Il libro e il suo linguaggio: la matematica nella fisica moderna*

E. Fabri

Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa

——— o ———

1. Tra l'empirismo e il platonismo

Quale sia il ruolo della matematica nella costruzione e nell'insegnamento della fisica, è un problema che ha fatto discutere a lungo, e ancora farà discutere in futuro. Senza la minima pretesa di completezza né di precisione, voglio qui ricordare solo alcune tesi estreme.

Si trova da un lato un atteggiamento che potrei definire empiristico: la matematica è un utile strumento, da impiegare quando ve ne sia la necessità, ma non è la fisica, che usa altre categorie concettuali, altri metodi, altri fondamenti epistemologici. Non solo: è bene "confinare" l'impiego della matematica, per evitare che le idee e i procedimenti fisici vengano assoggettati all'invadenza del formalismo, e peggio ancora, alla supposizione che la verità fisica possa essere "dedotta" per via matematica.

Si tratta di una posizione nella quale oggi si riconoscono molti fisici, specialmente sperimentali, ma che è per più aspetti condivisibile anche da un teorico. È interessante osservare che essa è tutt'altro che recente, essendosi manifestata insieme ai primi sviluppi della fisica teorica, come mostra ad es. la seguente citazione, tratta da [1]:

> "I matematici sono inoltre infestati da una presunzione arrogante, ovvero da una incurabile petulanza, poiché, credendosi in possesso di una certezza dimostrativa per quanto riguarda gli oggetti della loro scienza particolare, essi persuadono se stessi di possedere, in modo analogo, una conoscenza di molte delle cose che stanno al di là della sfera della loro scienza."

Colpisce scoprire che queste sono parole di William Rowan Hamilton (1836): quello stesso Hamilton che noi oggi conosciamo soprattutto come uno dei fondatori della meccanica analitica, e siamo portati a considerare più matematico che fisico.

*Relazione su invito al Congresso AIF, Porretta Terme, 26–10–95. Pubbl. in *La Fisica nella Scuola* **30** (1997), suppl. al n. 2, 139.

Oppure leggiamo l'accusa di P.G. Tait a Boltzmann (1886), nella descrizione che ce ne dà Bellone [2]:

> "Tu sostituisci la matematica al pensiero, e così tradisci la sana ricerca empirica: invece di servirti della matematica per aiutare il pensiero nell'indagine sulle cose, tu riduci le scienze fisiche a un vuoto gioco di simboli astratti e nascondi i ragionamenti dietro una barriera di 'terrificanti schiere di segni'."

Come sappiamo, l'accusato è colui che difende la realtà degli atomi, e si è proposto l'obbiettivo di spiegare la termodinamica su basi meccaniche: ciò che noi oggi consideriamo un genuino problema fisico. E non è un caso se anche chi non sa molto dell'opera di Boltzmann, ne conosce il nome almeno perché legato alla famosa costante, che in questo secolo ha giocato e gioca un ruolo determinante nello studio di un vasto spettro di fenomeni.

Dove la tesi empirista rischia di andare oltre il giusto, è però nel sottovalutare l'aspetto strutturale della matematica, che potrebbe essere ridotta a un semplice insieme di procedure pratiche per risolvere problemi e descrivere relazioni. Ma su questo punto ritorneremo più avanti.

All'altro estremo si pone la visione che possiamo con sicurezza definire platonista. Qui la matematica è vista come la via per cogliere la "vera" essenza delle cose, al di là delle apparenze offerte dai fenomeni. A questa corrente viene talora iscritto Galileo, a causa del famoso brano del *Saggiatore*:

> "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, e altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."

Ho detto che viene iscritto, implicando con ciò un personale dissenso, che si giustifica quando il brano venga citato per intero. Infatti le parole che ho riportato sopra sono precedute dalle seguenti:

> "... Parmi, oltre a ciò, di scorgere nel Sarsi ferma credenza, che nel filosofare sia necessario appoggiarsi all'opinioni di qualche celebre autore, sì che la mente nostra, quando non si maritasse col discorso d'un altro, ne dovesse in tutto rimanere sterile o infeconda; e forse stima che la filosofia sia un libro e la fantasia d'un uomo, come l'Iliade e l'Orlando Furioso, libri ne' quali la meno importante cosa è che quello che vi è scritto sia vero. Signor Sarsi, la cosa non istà così. La filosofia ..."

Da qui si vede che l'accento è in realtà sul fatto che la filosofia (intesa naturalmente come "filosofia naturale," ossia "scienza" nel linguaggio di oggi) non è fantasia d'un uomo, né si fonda sull'autorità, ma è scritta nel libro dell'universo. La matematica è la lingua che occorre conoscere per decifrarla.

Con qualche maggiore ragione si potrebbe definire platonista Einstein, se si guarda ad affermazioni come le seguenti [3]:

"Noi ci inchiniamo all'antica Grecia come alla culla della scienza occidentale. Qui per la prima volta il mondo ha visto il miracolo di un sistema logico che ha proceduto a passo a passo, con precisione tale che ognuna delle sue proposizioni, una volta dedotta, era assolutamente indubitabile; mi riferisco alla geometria di Euclide. Questo ammirevole trionfo della ragione diede all'intelletto umano la necessaria fiducia in se stesso per le sue ulteriori conquiste. Se Euclide non è riuscito a eccitare il vostro entusiasmo giovanile, non eravate nati per essere degli scienziati."

"La fede in un mondo esterno, indipendente dal soggetto che percepisce, è il fondamento di tutta la scienza. Ma poiché le percezioni sensoriali ci informano soltanto indirettamente su questo mondo esterno, sulla realtà fisica, soltanto con la speculazione essa ci può diventare comprensibile."

"La nostra esperienza finora ci conforta a credere che la natura sia la realizzazione delle idee matematiche più semplici che si possano concepire. Io sono convinto che, per mezzo di costruzioni puramente matematiche, si possano scoprire i concetti e le leggi che li collegano l'un con l'altro, che costituiscono la chiave per la comprensione dei fenomeni naturali. L'esperienza può suggerire i concetti matematici appropriati, i quali però non si possono certissimamente dedurre da essa. L'esperienza resta, naturalmente, il solo criterio dell'utilità fisica di una costruzione matematica. Ma i principi creativi risiedono nella matematica. In un certo senso, io tengo per vero che il pensiero puro possa afferrare la realtà, come sognavano gli antichi."

Però Einstein ha anche scritto:

"Il pensiero puramente logico non può darci alcuna conoscenza del mondo empirico; ogni conoscenza della realtà parte dall'esperienza e termina in essa. Le proposizioni ottenute con mezzi puramente logici sono completamente vuote per ciò che riguarda la realtà. Poiché fu Galileo a capirlo, e poiché, soprattutto, riuscì a imporlo al mondo scientifico, egli è il padre della fisica moderna; anzi, di tutta la scienza moderna."

"Chiunque abbia veramente approfondito la materia non potrà negare che, in pratica, il mondo dei fenomeni determina in modo univoco il sistema teorico, anche se non c'è nessun ponte logico tra i fenomeni e i loro principi teorici."

> "Le nostre nozioni sulla realtà fisica non possono mai essere definitive. Dobbiamo sempre esser pronti a cambiare queste nozioni — cioè la sottostruttura assiomatica della fisica — per render conto dei fatti percepiti nel modo logicamente più perfetto possibile. Ed effettivamente uno sguardo allo sviluppo della fisica dimostra che essa ha subito cambiamenti di enorme importanza, nel corso del tempo."

Un altro fisico teorico che successivamente ad Einstein si è espresso in favore di una concezione platonica è P.A.M. Dirac, ossia colui che su basi puramente teoriche ha previsto l'esistenza delle antiparticelle, per le quali al suo tempo non c'erano né indizi sperimentali né alcuna motivazione in altre parti della teoria. E probabilmente non è un caso se dichiarazioni a difesa del potere creativo della matematica vengono dagli autori di grandi scoperte nate appunto su una pura base "speculativa," per usare il termine di Einstein.

Ma su Dirac dovremo tornare per un altro aspetto, che tocca più da vicino il tema del nostro discorso.

