E. Fabri *luglio 2010*

Matematica e fisica – un rapporto complesso*

Due problemi (due tesi)

La presente relazione tratterà due problemi, a proposito dei quali svilupperà due tesi:

1) Come si giustifica e come va definito l'impiego della matematica in fisica? La matematica "strumento di pensiero."
2) Perché le strutture matematiche più direttamente connesse alla fisica sono quelle più astratte? Astratto non vuol dire "lontano dalla fisica."

Il rapporto tra fisica e matematica: in principio era Galileo

Parlando di Galileo, è d'obbligo citare il famosissimo brano del *Saggiatore*: *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

Spesso di questo brano viene data un'interpretazione *platonista*: la matematica sarebbe la via per cogliere la "vera" essenza delle cose, al di là delle apparenze offerte dai fenomeni. Ma è possibile un'interpretazione diversa: solo la matematica ci dà uno strumento sufficientemente potente e preciso per intendere l'universo. Per capire da dove nasca la metafora del libro e dei caratteri, occorre non isolare il brano da ciò che lo precede:
Parmi, oltre a ciò, di scorgere nel Sarsi ferma credenza, che nel filosofare sia necessario appoggiarsi all'opinioni di qualche celebre autore, sì che la mente nostra, quando non si maritasse col discorso d'un altro, ne dovesse in tutto rimanere sterile o infeconda; e forse stima che la filosofia sia un libro e la fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando Furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi è scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia ...

Si vede che l'accento è in realtà sul fatto che la filosofia (intesa naturalmente come "filosofia naturale," ossia "scienza" nel linguaggio di oggi) non è

* Lezione alla Scuola AIF di Storia della Fisica, Ferrara 3–12–2009; pubbl. nel *Quaderno* 21, *La Fisica nella Scuola* **43**, suppl. al n. 3 (2010). Questa lezione è un'ampia rielaborazione della relazione su invito tenuta al XXXIV Congresso AIF (Porretta Terme, 26–10–1995), pubblicata negli Atti del Congresso: *La Fisica nella Scuola*, **30** (1997), Suppl. al n. 2, p. 139.

fantasia d'un uomo, né si fonda sull'autorità, ma è scritta nel libro dell'universo. La matematica è la lingua che occorre conoscere per decifrarla.

Einstein platonista?

In effetti è sempre difficile e pericoloso associare un grande scienziato a questa o quella corrente filosofica. Per es. sembrerebbe naturale definire Einstein (anche lui) platonista, se si guarda ai brani che seguono.

La fede in un mondo esterno, indipendente dal soggetto che percepisce, è il fondamento di tutta la scienza. Ma poiché le percezioni sensoriali ci informano soltanto indirettamente su questo mondo esterno, sulla realtà fisica, soltanto con la speculazione essa ci può diventare comprensibile.

La nostra esperienza finora ci conforta a credere che la natura sia la realizzazione delle idee matematiche più semplici che si possano concepire. Io sono convinto che, per mezzo di costruzioni puramente matematiche, si possano scoprire i concetti e le leggi che li collegano l'un con l'altro, che costituiscono la chiave per la comprensione dei fenomeni naturali. L'esperienza può suggerire i concetti matematici appropriati, i quali però non si possono certissimamente dedurre da essa. L'esperienza resta, naturalmente, il solo criterio dell'utilità fisica di una costruzione matematica. Ma i principi creativi risiedono nella matematica. In un certo senso, io tengo per vero che il pensiero puro possa afferrare la realtà, come sognavano gli antichi.

Però Einstein ha anche scritto:

Il pensiero puramente logico non può darci alcuna conoscenza del mondo empirico; ogni conoscenza della realtà parte dall'esperienza e termina in essa. Le proposizioni ottenute con mezzi puramente logici sono completamente vuote per ciò che riguarda la realtà.

Poiché fu Galileo a capirlo, e poiché, soprattutto, riuscì a imporlo al mondo scientifico, egli è il padre della fisica moderna; anzi, di tutta la scienza moderna.

Chiunque abbia veramente approfondito la materia non potrà negare che, in pratica, il mondo dei fenomeni determina in modo univoco il sistema teorico, anche se non c'è nessun ponte logico tra i fenomeni e i loro principi teorici.

Le nostre nozioni sulla realtà fisica non possono mai essere definitive. Dobbiamo sempre esser pronti a cambiare queste nozioni — cioè la sottostruttura assiomatica della fisica — per render conto dei fatti percepiti nel modo logicamente più perfetto possibile. Ed effettivamente uno sguardo allo sviluppo della fisica dimostra che essa ha subito cambiamenti di enorme importanza, nel corso del tempo.

Dopo Galileo

Dopo Galileo, per tutto il '600 e il '700, ha luogo un grandioso sviluppo della fisica che si serve potentemente dello strumento matematico. Il personaggio che meglio rappresenta questo aspetto è probabilmente *Eulero* (1707–1783).

Eulero è unanimemente considerato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, e certo il maggiore del 18-mo secolo. Eppure non è stato meno fisico che matematico. Basti pensare che su 73 volumi del suo "opera omnia," i temi a carattere fisico ne contano almeno 40, se includiamo meccanica e astronomia.

Si può dire che con Eulero nasce la fisica matematica, ma meglio sarebbe dire la *fisica teorica*. Eulero si serve di tutta la matematica che conosce (o che inventa) anche per la risoluzione di problemi strettamente fisici. Costruisce quindi una fisica solidamente fondata su basi matematiche, ma (com'è caratteristico di tutta la sua opera) *senza* la minima preoccupazione di *rigore*: quello che conta è arrivare ai risultati.

