau = 2\gamma l. \quad (7)$$

Dunque la distanza cercata è  $l' = \gamma l$ , come si voleva dimostrare.

A questo punto abbiamo la risposta finale: se  $l_b$  è la lunghezza della buca (ovviamente misurata in  $\mathcal{S}$ ) lo sciatore cadrà nella buca se e solo se

$$l' < \gamma l_b.$$

### Questioni di parole e/o di gusti

Concludo questo argomento con qualche osservazione relativa all'articolo di Piazzoli. Non mi sembra il caso di dire che “per due osservatori posti agli estremi del buco il tempo trascorre in modo diverso, pur nello stesso sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$ ”: si tratta solo di due eventi che non sono simultanei in  $\mathcal{S}'$ , mentre lo sono in  $\mathcal{S}$ . Neppure direi che i due impatti in  $\mathcal{S}'$  “precedono l'impatto

contemporaneo dei due estremi con l'asse  $x$  in  $\mathcal{S}''$ : in primo luogo qui si vorrebbero confrontare tempi misurati in riferimenti diversi; in secondo luogo, quei  $t'_1$  e  $t'_2$  risultano negativi solo se  $x_1$  e  $x_2$  sono positivi, il che dipende dalla scelta dell'origine delle  $x$ , che è arbitraria.

Più importante mi sembra però commentare le “ricette” per risolvere i paradossi. Sulla prima (stabilire se il problema è di competenza della relatività speciale o di quella generale) appare difficile non essere d'accordo; eppure spiegherò tra poco che proprio nel nostro caso la questione non è così ovvia. La seconda (prefissare con chiarezza sistemi di riferimento e osservatori) è senz'altro da condividere quanto ai riferimenti, ma non saprei cosa intendere per “osservatori”: nell'uso che se ne fa di solito, tale concetto mi appare spesso fuorviante, e in generale inutile. Delle due l'una: o “riferimento” e “osservatore” sono sinonimi (col significato che ho spiegato sopra) e allora preferisco il primo; oppure il termine “osservatore” vuole avere un significato diverso, e allora questo non può non introdurre un elemento di soggettività, che ritengo del tutto estraneo alla fisica. Quanto alla terza ricetta (non ricorrere affatto all'intuito, ma usare fino in fondo le trasformazioni di Lorentz) ci sono diverse cose da dire.

Non ricorrere all'intuito è un consiglio molto saggio, dato che l'intuito in queste cose spesso tradisce; ma ciò non vuol dire che la sola alternativa sia un approccio formale, basato sulle trasformazioni di Lorentz. La pratica didattica (universitaria) dimostra che raramente uno studente sa usarle correttamente in un problema *nuovo*, anche quando ne sembra perfettamente padrone nei problemi che ha già studiato; e questo dovrebbe farci riflettere. Se poi scendiamo al livello della scuola secondaria, ci si deve chiedere se sia comunque possibile portare uno studente anche bravo a padroneggiare lo strumento formale, se prima non ha capito la sostanza fisica del problema; e se il tempo obbliga a sacrificare qualcosa, non avrei dubbi sulla scelta. A questo livello non so trovare esempi di problemi seri (ossia non inventati apposta, come sono appunto tanti dei famosi paradossi) dove l'uso delle trasformazioni di Lorentz sia necessario. Il punto di vista geometrico che sostengo ha il vantaggio di mettere molto più in evidenza gli aspetti *intrinseci* dei problemi e di obbligare a pensare di più.

### **In quali casi è necessaria la relatività generale?**

Affrontiamo infine — molto brevemente — la questione della relatività generale. Vorrei innanzitutto chiarire che esistono una serie di situazioni in cui la relatività generale non entra affatto, anche se viene spesso tirata in ballo (e non mi riferisco per ora al paradosso dello sciatore). Sto pensando a tutti i problemi relativi a riferimenti accelerati. L'argomento che si dà di solito è il seguente: la relatività ristretta si applica ai riferimenti inerziali, cioè non accelerati; la fisica dei riferimenti accelerati esce dunque dal suo ambito, e richiede un'adeguata generalizzazione, fornita appunto dalla relatività generale.

Per discutere la questione, precisiamo innanzitutto che la distinzione tra relatività ristretta e generale non sta nell'uso di coordinate più generali nella seconda (il famigerato "principio di covarianza generale"): se così fosse, nella fisica dei riferimenti inerziali dovremmo usare solo e sempre coordinate cartesiane. Sappiamo invece che coordinate cilindriche, polari, o altre, sono del tutto legittime, e che tutte le equazioni possono essere espresse in qualsivoglia sistema di coordinate, senza con ciò cambiare la fisica. Si potrebbe perfino coinvolgere la coordinata temporale in questa arbitrarietà; cosa che di solito ci guardiamo bene dal fare, proprio perché nell'ambito di validità della relatività ristretta ad ogni riferimento inerziale si associa in modo naturale una coordinata temporale che semplifica enormemente la nostra descrizione dei fatti. [5]

In realtà dal punto di vista della relatività quella che conta è la *geometria dello spazio-tempo*, che la relatività ristretta suppone lorentziana, come abbiamo già ricordato. Se questa geometria rispecchi la situazione fisica, dipende solo dalla situazione fisica stessa (che è un fatto obbiettivo) e non dal sistema di riferimento: sarà così se siamo lontani da sorgenti di campo gravitazionale.