Quanto alla tesi platonista in generale, essa ha anche un certo numero di sostenitori nell'ambito didattico: vi è infatti chi sostiene che un approccio ai concetti fisici su base che si vuol supporre empirica sia in realtà una mistificazione o una grossolana semplificazione, e che il solo modo per presentare correttamente la struttura della fisica sia un approccio assiomatico; la verifica della corrispondenza con l'esperienza essendo rinviata a un secondo momento.

Come forse sarà già apparso chiaro, chi scrive non condivide nessuna delle due tesi estreme, neppure (o meglio: tanto meno) nella loro applicazione didattica. La tesi che vogliamo qui sostenere è che la matematica non è né un semplice strumento pratico per la fisica, né il suo fondamento costitutivo; essa è però un indispensabile *strumento di pensiero*, nel senso che la fisica non si riduce in nessun senso alla matematica, ma questa è necessaria — nella sua struttura più genuina — per costruire il discorso fisico: in tre parole, per *pensare la fisica.*

Vedremo che ciò è vero già per la fisica classica, ma si mostra in tutta la sua evidenza quando si passa alla fisica di questo secolo.

Prima di chiudere questa sezione introduttiva mi sembra opportuno segnalare l'esistenza di un'altra visione del rapporto tra matematica e fisica, che senza nessun intento denigratorio potrei definire nostalgica. Si tratta di questo: il rapporto tra matematica e fisica si è profondamente alterato nell'800, quando le due scienze hanno preso a camminare per strade nettamente divergenti. Fino allora fisica e matematica erano spesso opera delle stesse persone, e i matematici erano molto più attenti agli aspetti concreti, anche applicativi. Il nome più caratteristico di tale periodo è quello di Eulero; ma anche Gauss, del quale riparleremo più avanti, vi si può iscrivere senza sforzo. La posizione nostalgica si richiama a quell'epoca felice del rapporto fisica-matematica, e vorrebbe ripristinarlo; anche a costo di "ricostruire" la matematica, che ha — secondo questa visione — "tralignato" dal suo giusto cammino. I continuatori di Eulero non sono infatti, per chi la pensa così, i matematici odierni, ma i fisici teorici. Un corollario estremo di questa tesi è che la matematica agli studenti di fisica non dovrebbe essere insegnata da matematici, ma da fisici.

Non nego che anche il punto di vista nostalgico abbia dalla sua parte alcune valide ragioni, ma lo ritengo poco realistico. Che ci piaccia o no, la storia della scienza ha preso un'altra strada, e non potremmo oggi rifarla secondo i nostri desideri. Ricreare una matematica alternativa, più vicina alla fisica, può essere un affascinante programma di ricerca: resta da vedere dove sia, alla soglia del 21-mo secolo, il nuovo Eulero capace di tanto.

2. Il tempo newtoniano

Per discutere il ruolo della matematica nella fisica classica, il primo esempio che prenderemo in esame è il tempo della meccanica newtoniana. La ragione della scelta è che la matematizzazione del tempo nella fisica classica è così semplice (almeno apparentemente) che di solito non viene neppure rilevato che si tratta comunque di un passo essenziale e ricco di conseguenze per la teoria. E che, in ogni caso, nella struttura matematica assunta per il tempo non c'è niente di autoevidente e tanto meno di necessario. La struttura matematica è semplice, come abbiamo detto, e si riassume nell'asserzione che il tempo fisico è isomorfo (o meglio omeomorfo) alla *retta reale*. Dobbiamo ora discutere il contenuto fisico di questa asserzione.

Vediamo anzitutto in parole che cosa stiamo affermando. Con quella semplice proposizione abbiamo fatto in realtà parecchie ipotesi sulla natura fisica del tempo: stiamo dicendo che il tempo è

- unidimensionale
- illimitato
- infinito in entrambi i sensi
- non ramificato
- non chiuso
- orientato
- continuo
- assoluto

e probabilmente con ciò non abbiamo esaurito tutto il contenuto del tempo newtoniano.

Alcune delle proprietà enunciate non richiedono particolari commenti: è ben noto che cosa vuol dire che il tempo è unidimensionale, illimitato, infinito, orientato. Ci basterà solo rilevare come non sia del tutto ovvio che tutte queste proprietà abbiano una base sperimentale fuori discussione.

Dire che il tempo non è chiuso e non è ramificato può sembrare una banalità di cui non vale la pena discutere. Ma non si tratta qui di mettere in discussione la cosa: si vuole solo evidenziare che comunque noi stiamo asserendo tutto ciò, e che più che di vere e proprie basi sperimentali, si dovrebbe se mai parlare di assunzioni filosofiche. Tanto è vero che si possono trovare esempi di culture che hanno mantenuto (e forse in qualche caso mantengono ancor oggi) visioni diverse. Penso da un lato alla tradizione dell'"eterno ritorno" nel pensiero greco, dall'altro a certe filosofie orientali.

Il fatto che le culture che vedono il tempo in modo diverso siano culture pre- oppure a-scientifiche, non costituisce una vera obiezione: non è affatto detto che non si potrebbe dare a queste idee una forma scientifica. È naturalmente vero che non abbiamo alcuna prova in favore, poniamo, di un tempo ciclico, ma è altrettanto vero che non ci sono vere e proprie prove in contrario: al più possiamo dire che la visione newtoniana rispecchia in modo adeguato le nostre conoscenze sperimentali (salvo quando si arriva al livello cosmologico, cui accenneremo più avanti).

Ma forse la caratteristica matematica al tempo stesso più "evidente" eppure meno verificabile sperimentalmente è la *continuità* del tempo: in altre parole, la rappresentazione sulla retta reale, anziché ad es. sulla retta razionale.

È più che ovvio che dal puro lato sperimentale non ci sarebbe alcun bisogno di numeri reali per descrivere il tempo: dato che anche l'insieme dei razionali è denso, coi soli razionali potremmo costruire intervalli piccoli a piacere, e ne avremmo comunque in abbondanza rispetto a qualunque esperimento, che ha sempre un margine d'incertezza nelle misure.

In effetti la necessità di ricorrere ai reali è un'esigenza *teorica*: già la meccanica galileiana ha bisogno dei reali, come vedremo subito. La semplice legge di caduta dei gravi ci dimostra che i razionali non bastano: posto

$$s = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

si vede che se vogliamo che per qualunque s esista una soluzione t dobbiamo operare in un insieme numerico nel quale sia sempre possibile estrarre la radice quadrata.

È interessante osservare che già Galileo è consapevole del problema e dell'esigenza della continuità: in più occasioni ad es. scrive che un grave che parte dalla quiete "passa per infiniti gradi di velocità," ossia che comunque scelta una velocità, esiste un t al quale il grave ha quella velocità; e lo stesso dicasi per lo spazio percorso. Ovviamente Galileo non dispone dei concetti dell'analisi dell'800: la sua soluzione è di ricorrere alla rappresentazione geometrica, in quanto la retta euclidea, anche se in forma non assiomaticamente rigorosa (si ricordi che il punto debole dell'assiomatica euclidea è proprio nell'assenza dei postulati di ordine e di continuità) costituisce un modello completo della retta reale.

Quindi il continuo ricorso che Galileo fa nei *Discorsi* a dimostrazioni geometriche non è che la forma che assume, nella sua situazione storica, l'esigenza teorica che si diceva.

Oggi siamo più smaliziati, e sappiamo che i reali risolvono completamente il problema (e non solo per il moto uniformemente accelerato) grazie al *teorema della funzione continua*: se si assume che lo spazio percorso sia funzione continua del tempo, siamo certi che in un dato intervallo potremo trovare almeno un istante al quale il corpo occupa una qualunque posizione compresa fra quelle assunte all'inizio e alla fine (fig. 1).

Riassumendo: la matematizzazione newtoniana del tempo racchiude in un solo concetto una quantità di proprietà *fisiche* del tempo, alcune delle quali sono *approssimativamente* ricavate dall'esperienza, ma altre vanno certamente al di là. Inoltre almeno la continuità è solo un'esigenza *interna* alla teoria, alla quale non corrisponde alcuna base sperimentale. Più brevemente: la matematizzazione (e quindi la *teoria* fisica) è *indotta*, suggerita dall'esperienza, ma va oltre.

Si noterà che questa è esattamente la posizione di Einstein che abbiamo citata sopra.