Forse per questo, ci sono fisici che guardano a Eulero con una certa nostalgia: come al rappresentante, anzi al modello, di una matematica assai più vicina al modo di pensare e alle esigenze dei fisici che non quella dell'ultimo secolo.

La visione pragmatista

Si tratta di una visione propria oggi di molti fisici, specialmente sperimentali, ma che è per più aspetti condivisibile anche da un teorico.

La matematica è un utile *strumento*, da impiegare quando ve ne sia la necessità, ma non è la fisica, che usa altre categorie concettuali, altri metodi, altri fondamenti epistemologici. Non solo: è bene "confinare" l'impiego della matematica, per evitare che le idee e i procedimenti fisici vengano assoggettati all'invadenza del formalismo, e peggio ancora, alla supposizione che la verità fisica possa essere "dedotta" per via matematica, come sostengono i platonisti.

Accade però che la concezione della matematica come "strumento" venga a volte immiserita, fino al punto di vederla solo come "quella cosa che serve per fare i conti": un semplice insieme di procedure pratiche per risolvere problemi e descrivere relazioni. Perdendo così di vista che la matematica è molto di più che "conti": ha un aspetto *strutturale*, che non è meno importante per il suo impiego in fisica. Ma su questo punto ritorneremo più avanti.

È interessante osservare che la polemica sull'invadenza del formalismo matematico è tutt'altro che recente, essendosi manifestata fin dai primi sviluppi della fisica teorica, come mostra ad es. la seguente citazione:

I matematici sono inoltre infestati da una presunzione arrogante, ovvero da una incurabile petulanza, poiché, credendosi in possesso di una certezza dimostrativa per quanto riguarda gli oggetti della loro scienza particolare, essi persuadono se stessi di possedere, in modo analogo, una conoscenza di molte delle cose che stanno al di là della sfera della loro scienza.

Colpisce scoprire che queste sono parole di W.R. Hamilton (1836): quello stesso Hamilton che noi oggi conosciamo come inventore dei quaternioni e come uno dei fondatori della meccanica analitica, e siamo portati a considerare più matematico che fisico.

Matematica e fisica nell'800

Lungo tutto il 19-mo secolo avviene un progressivo distacco della matematica dalla fisica. Parallelamente si svolge una continua e accesa discussione sul significato della matematica per i fisici, di cui la citazione di Hamilton è un esempio. Praticamente tutti i grandi fisici del tempo partecipano alla discussione.

La scuola empirista di radice inglese sostiene la necessità di non usare la matematica se non come *strumento*, senza mai pretendere che possa essere fonte di conoscenza per il mondo fisico.

Per esempio, Tait (1886) accusa Boltzmann di sostituire la matematica al pensiero, di nascondere i ragionamenti dietro "terrific arrays of symbols." Come sappiamo, l'accusato è colui che difende la realtà degli atomi, e si è proposto l'obbiettivo di spiegare la termodinamica su basi meccaniche: ciò che noi oggi consideriamo un genuino problema fisico.

Dietro le critiche di Tait (e Kelvin) a Boltzmann c'è una diversa idea sulla natura degli atomi. Per Boltzmann sono palline rigide, quella che Kelvin chiama "monstrous assumption of infinitely strong and infinitely rigid pieces of matter." Per Kelvin invece "tutti i corpi sono composti di atomi-vortici in un liquido perfetto e omogeneo."

Il programma di ricerca di Kelvin risulterà perdente, ma va qui notato che quanto all'uso della matematica gli atomi-vortici non erano certo più semplici delle palline di Boltzmann. La controversia stava in quale dovesse essere la *sorgente delle idee* per il fisico teorico: per Kelvin (come poi anche per Mach) le palline di Boltzmann sono pure fantasie, mentre i vortici sono osservabili su scala macroscopica, in esperimenti reali.

Oggi possiamo dire che la posizione di Boltzmann appare più moderna, anticipa il successivo sviluppo della fisica teorica. Non occorre che alla base di una teoria ci siano oggetti direttamente osservabili; ciò che conta è che dalla teoria sia possibile *dedurre previsioni* verificabili.

Geometria e realtà

Fino al primo '800 la matematica, in particolare la geometria, *descrive la realtà.* Poi comincia un progressivo distacco.

Gauss (1817):
Mi vado sempre più convincendo che la necessità della nostra geometria non può essere dimostrata; almeno non lo può dall'intelletto umano [...] *la geometria andrebbe quindi catalogata non con l'aritmetica, che è puramente aprioristica, ma con la meccanica.*

Qui si vede che Gauss comincia a prendere coscienza del fatto che la matematica è costruzione astratta, e non rispecchia necessariamente la realtà.

Riemann (1854):
Le proprietà che distinguono lo spazio dalle altre varietà tridimensionali concepibili, sono da dedursi esclusivamente dall'esperienza.

Riemann ha fatto un passo ulteriore: ha visto che sono possibili infinite geometrie (anche in più di 3 dimensioni) e distingue chiaramente la creazione di un ente matematico dal modello matematico della realtà fenomenica.

Lentamente la matematica acquista la posizione che oggi conosciamo, di costruzione *ipotetico-deduttiva*, del tutto *autonoma* rispetto alla realtà. In parallelo, avanza la specializzazione: i matematici cominciano a non interessarsi più troppo alla fisica (con importanti eccezioni, come per es. Poincaré) e i fisici perdono contatto con le parti più avanzate della matematica.