Un riferimento accelerato potrà essere per es. un laboratorio installato dentro un'astronave che viaggia coi razzi accesi, e magari ruotando su se stessa, assai lontano da qualsiasi stella o pianeta. Lo spazio-tempo nel quale l'astronave si muove non cessa per questo di essere lorentziano; solo che nelle coordinate usate in quel riferimento la metrica avrà un'espressione più complicata di quella di Lorentz–Minkowski. In quel laboratorio si osserveranno effetti (ad es. un redshift, un effetto Sagnac) obbiettivamente rivelati dagli strumenti, ma che potranno essere interpretati, *senza ricorso alla relatività generale*, studiandoli in un normale riferimento inerziale. Così il redshift che appare nel riferimento accelerato, nel riferimento inerziale è visto come effetto Doppler, perché sorgente e ricevitore della radiazione hanno velocità diverse, la prima quando emette e il secondo quando riceve.

Se invece la situazione fisica è diversa, nel senso che è presente una sorgente di campo gravitazionale (come sulla superficie della Terra) lo spazio-tempo non è più lorentziano, e non è comunque possibile usare coordinate in cui la metrica sia quella di Lorentz–Minkowski. Neppure l'ascensore di Einstein ci soccorre, se non in modo approssimato in un piccolo intorno: lo spazio-tempo è *curvo*, e la teoria di Einstein ci dice come calcolare la struttura geometrica data la distribuzione di massa.

Sembra dunque che in un problema relativistico in cui intervenga la gravità non si possa fare a meno della relatività generale; ma nemmeno questo è del tutto vero, grazie al *principio di equivalenza*. Se nella regione di spazio che c'interessa il campo è sufficientemente uniforme, il suo effetto sarà indistinguibile da quello di un'accelerazione del riferimento; e abbiamo visto poco fa che la fisica di un riferimento accelerato può essere capita senza relatività generale. Un'applicazione di questa idea, dovuta allo stesso Einstein [6], è la previsione

del redshift gravitazionale (si veda la discussione in [1]). Un altro esempio è il “paradosso dell’astronave accelerata” [7]. Tornando al nostro tema, possiamo dunque concludere che una volta *ammesso il principio di equivalenza, non è necessario l’apparato della relatività generale per discutere il paradosso dello sciatore.*

### **Avvertenza finale**

A conclusione, sento il dovere di avvertire il lettore che alcune delle tesi sviluppate in questo scritto, e particolarmente quelle esposte nell’ultima sezione, non raccolgono ancor oggi il consenso unanime degli “esperti.” Sarebbe troppo lungo — e uscirebbe dagli scopi che mi ero proposto — approfondire l’argomento. Personalmente sono convinto che quella che ho espressa sia la visione più semplice e soddisfacente, e probabilmente quella destinata a riuscire alla lunga vincente; ma oggi non è così, e questo ha degli immediati riflessi anche sulle scelte didattiche.

Mi permetto ancora due riflessioni: è proprio quando si affrontano i problemi didattici al livello più elementare che le questioni di fondo emergono con maggiore chiarezza, perché non sono oscurate dai tecnicismi; il fatto che esistano questioni non del tutto risolte dovrebbe far meditare chiunque si proponga d’inserire argomenti “moderni” nei programmi di fisica. Non voglio dire che ciò non vada fatto, ma occorrerebbe il supporto di una discussione ben più approfondita di quella che abbiamo vista finora.

## Bibliografia

- [1] E. Fabri: *Per un insegnamento moderno della relatività*; Pisa (1989).
- [2] E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Spacetime Physics*; Freeman (1966).
- [3] A. Piazzoli: “Il paradosso dello sciatore: un rompicapo relativistico”; *La Fisica nella Scuola* **23** (1989), p. 139–140.
- [4] H. Bondi: *La relatività e il senso comune*; Zanichelli (1965).
- [5] W. Rindler: *Essential Relativity*; Springer, 2<sup>a</sup> ed. riv. p. 177, (1979).
- [6] A. Einstein: “Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes”; *Ann. d. Physik* **35** (1911) p. 898–908.
- [7] E. Fabri: “Sul volo interstellare relativistico”; *G. di Fisica* **19** (1978), p. 75–77.