Con ciò non stiamo dimenticando o sottovalutando il ruolo dell'esperienza: la teoria può e deve essere *messa alla prova*: non solo in quanto deve spiegare i fatti già noti, ma anche in quanto deve essere capace di *prevedere fatti nuovi*: che si tratti del pianeta Nettuno oppure del quark top. È quello che si chiama il "potere predittivo" di una teoria.

3. Lo spazio euclideo

Sul tema dello spazio sarò molto più breve, quanto meno per ragioni di economia generale; ma anche perché in parte dovrei ripetere cose già dette a proposito del tempo.

L'aspetto più interessante nel nostro contesto è la convinzione, che ha resistito fino alla fine del '700, che la struttura euclidea dello spazio fisico non fosse una possibilità fra altre, da scegliere in base all'esperienza, ma fosse invece l'unica possibile. Ciò in realtà era dovuto al fatto che anche nella pura matematica non si concepiva la possibilità logica di una geometria diversa, e insieme alla non chiara separazione fra l'arbitrarietà delle strutture matematiche e le proprietà del mondo fisico.

Solo a cavallo fra '700 e '800 si conquista la possibilità di geometrie alternative (non euclidee), ma per molto tempo permane la convinzione che si tratti comunque di costruzioni artificiose, senza rapporto con la realtà. Nel 1817 Gauss [4] scrive:

> "Mi vado sempre più convincendo che la necessità della nostra geometria non può essere dimostrata; almeno non lo può dall'intelletto uma-

no [...] la geometria andrebbe quindi catalogata non con l'aritmetica, che è puramente aprioristica, ma con la meccanica."

La convinzione di Gauss lo spinge a una verifica sperimentale: misura la somma degli angoli interni del triangolo formato dai raggi di luce che congiungono le cime di tre montagne, allo scopo di decidere sperimentalmente la validità della geometria euclidea. La misura conferma (entro gli errori) la geometria euclidea: sappiamo che per scoprire le deviazioni previste dalla relatività generale egli avrebbe dovuto disporre di strumenti irrealizzabili ancor oggi, per parecchi ordini di grandezza.

Nel 1854 finalmente Riemann afferma [5]:

"Le proprietà che distinguono lo spazio dalle altre varietà tridimensionali concepibili, sono da dedursi esclusivamente dall'esperienza."

aprendo così la strada al lavoro di Einstein, 60 anni dopo.

Sulla geometria non euclidea, e sul problema posto dalla relatività generale all'intuizione fisica, dovremo comunque tornare al momento opportuno.

4. Le prime astrazioni: la meccanica lagrangiana

Quando nel corso del '700 la meccanica evolve da meccanica del punto a meccanica dei sistemi e dei corpi rigidi (stimolata tra l'altro dallo sviluppo dell'industria, delle macchine utensili, dei motori termici) si fa strada lentamente l'idea che le posizioni e le velocità delle parti che compongono un sistema fisico possono essere descritte in più modi, usando svariati sistemi di coordinate. Ciò riesce particolarmente utile per i sistemi vincolati, in quanto scegliendo coordinate "adattate" ai vincoli, le equazioni del moto si semplificano.

Nasce così la meccanica analitica che oggi conosciamo, con le sue "coordinate lagrangiane" e con una descrizione generale delle leggi del moto non ristretta all'adozione delle originarie coordinate cartesiane, legate alla struttura dello spazio geometrico.

La possibilità di usare indifferentemente diverse coordinate, e di scrivere le equazioni del moto in una stessa forma, usando un'unica funzione (la lagrangiana) che assume espressioni diverse a seconda delle coordinate, ma è invariante in valore, suggerisce che dietro alla molteplicità delle coordinate possibili vi sia qualcosa di più profondo, e più direttamente aderente alla realtà fisica. Tuttavia questa conquista richiederà ancora parecchio tempo: una formulazione della meccanica per mezzo di una struttura matematica intrinseca si realizzerà soltanto in questo secolo, e possiamo dire che in realtà è tutt'altro che affermata anche nella tradizione didattica universitaria.

5. I vettori

Forse per illustrare meglio il punto conviene ricorrere a un altro esempio, connesso ma più semplice: quello dei *vettori*. Il calcolo vettoriale ha origine agli inizi dell'800, e trova una prima sistemazione coi *quaternioni* di Hamilton. La più completa applicazione alla fisica è il *Treatise* di Maxwell (1873). Tuttavia i quaternioni non raggiunsero mai una grande popolarità, e anzi il loro impiego rese difficile la lettura dell'opera di Maxwell. Solo un secolo fa Gibbs sviluppò la notazione che ancor oggi prevale in tutta la fisica. L'adozione del calcolo vettoriale non è stata però né unanime né rapida: ancora a metà di questo secolo, ad esempio, i principali testi di meccanica celeste non ne facevano uso.

Ma ciò che interessa qui discutere è la relazione tra i vettori come oggetti matematici astratti — e tuttavia direttamente legati a enti fisici significativi — e la loro rappresentazione cartesiana, per mezzo di terne di numeri reali.

Vogliamo sottolineare una situazione in certo modo conflittuale: da un lato è oggi accettato da tutti che un vettore è la descrizione matematica più naturale e *intrinseca* di una velocità o di una forza (dove col termine "intrinseca" intendo appunto che l'associazione ad es. tra una forza e un vettore è diretta, indipendente dall'adozione di un sistema di coordinate). I vettori sono enti astratti, in quanto definiti dalle loro proprietà, a cominciare dalla legge di composizione; tuttavia non è affatto comune al livello della scuola secondaria superiore, e in certa misura anche al livello universitario, la capacità di lavorare coi vettori come strutture base per calcoli pratici, per la risoluzione di problemi concreti. Quasi sempre si tende, il più presto possibile, a passare alle componenti.

E non è del tutto fuori luogo il dubbio che in realtà nella mente di molti studenti un vettore venga pensato solo come un'abbreviazione per intendere la terna delle componenti cartesiane. Insomma, è solo un modo economico per scrivere una sola equazione al posto di tre, ma sotto sotto si pensa che "in realtà" le equazioni sempre tre sono!

La possibilità di operare direttamente con vettori si basa naturalmente sul fatto che su di essi sono definite certe operazioni (somma, prodotto con uno scalare). Ma è proprio l'impiego diretto di queste operazioni che riesce difficile: si tende a interpretare la somma dei vettori come un'abbreviazione per "la somma a due a due delle componenti," e così via. Purtroppo spingono nella stessa direzione tanto l'insegnamento, che a volte per aiutare gli allievi insiste su questa presentazione, quanto l'uso del termine "vettore" nel linguaggio informatico per intendere esattamente una n-pla di numeri.

Facciamo qualche esempio assai semplice. Non credo di aver mai visto uno studente che al primo anno di università scriva spontaneamente la legge oraria del moto di un proiettile nella forma

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

(con ovvio significato dei simboli). Questa è più espressiva della forma cartesiana, perché mostra "a vista" che il moto risulta da quello per inerzia ($\vec{v}_0 t$) modificato dalla caduta in senso verticale dovuta alla gravità (fig. 2).

Secondo esempio: nel classico problema del piano inclinato la soluzione che tutti gli studenti (e credo tutti i testi) presentano consiste nello "scomporre" la forza di gravità nelle due componenti tangente e normale al piano; dicendo poi che la componente normale "è annullata (o compensata) dalla reazione del piano," per cui resta solo quella tangente, ecc. (fig. 3).

Un tale approccio è poco soddisfacente per due motivi: in primo luogo, la scomposizione non corrisponde a nessun fatto fisico reale; in secondo luogo, si attribuisce alla reazione vincolare la magica proprietà di annullare la componente normale.

Un ragionamento più soddisfacente procede come segue. Quando si poggia il corpo sul piano, la forza presente inizialmente è una sola: il peso. Perciò il corpo viene spinto contro il piano, e lo deforma. Ne segue una reazione del piano, in direzione normale, che cresce (fig. 4) fino a quando la forza risultante non fa più muovere il corpo contro il piano, ma solo in direzione tangenziale. Dunque la condizione di regime è tale che la risultante del peso e della reazione vincolare sia tangente al piano. Ne segue la fig. 5 per il diagramma delle forze, e da qui si ricavano le solite conclusioni.

Infine: può capitare, ancora al secondo anno di università, di trovare studenti che sebbene conoscano le operazioni fra vettori non sono in grado di farne uso a proposito di campi elettrici: evidentemente per loro i vettori sono oggetti della meccanica, e non si trasportano in modo naturale, come strutture matematiche, ad altre parti della fisica.

