Le scienze sperimentali e la matematica moderna nell'insegnamento*

Nel presentare al lettore italiano questo piccolo libro di Friedrichs, ci sembra opportuno proporre alcune considerazioni su due temi principali, che la lettura del libro suggerisce. I due temi sono: 1) posto e funzione della formulazione assiomatica nell'insegnamento della matematica; 2) rapporti fra matematica e fisica. Come si vede, si tratta di argomenti sui quali molto si è detto, e molto si può ancora dire; certo più di quanto questa sede non ci consenta. Pur senza alcuna pretesa di completezza, ci sembra tuttavia utile sottolineare e commentare questi aspetti del libro, perché forse oggi come mai in passato il pubblico specializzato (soprattutto degli insegnanti di ogni ordine di scuola) appare sensibile ai problemi che vi si connettono. Del resto il rinnovamento dell'insegnamento scientifico in Italia è da tutti sentito come esigenza improrogabile, e in parte è già iniziato, con alcuni tentativi più o meno completi e più o meno riusciti (introduzione delle osservazioni scientifiche nella scuola media, classi pilota in matematica, fisica, chimica, biologia, discussioni sui nuovi programmi della scuola media superiore ecc.: ciò rende ormai impossibile l'atteggiamento di passiva rassegnazione, che era prevalente fino a non molto tempo fa.

Del secondo tema (rapporto fra matematica e fisica) sarebbe anche possibile una discussione genuinamente filosofica; ma per non uscire troppo dall'ambito che ci siamo prefissi, ci limiteremo a rilevare come a nostro avviso la problematica filosofica sia anch'essa necessaria per una soluzione soddisfacente dei problemi didattici. Lo scienziato attivo può forse rifiutare coscientemente una posizione filosofica, e ritenere sufficiente per il suo lavoro la soluzione empirica dei problemi di metodo e di principio che quotidianamente si trova di fronte (anche se poi, crediamo, egli è in genere tutt'altro che esente — nelle sue scelte e nei suoi giudizi — da influenze extrascientifiche magari inconsapevoli, e perciò stesso tanto più pericolose); ma un tale agnosticismo programmatico è del tutto impossibile a chi la scienza debba insegnarla, e voglia farlo in modo non esteriore e superficiale. Il discorso vale per l'insegnamento a tutti i livelli, universitario compreso: il rapidissimo aumento quantitativo delle conoscenze scientifiche da un lato, e l'allargamento della base studentesca dall'altro, con il conseguente mutamento della stessa funzione dell'Università, pongono oggi anche il docente universitario di fronte a un grave problema. Egli deve infatti far sì che il maggior numero di allievi arrivino, in un tempo necessariamente limitato, a un grado di maturità e di larghezza di conoscenze che consenta loro di orientarsi in un mondo in continua evoluzione, senza condannarli ad essere dei meccanici ripetitori di formule, incapaci non solo di portare un contributo originale al proprio lavoro, ma anche di discuterne le scelte fondamentali.

* da *I concetti matematici elementari della fisica* di Kurt O. Friedrichs (Boringhieri, 1967): Introduzione.

Ma è soprattutto nell'insegnamento preuniversitario, e ancor più nella scuola dell'obbligo, che si fa sentire l'esigenza di una consapevolezza critica da parte del docente: quando si tratta di scegliere contenuti e metodi dell'insegnamento che ne trasmettano i caratteri essenziali, nelle forme e nei limiti compatibili col grado di evoluzione intellettuale dell'allievo, evitando da un lato lo sterile nozionismo da tutti deprecato (eppure ancor così persistente nella nostra scuola), e dall'altro la riduzione dell'insegnamento scientifico a un casuale svolazzare senza scopo e senza conclusione. Il problema appare poi ancora più serio quando si rifletta che anche le più ottimistiche previsioni non potranno mai considerare garantita una solida preparazione scientifica e filosofica in tutta l'enorme massa di insegnanti che sono e ancor più saranno necessari nella nostra scuola dell'obbligo; perciò l'iniziativa individuale del docente, anche se affiancata e organizzata con mezzi istituzionali da sviluppare, perché tuttora carenti o inadeguati (corsi d'aggiornamento, seminari didattici ecc.), resterà sempre elemento essenziale per l'adeguamento della classe insegnante ai suoi nuovi compiti.