... *l'animo mi si è riempito di un grande rispetto per la matematica, la parte più sottile della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un puro lusso.*

Qui Einstein in una lettera del 1912 a Sommerfeld si riferisce al "calcolo differenziale assoluto" di Ricci Curbastro e Levi-Civita, al quale era stato iniziato da Grossmann e che sarebbe stato strumento decisivo per la sua "teoria generale della relatività."

L'evoluzione continua nel 20-mo secolo, attraverso un sempre più avanzato processo di *astrazione*, di cui riparleremo.

La "irragionevole efficacia"

Questo progressivo distacco e astrazione, cui abbiamo appena accennato, fa sorgere un problema, che Wigner presenta nel titolo di un suo famoso scritto:
The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences (l'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze della natura).

Ovvero: come e perché la matematica riesce a spiegare il mondo reale? (A quanto mi riesce di capire, Wigner non dà una risposta.) Lo stesso problema viene posto da Einstein al modo seguente:
Com'è possibile che la matematica, pur essendo dopo tutto un prodotto del pensiero umano, che è indipendente dall'esperienza, si adatti così mirabilmente agli oggetti della realtà?

Azzardo un tentativo di risposta: si può forse dire che la matematica è un "epifenomeno," o forse meglio una "proprietà emergente" dell'evoluzione del pensiero umano. In questo senso non è vero, almeno all'inizio, che essa sia "indipendente dall'esperienza," come ritiene Einstein.

Quanto alla sua efficacia, non ha forse niente di misterioso: dipende dalla sua estrema *flessibilità*. In larga misura si può dire che *qualunque sia il problema* o la situazione che abbiamo di fronte, esiste la possibilità di creare una *struttura matematica adeguata* al problema o alla situazione.

Un po' come (per quello che vale l'analogia) i calcolatori, pur essendo inizialmente nati per scopi assai limitati (assistere nel calcolo numerico) sono ormai strumenti veramente (non solo teoricamente, nel senso di Turing) *universali*, adatti a una larghissima varietà di applicazioni.

Alcuni esempi – 1. Il tempo newtoniano

Questo è un ottimo esempio iniziale, per esaminare il ruolo della matematica nella fisica classica. Infatti la matematizzazione del tempo nella fisica classica è così semplice (almeno in apparenza) che di solito non viene neppure rilevato che si tratta di un passo essenziale e ricco di conseguenze per la teoria. Inoltre la struttura matematica assunta per il tempo *non è direttamente imposta* (e forse neppure suggerita) dall'evidenza sperimentale.

La struttura matematica si riassume nell'asserzione che segue:

il modello matematico del tempo fisico è la retta reale.

Dobbiamo ora discutere il contenuto fisico di quest'asserzione.

Vediamo anzitutto in parole che cosa stiamo affermando. Con quella semplice proposizione abbiamo fatto in realtà parecchie ipotesi sulla natura fisica del tempo: stiamo dicendo che il tempo è

– assoluto
– unidimensionale
– non ramificato
– orientato
– non chiuso
– infinito in entrambi i sensi
– continuo

e probabilmente con ciò non abbiamo esaurito tutto il contenuto del tempo newtoniano.

Alcune delle proprietà enunciate non richiedono particolari commenti: è ben noto che cosa vuol dire che il tempo è unidimensionale, infinito, orientato. Ma la base sperimentale di tutte queste proprietà *non è ovvia*. Non voglio dire che ci sia qualcosa da mettere in discussione, ma solo che l'evidenza sperimentale è *tutt'altro che diretta*. (Anche se qualcosa viene realmente discussa: sto pensando al problema del *verso del tempo*, che non si può dire sia definitivamente risolto.) Di fatto è solo il *successo della teoria* che si sviluppa su queste basi, a garantire che le basi sono ragionevoli.

Dire che il tempo non è chiuso e non è ramificato può sembrare una banalità di cui non vale la pena discutere. Ma non si tratta qui di mettere in discussione la cosa: si vuole solo evidenziare *a*) che tutto ciò fa parte della struttura del tempo newtoniano

b) che più che di vere e proprie basi sperimentali, si dovrebbe parlare di *assunzioni filosofiche.*

Ci sono esempi di culture che hanno mantenuto (e forse in qualche caso mantengono ancor oggi) visioni diverse. Penso alla tradizione dell'"eterno ritorno" nel pensiero greco, e a certe filosofie orientali.

È vero che non abbiamo alcuna prova in favore, poniamo, di un tempo ciclico, ma è altrettanto vero che *non ci sono* vere e proprie prove in contrario. Al più possiamo dire che la visione newtoniana rispecchia *in modo adeguato* le nostre conoscenze sperimentali (che però al livello cosmologico sono ancora piuttosto scarse).

Il tempo continuo

La caratteristica matematica al tempo stesso più "evidente" e meno verificabile sperimentalmente è la *continuità* del tempo: la sua rappresentazione sulla retta *reale*, anziché ad es. sulla retta *razionale.*

Dal puro lato sperimentale non ci sarebbe alcun bisogno di numeri reali per descrivere il tempo. Dato che anche l'insieme dei razionali è *denso*, coi soli razionali potremmo costruire intervalli piccoli a piacere, e ne avremmo comunque in abbondanza rispetto a qualunque esperimento, che ha sempre un margine d'incertezza nelle misure. Allora *perché* usare i reali? La necessità di ricorrere ai reali nasce da un'esigenza *teorica*: già la meccanica galileiana ha bisogno dei reali.