6. Il concetto di stato in meccanica

Come abbiamo ricordato sopra, la meccanica analitica (Lagrange) fa uso di coordinate arbitrarie. Non si arriva però per lungo tempo a riconoscere che cosa ciò implica: che la struttura matematica più aderente alla realtà fisica debba avere carattere più astratto, svincolato da questo o quel sistema di coordinate. Ci si arriva compiutamente solo in questo secolo, quando lo spazio delle configurazioni viene visto come *varietà differenziabile*.

Non è certo questa la sede per approfondire l'argomento. Mi limiterò a ricordare il punto essenziale: mentre una varietà differenziabile ammette (infiniti) sistemi di coordinate, tutte le sue proprietà geometriche sono definibili in modo *intrinseco*, ossia indipendente dalle coordinate.

Il passo successivo nell'astrazione è legato alla questione del *determinismo*. Il moto è determinato dalla conoscenza (a un certo istante) di posizione e velocità di tutti i punti del sistema: queste informazioni si riassumono nell'idea di *stato*, espressa da q e $\dot{q}$, o da q e p nel formalismo hamiltoniano. L'insieme degli stati possibili costituisce lo *spazio delle fasi* (anch'esso una varietà differenziabile). La dinamica del sistema consiste nel sapere come evolve lo stato nel tempo a partire da un qualunque stato iniziale: in forma differenziale ciò significa conoscere, per ogni punto dello spazio delle fasi, la *velocità* del suo moto. L'insieme di queste velocità, date punto per punto, è un *campo di velocità.* Siamo così arrivati al *sistema dinamico* della meccanica moderna (fig. 6).

Non è il caso di soffermarsi sul fatto che il ruolo particolare che hanno in meccanica hamiltoniana le coordinate canoniche nasconde ancora una volta una struttura astratta: la struttura *simplettica* dello spazio delle fasi. Al di là dei tecnicismi, ciò che ora conta è che la corrispondenza più naturale tra il sistema fisico con le sue leggi da un lato, e la descrizione matematica dall'altro, si ottiene in ogni caso per mezzo di strutture matematiche relativamente astratte: dove "relativamente" va inteso nel confronto con concetti ritenuti più "concreti," quali le coordinate cartesiane. Quindi parlare di strutture matematiche astratte non significa affatto allontanarsi dalla realtà fisica, e neppure dall'intuizione di questa.

Le considerazioni che abbiamo appena sviluppato ci saranno assai utili quando arriveremo a parlare della fisica moderna.

7. Stato e forme differenziali in termodinamica

La termodinamica è un altro campo della fisica classica dove una struttura matematica astratta si avvicina di più al significato fisico. Vediamo brevemente come si presenta la questione.

Lo stato di un sistema termodinamico è descritto dai parametri di stato (nell'esempio ovvio del gas, si scelgono di solito due fra le tre grandezze P, V, T). Lo stato del sistema *non è* l'insieme dei valori dei parametri: questi ne danno solo una delle possibili descrizioni. Ciò che conta è che in uno stato determinato tutte le possibili grandezze fisiche del sistema sono determinate. Da questo punto di vista, i parametri di stato non sono altro che *coordinate* sullo *spazio astratto* degli stati.

Di passaggio, si vede che non c'è nessuna differenza con le *funzioni di stato*: i parametri di stato sono particolari funzioni di stato. Ad es. nel caso del gas è altrettanto lecito assumere come parametri (coordinate) energia interna e volume, entropia e temperatura, entalpia e pressione, o qualunque altra coppia di funzioni indipendenti. Per un gas perfetto non sarebbe lecito usare temperatura ed energia interna, ma solo perché queste non sono indipendenti.

La distinzione tra parametri e funzioni non è quindi concettuale, ma se mai pratica, psicologica, storica: è certo più facile misurare la pressione che l'entropia, ecc. Inoltre pressione, volume e temperatura sono storicamente precedenti, e questo induce a considerarle più fondamentali. Ma dal punto di vista della struttura matematica non c'è differenza.

Qualcosa di nuovo si presenta invece appena si parla di *calore* e *lavoro.* Queste non sono funzioni di stato, come è ben noto, ma grandezze che misurano un trasferimento di energia, e quindi sono definite solo se si precisa la trasformazione di cui si tratta, anche se ci si limita alle trasformazioni reversibili (e qui non vogliamo andare oltre). Sappiamo che fra due stati sono possibili infinite trasformazioni, e le due grandezze calore e lavoro cambiano dall'una all'altra (mentre non cambia la loro somma, come c'insegna il primo principio).

Sappiamo anche che calore e lavoro sono grandezze *additive*, nel senso che il calore nella trasformazione dallo stato A allo stato B, sommato a quello nel passaggio da B a C, fornisce il calore totale fra A e C; e lo stesso vale per il lavoro.

La matematizzazione di tutto questo discorso è la seguente. In primo luogo, una trasformazione (reversibile) è una *curva* nello spazio degli stati. In secondo luogo, calore e lavoro sono *integrali* calcolati su quella curva. Integrali di che cosa? Dobbiamo limitarci qui a introdurre il termine, senza approfondire: si tratta di integrali di *forme differenziali*.

Le forme differenziali sono state introdotte in termodinamica da Carathéodory all'inizio di questo secolo, ma ancor oggi sono considerate un formalismo astruso; in buona parte perché la notazione tradizionale è pesante e legata all'impiego di un sistema di coordinate. Vedremo qualcosa di simile quando arriveremo a parlare di relatività.

Sappiamo che l'integrale di una forma differenziale dipende in generale dalla curva: dipende solo dagli estremi quando la forma è un differenziale *esatto*, ossia il differenziale di una funzione di stato. Con questo linguaggio, il secondo principio si esprime dicendo che il calore, che non è un differenziale esatto, lo diviene se si divide per la temperatura assoluta: si ottiene così infatti il differenziale dell'entropia.

8. Fisica classica e matematica astratta

Prima di passare alla parte principale del nostro discorso, spieghiamo lo scopo di questi esempi tratti dalla fisica classica. Cominciamo col dire che gli esempi avrebbero potuto essere moltiplicati senza difficoltà, e forse chi legge avrà notato l'assenza di un intero campo della fisica: l'elettromagnetismo. L'omissione non è casuale, anche se dolorosa: il fatto è che una discussione delle strutture matematiche che entrano in gioco nell'elettromagnetismo avrebbe richiesto la più gran parte di questa relazione. Piuttosto che darne un resoconto tanto superficiale da riuscire incomprensibile, ho preferito tacerne del tutto.

Coi nostri esempi si è voluto mostrare che strutture matematiche non banali e decisamente astratte sono necessarie già per la corretta descrizione della fisica classica. Tuttavia questa non è affatto la tradizione didattica, a nessun livello scolastico. La ragione di ciò è, a mio giudizio, essenzialmente storica. Questo non è accaduto perché la matematica necessaria è stata sviluppata quasi sempre dopo, quando la costruzione della teoria fisica aveva preso delle "scorciatoie," ricorrendo a strumenti matematici meno raffinati (e meno espressivi). Insomma, i fisici si sono abituati a "farne a meno," ad "arrangiarsi." Purtroppo tale abitudine si è col tempo tramutata nella convinzione che la nostra maniera di fare sia la sola giusta, e che non ci sia niente da imparare; il prezzo che si paga con tale pregiudizio sono le gravi difficoltà in cui ci s'imbatte quando si arriva alla fisica di questo secolo.

9. La relatività

Prima di affrontare il tema, ossia il ruolo della matematica nella relatività, è opportuno riassumere — assai schematicamente — la fisica dell'argomento.

La relatività viene solitamente riassunta in due slogan: "il tempo è relativo" e "massa ed energia sono equivalenti." Sono entrambi a dir poco mal formulati, ma non abbiamo qui il tempo per spiegare meglio questa valutazione; comunque a noi ora basterà occuparci del primo aspetto.

Per discutere del tempo relativistico conviene partire da pochi e semplici fatti sperimentali:

- l'esperimento dei mesoni μ
- l'esperimento di Hafele e Keating
- un esperimento di "redshift" gravitazionale, come quelli di Alley o di Briatore e Leschiutta

L'esperimento dei mesoni μ

È un esperimento ben conosciuto, descritto anche in un film PSSC [6]. Si basa sulla misura del numero di mesoni μ dei raggi cosmici, a livello del mare e ad alta quota. I due numeri sono diversi perché nel tragitto dall'alto verso il basso un certo numero di mesoni decadono e non vengono quindi rivelati al suolo (fig. 7). Poiché la probabilità del decadimento dipende dal tempo trascorso nel riferimento del mesone, la misura del numero di mesoni ci fornisce una misura indiretta del tempo in tale riferimento.

Ne segue che per ciò che a noi interessa l'esperimento può essere schematizzato così: un orologio (il mesone μ) percorre a grande velocità la verticale, da una certa altezza fino al livello del mare. Lo si confronta con un altro orologio, fermo in basso, e si constata che il primo segna un tempo molto minore.

S'intende che perché l'asserzione abbia senso occorre che i due orologi siano partiti insieme, cosa che si può ottenere inviando a entrambi un segnale radio emesso a metà altezza. La situazione è riassunta nella fig. 8.

L'esperimento di Hafele e Keating

Qui abbiamo due orologi reali (orologi atomici) che girano intorno alla Terra in versi opposti (fig. 9): si osserva che se erano d'accordo alla partenza, all'arrivo quello che ha viaggiato verso Est è leggermente indietro.

Per comprendere ciò che accade bisogna mettersi in un riferimento inerziale: si vede allora che sebbene i due orologi siano partiti e arrivati insieme, le loro linee orarie non sono simmetriche, a causa della rotazione terrestre. Rispetto al riferimento inerziale, quello che va verso Est ha una velocità maggiore e percorre quindi uno spazio maggiore (fig. 10).

L'esperimento di Alley (o quello di Briatore e Leschiutta)

Si confrontano ancora due orologi, ma situati ad altezze diverse e in quiete relativa. Il confronto si fa ancora una volta mediante segnali radio (fig. 11).

Si osserva che il tempo segnato dall'orologio che sta più in alto è più lungo dell'altro: il corrispondente diagramma degli eventi è mostrato in fig. 12.

N.B. In questo caso la rotazione terrestre ha influenza trascurabile.

I tre esperimenti hanno in comune il fatto di mettere in crisi il tempo assoluto newtoniano; è un po' meno semplice vedere con che cosa lo si debba rimpiazzare. La soluzione che discende dal lavoro di Einstein, grazie — per questo aspetto — al contributo essenziale di Minkowski, è la seguente: il tempo segnato da un orologio misura la "lunghezza" della sua linea oraria, vista come una curva nello spazio-tempo. Ciò implica in primo luogo di pensare allo spazio-tempo non più come una comoda associazione delle coordinate spaziali a quella temporale, ma piuttosto come una struttura fisica dotata di sue proprietà intrinseche. Infatti si riassume l'essenza (o almeno una parte) della relatività nella proposizione

lo spazio-tempo è una varietà (semi)-riemanniana

quindi è dotato di *metrica*, grazie alla quale a ogni curva si può attribuire una lunghezza.

Si vede bene da questi esempi che per capire la relatività occorre fare un'astrazione: lo spazio-tempo è in un certo senso la vera realtà, ma è una realtà che non si vede, non è direttamente accessibile ai nostri sensi (e quindi anche alla nostra logica "spontanea").

Si potrebbe obbiettare che dopo tutto abbiamo disegnato delle figure, e quelle si vedono; ma l'osservazione mette ancor meglio in evidenza la peculiarità della situazione. Infatti ciò che abbiamo disegnato non è lo spazio-tempo, ma delle sue rappresentazioni, delle *carte geografiche.* E come sappiamo, le carte geografiche della Terra sono in larga misura arbitrarie, per scala e modo di proiezione: la stessa cosa accade con le carte dello spazio-tempo. Occorre dunque saper vedere quello che c'è dietro le carte; ma mentre una carta geografica si riferisce alla superficie terrestre, che è lì, presente, visibile e tangibile, lo spazio-tempo può essere colto solo come struttura matematica: la varietà semi-riemanniana citata sopra.

Proprio perché l'essenza fisica della relatività è riassunta nello spazio-tempo e nella sua metrica, è poco consigliabile lasciare in primo piano (secondo la tradizione) le coordinate spazio-temporali e le loro leggi di trasformazione (le trasformazioni di Lorentz). È molto più importante mettere l'accento sulla geometria dello spazio-tempo, e sugli invarianti (la lunghezza, ossia il tempo proprio).

Altrimenti si rischia di frenare la comprensione della relatività, allo stesso modo di come ciò è accaduto negli esempi classici che abbiamo ricordato sopra.

Non abbiamo ancora affrontato esplicitamente la questione se questo spazio-tempo sia piatto o curvo, ma dopo tutto non fa molta differenza. Il punto essenziale è che per riuscire a pensare lo spazio-tempo (tanto più se curvo) occorre uno "strumento di pensiero": la matematica.

Comunque spazio curvo significa relatività generale, e qui c'imbattiamo in una specie di "tabù didattico," motivato da una supposta ineliminabile difficoltà matematica. Ora, senza voler far apparire per forza semplice ciò che semplice non è, bisogna dire che una buona parte della difficoltà tradizionalmente attribuita alla relatività generale deriva ancora una volta da un uso improprio della matematica, di nuovo giustificato storicamente dagli strumenti che erano disponibili ai tempi della nascita della teoria.

La relatività generale appare nell'immagine di molti fisici come un'orgia di simboli (ricordiamo Tait!), carichi di indici in alto e in basso, secondo la tradizione del calcolo tensoriale creato agli inizi di questo secolo. I tensori scritti nella notazione tradizionale, in termini di componenti, sono legati alla scelta del sistema di coordinate, sebbene la forma generale delle equazioni, e soprattutto le loro conseguenze fisiche, non debbano dipenderne. Anche in questo caso però si scopre che il significato fisico della teoria si coglie assai meglio ricorrendo a una formulazione più astratta, divenuta possibile, ormai da decenni, grazie al lavoro di matematici come Cartan.

10. Cosmologia e buchi neri

La necessità di uno strumento di pensiero in materia di relatività appare ben più evidente quando ci si porta verso le idee più rivoluzionarie che la relatività generale ha prodotto. Cominciamo con un breve cenno alla cosmologia.

Ci sono due idee della cosmologia nata dalla visione einsteiniana, che servono bene a illustrare il nostro assunto: l'espansione dell'Universo e la possibilità di un "inizio" (e anche di una "fine") del tempo.

L'espansione dell'Universo è assai difficile da comprendere senza la giusta preparazione matematica, ossia senza l'allenamento a pensare per idee astratte, sganciate dall'intuizione comune. Quando si presenta quest'idea a persone non allenate come dicevo, essa viene inevitabilmente interpretata in modo distorto: si finisce sempre per pensare all'Universo come a una specie di palla che si gonfia in uno spazio esteso e preesistente. Questo perché la palla è il solo modello che l'intuizione comune offre, e che abbia una vaga rassomiglianza con ciò che si sente dire.

Si tratta ovviamente di un'idea sbagliata, perché nella cosmologia relativistica l'Universo *è* lo spazio, non è *immerso nello* spazio. Abbiamo qui uno scostamento radicale dalla concezione kantiana: lo spazio come dato ineludibile di ogni nostra sistemazione concettuale dell'esperienza. Lo spazio dell'Universo di Einstein evolve e prende forma (estensione, curvatura) insieme alla materia: non è affatto "a priori" rispetto ad essa.

Ma a parte la filosofia, c'è un altro aspetto per cui la concezione intuitiva dello spazio cade in difetto. È la separazione fra spazio e tempo, che nello spazio-tempo della relatività generale non ha senso, o meglio non è ben definita e può essere pensata in infiniti modi. Sì che non ha neppure senso parlare di "spazio curvo": dovremo prima intenderci su come abbiamo definito lo spazio, e poi potremo verificare se sia piatto o curvo.

L'astrazione matematica risolve tutte queste difficoltà: poiché lo spazio-tempo è una varietà quadridimensionale, essa può essere "sezionata" (potrei dire "affettata") in infiniti modi mediante sottovarietà tridimensionali, che chiamiamo "spazio." Anche se lo spazio-tempo è piatto, le sezioni possono essere curve; e per quanto riesca paradossale all'intuizione, è vero anche il viceversa: esistono forme di spazio-tempo curvo che ammettono una famiglia di sezioni spaziali piatte!