La semplice legge di caduta dei gravi ci dimostra che *i razionali non bastano*: posto

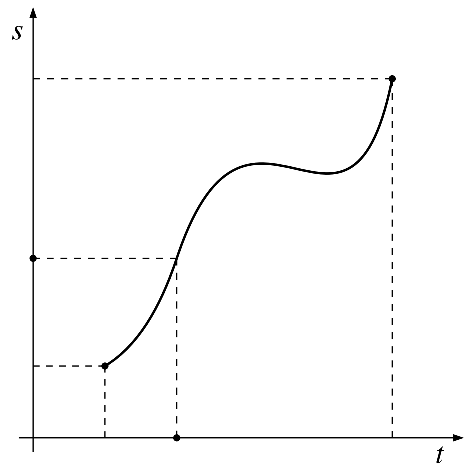
$$s = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

se vogliamo che per qualunque s esista una soluzione t dobbiamo operare in un insieme numerico nel quale sia sempre possibile estrarre la radice quadrata.

Già Galileo è consapevole del problema e dell'esigenza della continuità: in più occasioni ad es. scrive che un grave che parte dalla quiete "passa per infiniti gradi di velocità." Ossia che comunque scelta una velocità, esiste un t al quale il grave ha quella velocità; e lo stesso vale per lo spazio percorso.

Ovviamente Galileo non dispone dei concetti dell'analisi dell'800: la sua soluzione è di ricorrere alla *rappresentazione geometrica*, in quanto la retta euclidea costituisce un *modello* completo della retta reale. Quindi il continuo ricorso che Galileo fa nei *Discorsi* a dimostrazioni geometriche non è che la forma che assume, nella sua situazione storica, l'esigenza teorica che si diceva.

Oggi siamo più smaliziati, e sappiamo che *i reali risolvono completamente il problema* (e non solo per il moto uniformemente accelerato) grazie al *teorema della funzione continua.* Se si assume che lo spazio percorso sia funzione continua del tempo, siamo certi che in un dato intervallo potremo trovare almeno un istante al quale il corpo occupa una qualunque posizione compresa fra quelle assunte all'inizio e alla fine.



Riassumendo

La matematizzazione newtoniana del tempo racchiude in un solo concetto una quantità di proprietà *fisiche* del tempo, alcune delle quali sono *approssimativamente* ricavate dall'esperienza, ma altre vanno certamente al di là. Inoltre almeno la continuità è solo un'esigenza *interna* alla teoria, alla quale non corrisponde alcuna base sperimentale.

Più brevemente: la matematizzazione (e quindi la *teoria* fisica) è *indotta*, suggerita dall'esperienza, ma va oltre. Si noterà che questa è esattamente la posizione di Einstein che abbiamo citata sopra:

L'esperienza può suggerire i concetti matematici appropriati, i quali però non si possono certissimamente dedurre da essa.

Con ciò non stiamo dimenticando o sottovalutando il ruolo dell'esperienza: la teoria può e deve essere *messa alla prova*: non solo in quanto deve spiegare i fatti già noti, ma anche in quanto deve essere capace di *prevedere fatti nuovi*: che si tratti del pianeta Nettuno oppure del bosone di Higgs. È quello che si chiama il "potere predittivo" di una teoria.

Ancora Einstein:

L'esperienza resta, naturalmente, il solo criterio dell'utilità fisica di una costruzione matematica.

Alcuni esempi – 2. I vettori

Per illustrare meglio il ruolo che occupano in fisica le strutture matematiche astratte, ricorriamo a un altro esempio: quello dei *vettori.*

Il calcolo vettoriale ha origine agli inizi dell'800, e trova una prima sistemazione coi *quaternioni* di Hamilton. La più completa applicazione alla fisica è il *Treatise* di Maxwell (1873). Tuttavia i quaternioni non raggiunsero mai una grande popolarità, e anzi il loro impiego rese difficile la lettura dell'opera di Maxwell. Solo poco più di un secolo fa Gibbs sviluppò la notazione che ancor oggi prevale in tutta la fisica.

L'adozione del calcolo vettoriale non è stata però né unanime né rapida: ancora a metà dello scorso secolo, ad esempio, i principali testi di meccanica celeste non ne facevano uso.

Vettori e componenti

Ciò che interessa qui discutere è la relazione tra i vettori come oggetti matematici *astratti* — e tuttavia direttamente legati a enti fisici significativi — e la loro *rappresentazione cartesiana*, per mezzo di terne di numeri reali.

La situazione è in certo modo conflittuale. Da un lato è oggi accettato da tutti che un vettore è la descrizione matematica più naturale e *intrinseca* di una velocità o di una forza. (Col termine “intrinseca” intendo appunto che l'associazione ad es. tra una forza e un vettore è diretta, *indipendente* dall'adozione di un *sistema di coordinate*.) I vettori sono enti astratti, in quanto definiti dalle loro proprietà, a cominciare dalla legge di composizione (la “somma” vettoriale).

Dall'altro lato, non è affatto comune al livello della scuola secondaria superiore, e in certa misura anche al livello universitario, la capacità di *lavorare coi vettori* come strutture base *per calcoli pratici*, per la risoluzione di problemi concreti. Quasi sempre si tende, il più presto possibile, a *passare alle componenti.*

È probabile che nella mente di molti studenti un vettore venga pensato solo come un'abbreviazione per intendere la terna delle componenti cartesiane. Insomma, solo un modo economico per scrivere una sola equazione al posto di tre; ma sotto sotto si pensa che “in realtà” le equazioni sempre tre sono!