Il fatto che l'Universo possa avere un'estensione temporale finita è ancora più stupefacente (ovvero più soddisfacente, a chi pensi di trovarci la conferma di una "creazione"). La domanda più ovvia, anche se raramente si ha il coraggio di formularla ad alta voce, è: "che cosa c'era *prima*?"

Di nuovo, senza un allenamento all'astrazione matematica riesce difficile accettare che la domanda non ha senso: si pensa inevitabilmente, per analogia, alla nascita di un essere vivente o magari alla costruzione di una casa: insomma a qualcosa che ha avuto inizio entro un tempo *preesistente* e soprattutto *indipendente dalla cosa.*

Ma non si tratta di questo: il tempo è *interno* all'Universo ed è definito solo nel quadro di una determinata struttura teorica (collegata coi dati di osservazione, si capisce). Non abbiamo il diritto di attribuirgli un'esistenza propria senza cadere nella metafisica.

Sebbene esca dal nostro tema, dobbiamo qui ricordare che il problema dell'inizio dell'Universo è tuttora aperto: non solo dal punto di vista di ciò che ci dicono le osservazioni, ma anche da quello teorico. Infatti la singolarità prevista dai modelli cosmologici è certamente in conflitto con i limiti di validità che una teoria non quantistica, come quella di Einstein, deve avere. In parole povere: la teoria prevede una singolarità, ma se c'è una singolarità la teoria non vale in quella condizione limite.

Quanto ai buchi neri, sappiamo tutti che si tratta di un altro aspetto sconcertante della relatività generale. La previsione teorica è del 1939 (Oppenheimer e Snyder) mentre il nome è dovuto a Wheeler. S'intende che la possibilità teorica non implica e tanto meno obbliga l'esistenza: ma oggi cominciano a esserci indicazioni (non le chiamerei ancora "prove") in favore della realtà di questi oggetti.

Purtroppo la divulgazione, spinta dall'indiscutibile fascino che su chiunque esercitano queste costruzioni del pensiero scientifico, si sbizzarrisce nel fornire presunte spiegazioni, sistematicamente inadeguate quando non platealmente false. D'altra parte la difficoltà è reale: capire un buco nero è ancor più difficile che capire un universo che inizia da una singolarità, si espande e forse si contrae di nuovo (o forse no: non sappiamo). Di nuovo, non c'è che far ricorso alla struttura matematica: perché in tal modo non si aggiungono arbitrarie associazioni derivanti da analogie improponibili, e perché è solo nel quadro di un modello matematico rigoroso che si possono definire i termini del discorso, e precisare i rapporti con ciò che si può sottoporre a osservazione. Ricordiamo ancora il *Saggiatore*:

> "... nelle dimostrazioni necessarie o indubitabilmente si conclude o inescusabilmente si paralogiza, senza lasciarsi campo di poter con limitazioni, con distinzioni, con istorcimenti di parole o con altre girandole sostenersi più in piede, ma è forza in brevi parole ed al primo assalto restare o Cesare o niente."

La matematica dunque anche come disciplina mentale.

11. Piccola parentesi filosofica

È ragionevole chiedersi: perché mai la relatività (e vedremo poi, ancor più la meccanica quantistica) richiede uno specifico strumento di pensiero? Che cosa c'è di diverso rispetto alla fisica precedente?

Tenterò qui di abbozzare una risposta, coi limiti che derivano non solo dal tempo disponibile, ma più ancora dal fatto che così facendo esco dal terreno delle mie competenze.

Va detto in primo luogo che non è del tutto vero che la situazione sia così diversa e nuova per la fisica moderna: abbiamo già visto — e anzi proprio questo era lo scopo della prima parte di questa relazione — che anche nei concetti più elementari della fisica classica è già presente una situazione simile. Tuttavia una differenza esiste: in primo luogo perché nella fisica moderna la matematica è molto più "invadente" (in senso tecnico: è presente molto più ampiamente e in evidenza). In secondo luogo, perché fin tanto che si resta nella fisica classica si può pensare che della matematica si possa fare a meno, o quanto meno si possa relegarla nel ruolo subordinato di strumento in senso spicciolo: quella che serve per "fare i conti."

La spiegazione che mi sento di proporre parte da un'osservazione banale: la fisica moderna si occupa di cose del tutto inaccessibili ai nostri sensi. Mentre la meccanica parla di corpi in moto e di forze, l'ottica studia la luce, l'elettromagnetismo indaga sul comportamento di calamite, pile, e altri congegni magari complessi ma tangibili, con la fisica di questo secolo entriamo da un lato nel mondo microscopico, dall'altro andiamo alla scala cosmica. Come si suole dire: "dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande." E anche quando si parla di fatti che sembrano appartenere all'esperienza comune, come il tempo o la gravità, ci si occupa in realtà di effetti assai sottili, che solo strumenti raffinatissimi possono rivelare.

Di qui segue un fatto assolutamente ovvio: per capire questo mondo abbiamo bisogno di strumenti di osservazione che vadano oltre le possibilità degli organi di senso. È vero che in qualsiasi campo della fisica facciamo uso di strumenti di misura per rendere oggettiva la nostra indagine; ma qui è la pura e semplice rivelazione della realtà di cui parliamo, ad aver luogo solo attraverso la mediazione degli strumenti.

Il fenomeno non è nuovo: comincia col cannocchiale di Galileo, e non è un caso se attorno alla "realtà" di ciò che il cannocchiale mostrava si accese il dibattito fra Galileo e buona parte dei filosofi a lui contemporanei. Non si trattava tanto di ottusità da parte di questi, quanto della loro riluttanza ad accettare che fosse possibile parlare di una realtà che solo lo strumento rendeva visibile. Per questo motivo, incidentalmente, è tutt'altro che semplice "mettersi nei panni" di quei filosofi al giorno d'oggi, quando l'uso di strumenti di ogni genere ha permeato non solo la scienza, ma la vita quotidiana. È quindi fin troppo facile condannarli: un esempio fra tanti di quanto sia problematico un serio approccio storico alla nostra scienza nell'insegnamento, perfino universitario.

Riflettiamo ora che anche i nostri modi di pensiero (razionale) ordinari si sono costruiti (evoluti), nel corso di migliaia di generazioni, sulla base dell'interazione con la realtà sensibile; non è strano perciò che essi non siano adatti a guidarci quando proviamo ad andare al di là di quella. La matematica svolge per questo verso un ruolo analogo a quello che gli strumenti svolgono per l'osservazione diretta: la metafora "strumento di pensiero" mi sembra appropriata a descrivere questa funzione.

Una precisazione è però necessaria, per evitare un possibile equivoco. Ciò dicendo, non voglio sostenere che la matematica, in qualche senso, sia capace di per sé di cogliere aspetti della realtà che al pensiero comune sfuggono: questa sarebbe un'altra forma del platonismo di cui s'è detto all'inizio. Secondo la visione che cerco di proporre, la matematica è anch'essa un frutto dell'evoluzione del pensiero umano, che non trova la propria ragione di verità in un mondo trascendente, ma solo nella sua estrema flessibilità e ricchezza di strutture.

Per fare un paragone inadeguato, che non va preso assolutamente alla lettera, ma coglie un certo aspetto della situazione: pensiamo alla differenza fra una calcolatrice meccanica di 50 anni fa (come quella che usavo ai tempi della mia tesi di laurea) e un calcolatore programmabile di oggi, anche il più semplice. Mentre quella calcolatrice poteva fare solo le operazioni per le quali era stata prevista, il computer odierno è una *macchina universale*.

Potremmo immaginare che l'evoluzione dall'una all'altro sia stata un semplice sviluppo graduale: un giorno qualcuno ha pensato che sarebbe riuscito assai più comodo se nella calcolatrice si fossero potute conservare anche le istruzioni del calcolo. Non era necessario che l'inventore fosse cosciente della portata rivoluzionaria di tale idea: il cambiamento di struttura della macchina implicava di per sé un salto di qualità nelle sue prestazioni.

Va detto che non si tratta di una pura fantasia: è vero che la teoria di Turing delle macchine universali ha preceduto storicamente la reale costruzione dei calcolatori "a programma interno" (come allora si chiamavano); ma è anche vero che questi si sono in effetti evoluti dalle macchine a schede perforate, che avevano un programma fisso ma modificabile alterando le connessioni sui pannelli di controllo. Poi è arrivato l'impiego dei tubi elettronici, come mezzo tecnico per aumentare le prestazioni; poi si è scoperto che la macchina poteva avere una *memoria di istruzioni*, e non solo di dati; infine (von Neumann) è stata concepita l'architettura del calcolatore come lo conosciamo oggi.

L'analogia sta in questo: come per i calcolatori, è accaduto al cervello umano che la sua evoluzione lo ha messo in grado di concepire delle strutture (la matematica) che sebbene nate per problemi concreti, si sono poi rese capaci di sviluppo autonomo e sono divenute strumento potentissimo per la comprensione di realtà non accessibili al pensiero comune.

12. Fotoni e interferenza

Anche parlando di meccanica quantistica dovremo ridurre al minimo l'estensione dell'argomento trattato. Ho ritenuto perciò opportuno concentrarmi su di un unico esempio, che illustra bene come la logica intuitiva (naturale) non sia in grado di spiegare i fenomeni, e occorra far ricorso a uno strumento diverso: tanto per cambiare, un'adeguata struttura matematica.

L'esempio che ho in mente s'illustra bene partendo dall'interferometro di Mach–Zehnder, rappresentato in fig. 13. Ai due vertici opposti A e C di un rettangolo si trovano due specchi semiriflettenti ("divisori di fascio," o "beam splitter"); agli altri due vertici B e D ci sono invece due specchi normali. A sinistra di A nella figura è posta una sorgente di luce S monocromatica e ben collimata (per es. un laser) che ci converrà supporre di poter attenuare quanto vogliamo. A destra di C c'è un rivelatore R (più esattamente un fotomoltiplicatore).

Dobbiamo ricordare che se la sorgente è sufficientemente debole il rivelatore è in grado di segnalare l'arrivo di singoli fotoni, e l'esperienza mostra che ciascun fotone si muove nell'apparato in modo del tutto indipendente dagli altri. Per analizzare l'esperimento possiamo quindi ridurci a studiare il comportamento di ogni fotone preso a sé. Il fatto che la sorgente emetta nel tempo molti fotoni verrà usato solo a scopi *statistici*: per valutare (ed eventualmente cercare di prevedere) quanti fotoni verranno rivelati da R.

Ragioniamo per semplicità riferendoci a 100 fotoni: tutti i risultati si riportano proporzionalmente a qualunque altro numero. Osserviamo inoltre che per arrivare in R un fotone può percorrere due strade: SABCR oppure SADCR. Per cominciare, ostruiamo il secondo percorso, inserendo uno schermo opaco nel tratto AD oppure nel tratto DC (fig. 14): scopriamo allora un fatto del tutto ovvio, ossia che dei 100 fotoni emessi da S solo 25 (ossia 1/4 del totale) raggiungono R. Se togliamo l'ostruzione sul secondo percorso, e chiudiamo il primo (fig. 15), il risultato è lo stesso.

Dicevo che si tratta di un fatto ovvio, perché lo specchio A è semiriflettente, il che vuol dire che riflette metà dei fotoni e lascia passare gli altri; anche C si comporta allo stesso modo. Analizzando più in dettaglio l'andamento del fenomeno possiamo anche constatare che la selezione tra fotoni riflessi e trasmessi è casuale: non c'è nessuna ragione visibile perché un singolo fotone venga trasmesso o riflesso, ma si può solo dire che ciascun evento avviene con probabilità 1/2. Una conseguenza è che a rigore il numero 25 è vero solo *in media*, in quanto sono possibili *fluttuazioni statistiche*, che con numeri così piccoli sarebbero importanti. Quindi uno sperimentatore avveduto cercherà di operare con numeri più grandi, dotando il rivelatore di un contatore automatico veloce, in modo da raccogliere molti dati in poco tempo. Ma a noi, dal punto di vista teorico, ciò interessa poco.

Terminata la prima parte (preparatoria) dell'esperimento, inizia la seconda. Togliamo entrambe le ostruzioni, in modo che i fotoni abbiano libere entrambe le strade, e proviamo a prevedere il risultato. Il ragionamento sembra del tutto naturale: i 50 fotoni che vengono riflessi da A arrivano a C da sinistra, e per metà, ossia 25, attraversano C. Gli altri 50 passano per B e raggiungono C dal disotto: di questi, metà vengono riflessi verso R. Poiché $25 + 25 = 50$, questa è la nostra previsione (fig. 16).

Eseguiamo ora la misura, e — sorpresa! — troviamo 100 fotoni anziché 50.

A dire il vero, chiunque abbia una minima pratica di interferometri obbietterà che non è affatto vero che troverò 100 fotoni: se il montaggio è stato eseguito senza nessuna particolare precauzione potrà capitarmi di avere un qualsiasi numero di fotoni fra 0 e 100. L'obiezione è giusta, ma è anche irrilevante: ciò che conta è che solo in casi eccezionali troverò 50. Insomma, comunque si rigiri la questione, dal paradosso non si scappa: il conteggio dei fotoni *non è additivo*.

Sciogliamo subito l'arcano: da che dipende il fatto che il numero di fotoni può cambiare? La causa sta nell'impossibilità di costruire la geometria ideale (il rettangolo) che avevo descritta: poiché la lunghezza d'onda della luce del laser è molto piccola (inferiore al micron) una minima differenza nelle lunghezze dei lati basta a modificare radicalmente il risultato. Il numero 100 si otterrà se $AB + BC = AD + DC$: se questa condizione non è esattamente verificata il numero in generale riesce diverso.

Altra questione: nel ragionamento ingenuo mi sarei aspettato che i 50 fotoni che non arrivano in R venissero diretti verso l'alto: possiamo verificare questo fatto? Certamente: basta disporre un secondo rivelatore in R′ (fig. 17), e si scoprirà che la somma dei numeri contati dai due rivelatori è sempre 100: in particolare, se R conta 100 fotoni, R′ non ne conta nessuno! Il che è ancora più paradossale, perché è facile vedere che se uno dei due percorsi è ostruito in R′ arrivano 25 fotoni.

13. Il concetto di stato in meccanica quantistica

Ho scelto di soffermarmi un po' a lungo su questo esperimento classico, che potevo anche dare per noto, perché averlo ben presente aiuta a motivare ciò che segue. In primo luogo, ecco un caso paradigmatico in cui la nostra logica "naturale" cade in difetto in modo plateale: qui non si tratta davvero di piccoli effetti, ma di differenze grossolane. In secondo luogo, la soluzione è assai semplice se si prende l'atteggiamento giusto: abbandonare le categorie mentali consuete, e decidere di costruire la struttura matematica adatta alla situazione sperimentale, anziché cercare di destreggiarsi più o meno abilmente con giochi di parole tipo il "dualismo onda-corpuscolo."

Su questo punto, sentiamo Feynman [7]:

> "Per un certo periodo di tempo bisognava essere bravi: per poter dire se la luce consisteva di onde o di particelle, bisognava sapere quale esperimento si stesse analizzando. Questo stato di cose confuso prese il nome di 'dualismo onda-corpuscolo,' e qualcuno inventò la battuta che la luce era fatta di onde il lunedì, mercoledì e venerdì, di particelle il martedì, giovedì e sabato; la domenica, ci si pensava sopra!"

La soluzione è che dobbiamo rinunciare a pensare i fotoni come particelle nel senso della fisica classica (ossia descrivibili con una posizione, una velocità, una traiettoria, ecc.). In particolare, dobbiamo abbandonare l'idea che lo stato di un fotone sia individuato da posizione e velocità, come se fosse una palla da tennis: dobbiamo inventare (non noi, perché è già stato fatto!) una diversa definizione di stato.

Nel caso particolare del nostro esperimento, che è molto semplificato, tutto ciò che occorre è scoprire che lo stato di un fotone è descritto da uno o più numeri complessi, tradizionalmente chiamati *ampiezze*: uno per ciascuna strada che il fotone ha libera per giungere al rivelatore. Va poi precisato che la fase di questo numero complesso varia in proporzione al cammino percorso (il tratto in cui la fase varia di 2π è la definizione operativa di "lunghezza d'onda"); occorre infine aggiungere che *le ampiezze si sommano* (principio di sovrapposizione) e che la probabilità di rivelare un fotone è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza risultante.