Vediamo un esempio assai semplice. Non credo di aver mai visto uno studente che al primo anno di università scriva spontaneamente la legge oraria del moto di un proiettile nella forma

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2.$$

Questa è più espressiva della forma cartesiana, perché mostra “a vista” che il moto risulta da quello per inerzia modificato dalla caduta in direzione verticale dovuta alla gravità.

Alcuni esempi – 3. Il concetto di stato in meccanica

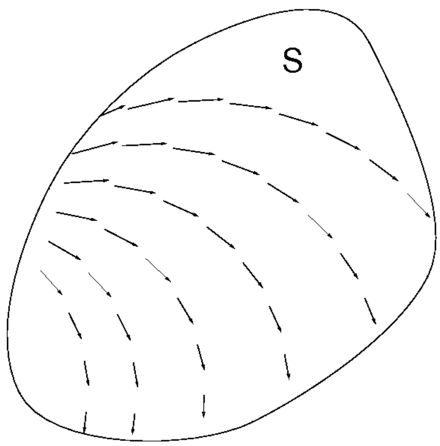
Quando nel corso del '700 la meccanica evolve da meccanica del punto a meccanica dei sistemi e dei corpi rigidi, si fa strada l'idea che le posizioni e le velocità delle parti che compongono un sistema fisico possono essere descritte in più modi, usando svariati *sistemi di coordinate.* Ciò riesce particolarmente utile per i sistemi vincolati, in quanto scegliendo coordinate “adattate” ai vincoli le equazioni del moto si semplificano.

È dunque possibile usare indifferentemente diverse coordinate, e scrivere le equazioni del moto in una stessa forma, usando un'unica funzione (la *lagrangiana*). Questa assume espressioni diverse a seconda delle coordinate, ma è *invariante in valore.*

Occorre tempo perché si arrivi a vedere che cosa ciò implica: la struttura matematica *più aderente alla realtà* fisica deve essere *più astratta*, svincolata da questo o quel sistema di coordinate. Ci si arriva compiutamente solo nel '900, quando lo spazio delle configurazioni viene visto come *varietà differenziabile.*

Il passo successivo nell'astrazione è legato alla questione del *determinismo.* Il moto è determinato dalla conoscenza (a un certo istante) di posizione e velocità di tutti i punti del sistema: queste informazioni si riassumono nell'idea di *stato*, espressa da q e $\dot{q}$ o da q e p nel formalismo hamiltoniano.

L'insieme degli stati possibili costituisce *lo spazio delle fasi* (anch'esso una varietà differenziabile). Lo *stato* di un sistema meccanico non è che un *punto* di tale varietà. Il *moto* del sistema è una *curva* nella varietà, parametrizzata dalla variabile *tempo.* La *dinamica* del sistema consiste nel sapere come evolve lo stato nel tempo a partire da un qualunque stato iniziale.



In forma differenziale ciò significa conoscere, per ogni punto dello spazio S delle fasi, la *velocità* del suo moto. L'insieme di queste velocità, date punto per punto, è un *campo di velocità.* Siamo così arrivati al *sistema dinamico* della meccanica moderna.

Riassumendo

Abbiamo visto che la corrispondenza più naturale tra il *sistema fisico* con le sue leggi da un lato, e la *descrizione matematica* dall'altro, si ottiene per mezzo di strutture matematiche relativamente astratte. Dove "relativamente" va inteso nel confronto con concetti ritenuti più "concreti," quali le coordinate cartesiane.

Quindi parlare di strutture matematiche astratte *non significa affatto allontanarsi dalla realtà fisica*, e neppure dall'intuizione di questa.

Fisica classica e matematica astratta

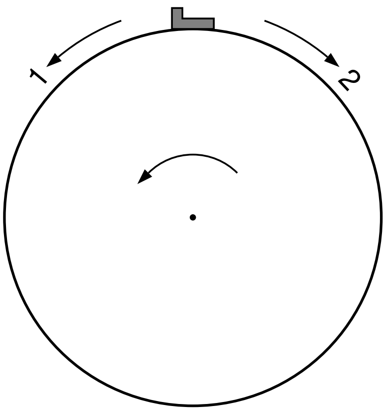
I pochi esempi che abbiamo visto hanno mostrato che strutture matematiche non banali e decisamente astratte sono necessarie già per la corretta descrizione della fisica classica. Tuttavia questa non è la tradizione didattica, a nessun livello scolastico.

Ritengo che la ragione sia essenzialmente storica (delle ragioni didattiche dirò qualcosa alla fine). È un fatto che la matematica necessaria è stata sviluppata quasi sempre dopo, quando la costruzione della teoria fisica aveva preso delle "scorciatoie," ricorrendo a strumenti matematici meno raffinati (e meno espressivi). Insomma, i fisici si sono abituati a "farne a meno," ad "arrangiarsi."

Purtroppo tale abitudine si è col tempo tramutata nella convinzione che la nostra maniera di fare sia la sola giusta, e che non ci sia niente da imparare. Il prezzo che si paga con tale pregiudizio sono le gravi difficoltà in cui ci s'imbatte quando si arriva alla fisica del 20-mo secolo.

Matematica e fisica moderna – Il tempo relativistico

Il processo di astrazione e l'impiego della matematica come peculiare strumento aumentano ancora con la cosiddetta "fisica moderna"; più precisamente, con la relatività da una parte, con la meccanica quantistica dall'altra.