Non possiamo qui permetterci di entrare in maggiori dettagli; per es. di dimostrare che in effetti queste ipotesi spiegano l'esito di tutte le possibili varianti dell'esperimento. La sola cosa che conta per il nostro discorso è che la comprensione del comportamento dei fotoni si ottiene attraverso una struttura matematica (lo stato come insieme di numeri complessi, ossia, detto tecnicamente, come elemento di uno *spazio vettoriale sul corpo complesso*) che sebbene indiscutibilmente astratta si connette in modo naturale e immediato con le grandezze osservabili.

Ecco cosa ci dice in proposito Dirac [8]:

> "L'equilibrato progresso della fisica richiede, per la formulazione teorica della fisica stessa, una matematica che divenga continuamente più avanzata. Il che è del tutto naturale, e rientra nell'ambito delle aspettative. Ciò che invece non rientrava nell'ambito delle aspettative dei ricercatori scientifici dello scorso secolo sta nella forma particolare che avrebbe preso la direttrice di avanzata della matematica; in effetti essi si aspettavano che la matematica sarebbe diventata sempre più complicata, restando tuttavia su una base permanente di assiomi e di definizioni, mentre, in realtà, i moderni sviluppi fisici hanno richiesto una matematica che continuamente sposta le proprie fondazioni e diventa sempre più astratta. La geometria non euclidea e l'algebra non commutativa, che un tempo erano considerate pure finzioni della mente e passatempi per pensatori dediti alla logica, si sono ora mostrate del tutto necessarie per la descrizione dei fatti generali del mondo fisico. È presumibile che questo processo di crescente astrazione continuerà nel futuro, e che il progresso in fisica debba essere associato a continue modificazioni e generalizzazioni degli assiomi che stanno alla base della matematica, piuttosto che a uno sviluppo logico di un qualche schema matematico su una fondazione fissa."

14. Considerazioni didattiche

La tesi che avevamo esposta all'inizio è ora sufficientemente sviluppata e precisata; resta solo da esaminarne le implicazioni didattiche.

Il primo problema che si presenta è il seguente: abbiamo visto che la fisica, specie quella di questo secolo, richiede l'uso di concetti matematici astratti. D'altra parte abbiamo anche ricordato, con diversi esempi, che questo processo di astrazione è stato tutt'altro che semplice e naturale, e che spesso ha richiesto decenni o secoli.

Ci si deve quindi chiedere: come si conquista l'astrazione? Il percorso che conosciamo dalla storia della scienza è inevitabile, con la sua lentezza e tortuosità, o ci sono alternative? È necessario arrivare all'astrazione per gradi, o esistono delle scorciatoie? Non mi sento di fornire risposte a un problema complesso e a mio avviso anche poco studiato; posso al più proporre qualche spunto di discussione e qualche ipotesi di lavoro.

Se ci si dovesse basare sulla pratica didattica corrente, tenendo d'occhio le molte difficoltà che chiunque insegna si trova davanti a ogni passo, ci sarebbe da essere pessimisti: l'astrazione sembra un obbiettivo assai ambizioso, che ben raramente viene toccato al termine della scuola secondaria, e in genere neanche nel primo biennio universitario. È chiaro che l'astrazione matematica non è possibile se l'allievo non ha raggiunto lo stadio del "pensiero formale" piagetiano, e diversi studi hanno mostrato che tale stadio non è ancora acquisito da una notevole parte della popolazione scolastica a 18 anni.

Due soli esempi: accade talvolta che, posto di fronte a un sistema di equazioni lineari originate in un problema di fisica, lo studente al primo anno di università chieda di poter chiamare x e y le incognite, perché "non ci si ritrova" se si chiamano — poniamo — p e q. Oppure: ho visto più volte la difficoltà a manipolare equazioni nelle quali comparivano promiscuamente simboli che designavano quantità note insieme ad altri che rappresentavano incognite: la forte tendenza è di sostituire ai simboli delle quantità note i loro valori numerici, che sono sentiti meno "astratti."

Credo però che almeno in parte queste difficoltà siano originate da due caratteristiche della comune pratica didattica:

a) Da un lato, l'insegnamento della matematica procede su concetti non soltanto astratti, ma volutamente e totalmente svincolati da qualunque richiamo alla realtà concreta, sia quella della fisica o altra. Si crede, da parte dell'insegnante, di garantire in tal modo la "purezza" del discorso matematico, e di aiutare l'allievo a coglierne la natura intrinseca; invece spesso si riduce la matematica a un giuoco del tutto formale, non si fa vedere il processo di astrazione nel suo nascere, e soprattutto non si crea l'abitudine a muoversi sui due piani: quello della realtà fisica da descrivere in termini matematici, e quello del modello matematico da interpretare con riferimento a oggetti concreti.

b) Dall'altro, l'insegnamento della fisica cerca di supplire alle difficoltà degli allievi nell'uso degli strumenti matematici riducendo al minimo gli aspetti formali, cercando appena possibile di aggirare gli ostacoli, trascurando di mettere in evidenza quel ruolo dello strumento matematico, di cui abbiamo ampiamente discusso. L'ideale (estremistico) diventa una "fisica senza matematica."

C'è poi un altro aspetto della pratica didattica, del quale mi è capitato di riscontrare gli effetti negli studenti, e che vorrei sottolineare. Per quanto possa sembrare paradossale, si realizza una convergenza della visione platonista del matematico e di quella empirista del fisico, in questo senso: entrambi finiscono per convincere i ragazzi che le strutture matematiche sono "realtà." I teoremi della geometria euclidea sono le proprietà dello spazio fisico. I numeri *esistono* in sé, ed è quindi naturale associarli alle misure, perché una grandezza *ha* un valore; eccetera.

Occorre combattere questa tendenza, forse spontanea, a vedere le strutture matematiche come realtà. Bisogna portare gli allievi a convincersi che si tratta invece di *descrizioni* o *rappresentazioni* (tutt'altro che banali, ad es. perché fortemente *strutturate*!) che costituiscono il risultato del lavoro di comprensione teorica della realtà fisica.

S'intende che un tale programma va perseguito con estrema gradualità (è anche per questo che non ritengo valido un approccio assiomatico alla fisica). La cosa migliore è iniziare preparando il terreno nei casi più semplici, come quello del tempo. Anche in questo caso, tuttavia, sarebbe prematuro affrontare esplicitamente il problema dell'astrazione fin dall'inizio dello studio della cinematica: la maturità degli allievi non lo consente. Ne segue una proposta insolita rispetto alla stesura più o meno tradizionale dei "curricola": su alcuni argomenti sarebbe opportuno ritornare, in modo da approfondire aspetti che nella prima presentazione non potevano essere discussi.

Di passaggio, questa osservazione mostra il danno di un'esposizione precoce (al livello del biennio) all'intero programma di fisica: la giovane età degli allievi obbliga a tralasciare aspetti fondamentali per la comprensione della scienza, che non di rado finisce per ridursi a un ricettario da tener pronto per le successive applicazioni.

Sarebbe altamente auspicabile che ai problemi toccati in quest'ultima sezione si prestasse maggiore attenzione da parte dei ricercatori in didattica, in modo da poter arrivare a proposte da confrontare tra loro, e da mettere alla prova della realtà scolastica.

Bibliografia e Note

[1] E. Bellone: *Il mondo di carta*, p. 61 (Mondadori 1976).

[2] *Loc. cit*, p. 37.

[3] Questa e tutte le citazioni seguenti di Einstein sono tratte da *Albert Einstein, scienziato e filosofo* a cura di P.A. Schilpp (trad. ital. Einaudi 1958).

[4] Citato da C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler: *Gravitation*, p. 195 (Freeman 1973).

[5] Citato da Misner, Thorne e Wheeler, *loc. cit.*, p. 220.

[6] Il film è intitolato *La dilatazione del tempo*, secondo una terminologia classica, che forse sarebbe meglio abbandonare.

[7] In *QED — The Strange Theory of Light and Matter*, p. 23 (Princeton 1985).

[8] Citato da Bellone, *loc. cit.*, p. 30.