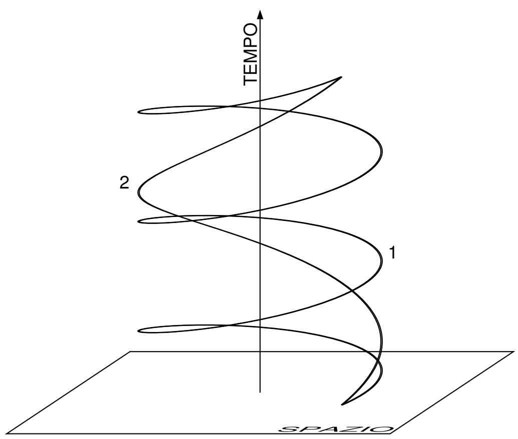
Qui dovrò limitarmi a pochissimi temi, e ne ho scelti due:

– il tempo relativistico

– il concetto di stato in meccanica quantistica.

Non c'è niente di meglio dell'esperimento di Hafele e Keating, ormai classico, per capire la struttura matematica del tempo relativistico. Due orologi reali (orologi atomici) girano intorno alla Terra in versi opposti: si osserva che se erano d'accordo alla partenza, all'arrivo quello che ha viaggiato *verso Est* è leggermente *indietro*.

Per comprendere ciò che accade bisogna mettersi in un riferimento inerziale (RI): si vede allora che sebbene i due orologi siano partiti e arrivati insieme, le loro linee orarie *non sono simmetriche*, a causa della rotazione terrestre. Rispetto al riferimento inerziale, quello che va verso Est ha una velocità *maggiore*: nella figura, fa tre giri mentre l'altro ne fa soltanto uno.



Lo spazio-tempo di Minkowski

La figura tenta di rappresentare lo *spazio-tempo* (che naturalmente ha 4 dimensioni). Ma soprattutto bisogna leggerci *i diversi tempi della relatività* (RR o RG, per questo aspetto non fa differenza).

Primo: lo spazio-tempo è una varietà 4-dimensionale, nella quale si possono introdurre (in infiniti modi) delle *coordinate*. Nell'ambito della RR esistono sistemi di coordinate (SC) privilegiati: quelli *associati* ai RI. In questi SC tre coordinate sono spaziali, e una rappresenta il *tempo del riferimento*: il tempo segnato da orologi fermi e opportunamente sincronizzati tra loro.

Secondo: lo spazio-tempo è dotato di una *metrica*, grazie alla quale a ogni curva si può attribuire una *lunghezza*. Quando la curva è la *linea oraria* di un corpo in moto qualsiasi, la sua lunghezza misura il tempo segnato da un orologio che accompagna il corpo (*tempo proprio*).

Ne segue:

a) che il tempo proprio in generale *differisce dal tempo del* RI

b) che se due corpi partono e arrivano insieme dagli stessi punti, ma seguendo traiettorie diverse o anche solo con leggi orarie diverse, i loro tempi propri *saranno* in generale *diversi*.

È appunto ciò che accade agli orologi sui due aerei nell'esperimento di Hafele e Keating.

Si vede bene che per capire la relatività occorre fare un'astrazione: lo spazio-tempo è in certo senso la vera realtà, ma è una realtà che *non si vede*, non è direttamente accessibile ai nostri sensi (e quindi anche alla *nostra logica* "spontanea"). Possiamo fare dei disegni, ma ciò che disegniamo non è lo spazio-tempo: sono delle rappresentazioni, delle carte geografiche. E come sappiamo, *le carte geografiche* sono in larga misura *arbitrarie*: per lo spazio-tempo come per la Terra.

Occorre dunque saper vedere *quello che c'è dietro* le carte; ma lo spazio-tempo può essere visto solo come *struttura matematica*. Ecco dunque la matematica come *strumento di pensiero*.

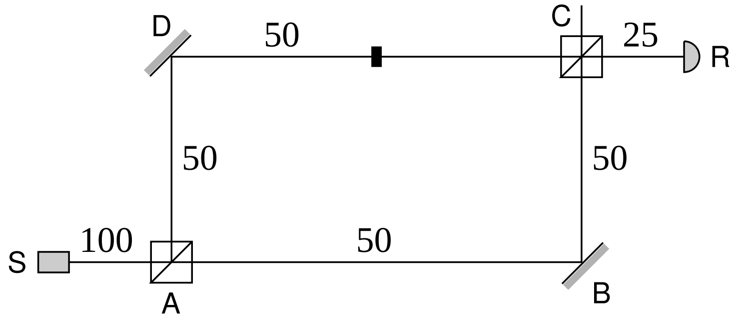
Noterella didattica

L'essenza fisica della relatività è contenuta nello spazio-tempo e nella sua metrica. Quindi è molto importante mettere in primo piano la geometria dello spazio-tempo e i suoi invarianti (la lunghezza, ossia il tempo proprio). Invece delle coordinate e delle loro trasformazioni, secondo una vecchia tradizione...

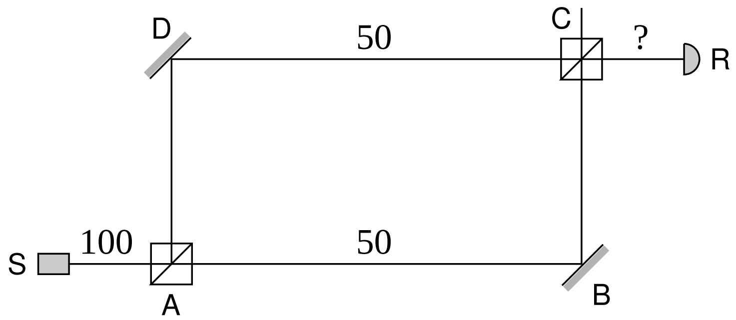
Matematica e fisica moderna – Il concetto di stato in meccanica quantistica

L'interferometro detto di Mach-Zehnder è un eccellente esempio per introdurre il concetto di stato quantistico. Ai due vertici opposti A e C di un rettangolo si trovano due specchi semiriflettenti ("divisori di fascio," o "beam splitter"); agli altri due vertici B e D ci sono invece due specchi normali. A sinistra di A nella figura è posta una sorgente di luce S monocromatica e ben collimata (per es. un laser) che possiamo attenuare quanto vogliamo. A destra di C c'è un rivelatore R (più esattamente un fotomoltiplicatore).

Per cominciare, ostruiamo il secondo percorso, inserendo uno schermo opaco nel tratto AB (oppure nel tratto DC). Vediamo allora che ogni 100 fotoni emessi da S solo 25 (ossia 1/4 del totale) raggiungono R. Se togliamo l'ostruzione sul percorso ADC, e chiudiamo ABC, il risultato è lo stesso.



Togliamo ora le ostruzioni, in modo che i fotoni abbiano libere entrambe le strade, e proviamo a prevedere il risultato.



Il ragionamento da fare sembra del tutto naturale ("logico"): i 50 fotoni che vengono riflessi da A arrivano a C da sinistra, e per metà, ossia 25, attraversano C. Gli altri 50 passano per B e raggiungono C dal disotto: di questi, metà vengono riflessi verso R. Poiché $25 + 25 = 50$, questa è la nostra previsione.

Eseguiamo la misura: troveremo un qualsiasi numero di fotoni fra 0 e 100. (Ne troveremo 100 nel caso ideale di rettangolo perfetto.) Insomma, il conteggio dei fotoni *non è additivo.* Come possiamo uscirne?

Soluzione del paradosso

Abbiamo qui un caso paradigmatico in cui la nostra logica "naturale" cade in difetto in modo plateale: qui non si tratta davvero di piccoli effetti, ma di differenze grossolane. La soluzione è semplice se si prende l'atteggiamento giusto: *abbandonare le categorie mentali consuete*, e decidere di *costruire la struttura matematica adatta* alla situazione sperimentale, anziché cercare di destreggiarsi più o meno abilmente con giochi di parole tipo il "dualismo onda–corpuscolo."

Ecco che cosa ne dice Feynman, col suo tipico stile irriverente:

Per un certo periodo di tempo bisognava essere bravi: per poter dire se la luce consisteva di onde o di particelle, occorreva sapere quale esperimento si stesse analizzando.

Questo stato di cose confuso prese il nome di "dualismo onda–corpuscolo," e qualcuno inventò la battuta che la luce era fatta di onde il lunedì, mercoledì e venerdì, di particelle il martedì, giovedì e sabato; la domenica, ci si pensava sopra!

Dobbiamo rinunciare a pensare i fotoni come *particelle nel senso della fisica classica* (ossia descrivibili con una posizione, una velocità, una traiettoria, ecc.). In particolare, dobbiamo abbandonare l'idea che lo *stato* di un fotone sia individuato da *posizione e velocità*, come se fosse una palla da tennis: dobbiamo inventare una *diversa definizione di stato.*

Nel caso particolare del nostro esperimento tutto ciò che occorre è scoprire che

a) lo *stato* di un fotone è descritto da *uno o più numeri complessi*, tradizionalmente chiamati *ampiezze*: uno per ciascuna strada che il fotone ha libera per giungere al rivelatore.

b) la *fase* di questo numero complesso varia in proporzione al *cammino percorso* (il tratto in cui la fase varia di 2π è la definizione operativa di "lunghezza d'onda").

c) le ampiezze *si sommano* (*principio di sovrapposizione*)

d) la *probabilità* di rivelare un fotone è data dal *quadrato del modulo* dell'ampiezza risultante.

L'apparato matematico della meccanica quantistica

È noto che una trattazione completa della m.q., adatta a tutti i casi che possono interessare, fa uso di un apparato matematico ben più complesso. Ma a noi importa sottolineare il *cambiamento di paradigma*, che è apparso nel caso semplice dell'interferometro e si mantiene nella trattazione generale. Tale cambiamento è *pensabile* solo grazie all'impiego di una struttura matematica astratta e sofisticata, che però ha *diretta connessione* con gli enti osservabili:

– La ridefinizione dello stato come *vettore* o meglio *raggio* in uno spazio di Hilbert sui complessi.

– Il carattere *lineare* della teoria (principio di sovrapposizione) che produce un'idea nuova, inesistente nella fisica classica: stati che si *sovrappongono e interferiscono.*

– Il determinismo classico, trasformato nell'*evoluzione* (unitaria) del *vettore di stato.*

Un commento filosofico (per quanto ne sono capace)

È ragionevole chiedersi: perché mai la relatività e ancor più la meccanica quantistica richiedono uno specifico "strumento di pensiero"? Che cosa c'è di diverso rispetto alla fisica precedente?

Intanto, non è del tutto vero che la situazione sia così diversa e nuova per la fisica moderna. Abbiamo già visto — proprio questo era lo scopo della prima parte del discorso — che anche nelle parti più elementari della fisica classica ci si trova in una situazione simile. Tuttavia una differenza esiste.

In primo luogo perché nella fisica moderna la matematica è molto più "invadente" (in senso tecnico: è presente molto più ampiamente e in evidenza). In secondo luogo, perché fin tanto che si resta nella fisica classica si può pensare che della matematica si possa fare a meno, o quanto meno si possa relegarla nel ruolo subordinato di strumento in senso spicciolo: quella che serve per "fare i conti." Che al resto si possa supplire con una qualche "intuizione fisica."

La spiegazione che mi sento di proporre parte da un'osservazione banale: la fisica moderna si occupa di cose *del tutto inaccessibili ai nostri sensi.* Consideriamo che anche i nostri modi di pensiero (razionale) ordinari si sono costruiti (evoluti), nel corso di migliaia di generazioni, sulla base *dell'interazione con la realtà* sensibile. Perciò non è strano che essi non siano adatti a guidarci quando proviamo ad andare *al di là* di quella.

Secondo la visione che cerco di proporre, *la matematica* è anch'essa un *frutto dell'evoluzione* del pensiero umano, che non trova la propria ragione di verità in un mondo trascendente, ed è caratterizzata dalla sua *estrema flessibilità* e ricchezza di strutture. Nei ragionamenti del fisico la matematica svolge un ruolo analogo a quello che gli strumenti svolgono per l'osservazione diretta: la metafora "strumento di pensiero" mi sembra appropriata a descrivere questa funzione.

Il problema didattico

Abbiamo visto che la fisica, specie da un secolo in qua, richiede l'uso di concetti matematici astratti. D'altra parte abbiamo anche ricordato, con diversi esempi, che questo processo di astrazione è stato tutt'altro che semplice e naturale, e che spesso ha richiesto decenni o secoli.

Ci si deve quindi chiedere: come si conquista l'astrazione? Il percorso che conosciamo dalla storia della scienza è inevitabile, con la sua lentezza e tortuosità, o ci sono alternative? È necessario arrivare all'astrazione per gradi, o esistono delle scorciatoie? Qui posso al più proporre qualche spunto di discussione e qualche ipotesi di lavoro.

Chiunque insegna conosce le molte difficoltà che ci si trova davanti a ogni passo. L'astrazione sembra un obbiettivo assai ambizioso, che ben raramente viene toccato al termine della scuola secondaria, e in genere neanche nei primi anni d'università. Credo però che almeno in parte queste difficoltà siano originate da due caratteristiche della comune pratica didattica.

Da un lato, l'insegnamento della matematica procede su concetti non soltanto astratti, ma *volutamente e totalmente svincolati* da qualunque richiamo alla *realtà concreta*, sia quella della fisica o altra. Così facendo, spesso si riduce la matematica a un *gioco del tutto formale*. Non si fa vedere il processo di astrazione nel suo nascere, e soprattutto non si crea l'abitudine a *muoversi sui due piani*:

– quello della *realtà fisica* da descrivere in termini matematici
– quello del *modello matematico* da interpretare con riferimento a oggetti concreti.

Dall'altro, l'insegnamento della fisica cerca di supplire alle difficoltà degli allievi nell'uso degli strumenti matematici, facendovi ricorso *il minimo possibile*. Si cerca di aggirare gli ostacoli trascurando di mettere in evidenza quel ruolo dello *strumento matematico*, di cui abbiamo ampiamente discusso.

L'ideale (estremistico) diventa una "fisica senza matematica."

Una "convergenza degli opposti"

Un aspetto paradossale è che si realizza una convergenza della visione *platonista* del matematico e di quella *pragmatista* del fisico. Entrambi finiscono per convincere i ragazzi che le strutture matematiche *sono realtà*.

I teoremi della geometria euclidea *sono* le proprietà dello spazio fisico. I numeri *esistono in sé*, ed è quindi naturale associarli alle misure, perché una grandezza *ha* un valore. Eccetera.

Occorre combattere questa tendenza, forse spontanea (?), a vedere le strutture matematiche come realtà. Bisogna portare gli allievi a convincersi che si tratta invece di *descrizioni* o *rappresentazioni* (tutt'altro che banali, ad es. perché fortemente *strutturate*!) che costituiscono il risultato del *lavoro* di comprensione teorica della realtà fisica.

Ovvio che un tale programma va perseguito con *estrema gradualità*. Si dovrebbe iniziare *preparando il terreno* nei casi più semplici, come quello del tempo. Anche in questo caso, tuttavia, sarebbe prematuro affrontare esplicitamente il problema dell'astrazione fin dall'inizio dello studio della cinematica: la maturità degli allievi non lo consente. Ne segue in modo naturale una proposta insolita rispetto alla stesura tradizionale dei "curricola": su alcuni argomenti sarebbe opportuno *ritornare*, in modo da approfondire aspetti che nella prima presentazione non potevano essere discussi.

Un'obiezione

Posso aspettarmi un'obiezione: estrema gradualità, ritornare per approfondire... Chi ce lo dà il tempo? Onestamente, non ho la risposta pronta. Ma se vogliamo che l'insegnamento scientifico (della fisica in particolare) lasci qualche traccia, il problema non può essere eluso: occorre studiare le possibili soluzioni, tenendo presenti insieme l'esigenza generale e le condizioni concrete dell'insegnamento. Non dovremmo mai dimenticarcene.

Bibliografia

Le citazioni di Einstein sono tratte da
F.S.C. Northrop: "La concezione della scienza di Einstein" in *Albert Einstein, scienziato e filosofo* a cura di P.A. Schilpp (Ed. Scientifiche Einaudi, 1958).

La citazione di Hamilton è a p. 61 di
E. Bellone: *Il mondo di carta* (Mondadori, 1976).

Le citazioni di Gauss e Riemann sono risp. a p. 195 e 220 di
C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman, 1973).

La citazione di Feynman è in
QED – The Strange Theory of Light and Matter, p. 23 (Princeton 1985).