Nel quadro così sommariamente tracciato, pubblicazioni come questa acquistano un loro preciso significato, come stimolo e suggerimento di soluzioni, che va oltre quello più genericamente culturale che possono pure avere per il lettore non specializzato, ma non perciò disattento a certi aspetti del moderno pensiero scientifico. Vorremmo anzi qui di passaggio osservare che non a caso la quasi totalità delle opere che svolgono la funzione sopra accennata di guida e stimolo critico per la didattica elementare sono in Italia opere tradotte. Ciò sta a indicare un aspetto del tante volte lamentato distacco del nostro mondo universitario dalla realtà e dai bisogni della società.

Venendo ora più specificamente al primo argomento, cioè al significato di questo libro per la didattica della matematica, riteniamo in primo luogo che esso costituisca un esempio di cosa dovrebbe essere un'introduzione elementare della cosiddetta "matematica moderna," e del metodo assiomatico a quella strettamente legato. Per chiarezza sarà bene accennare qui, sia pure molto brevemente, alcune considerazioni sulla matematica moderna e sul metodo assiomatico. Quanto alla prima espressione, la sua interpretazione nel nostro contesto non è ovviamente quella di "recenti sviluppi della matematica": nessuno pensa infatti di introdurre nella scuola dell'obbligo, o anche nella media superiore, le più recenti conquiste dell'indagine matematica in quanto tali. Quello di cui invece si parla è un certo carattere della matematica di questo secolo, che la differenzia nettamente dalla matematica "classica" ottocentesca.

Volendo esprimere con una sola parola questo carattere, diremmo che lo si ritrova nell'importanza data all'idea di "struttura." Pur con tutte le riserve necessarie ad ogni schematizzazione storica, riteniamo che uno dei principali centri d'interesse della ricerca matematica dell'800 si possa individuare nel lavoro di fondazione rigorosa delle intuizioni dei grandi matematici del Sei e Settecento. È invece tipico della matematica del ventesimo secolo il riconoscimento e la ricerca di identità strutturali sotto apparenze diverse. Questo atteggiamento di ricercare al di sotto delle diverse realizzazioni le medesime proprietà astratte non è in sé nuovo; ma nuova ne è la presa di coscienza esplicita, il farne il sistematico punto di partenza di ogni indagine. Sono in primo luogo evidenti i vantaggi pratici che derivano dall'avere simultaneamente presenti le diverse possibili realizzazioni di una stessa struttura, il che consente spesso di trasferire metodi e risultati dall'una all'altra. Ma è soprattutto da considerare, per l'argomento che ci interessa, lo spostamento d'accento che da questo fatto deriva: dalle tecniche particolari (sistemi di equazioni, trigonometria, geometria analitica ecc.) che, tanto per fare un esempio, hanno costituito per decenni e costituiscono tuttora i pilastri principali dei nostri programmi liceali, ci si sposta verso la ricerca delle strutture di base (nel caso concreto, quelle di spazio vettoriale affine e metrico, con i relativi omo- e isomorfismi), mentre quelle citate sopra appaiono solo come rappresentazioni particolari. Il discorso può essere portato anche molto avanti: basti pensare ad esempio alle tesi di Piaget, secondo cui le strutture più generali, quelle topologiche, sono acquisite nella primissima infanzia; o ai numerosi tentativi di introdurre la teoria degli insiemi e la logica delle classi nella scuola materna ed elementare (citiamo qui solo i "blocchi logici" del Dienes).

Qui ci sembra però che possa prodursi un equivoco derivante dal confondere il carattere sopra descritto della matematica moderna col metodo secondo il quale essa viene oggi di preferenza presentata e insegnata. Che il metodo assiomatico — al quale appunto ci riferiamo — presenti notevolissimi vantaggi di chiarezza e di rigore logico, pare difficilmente contestabile; e del resto anche questo metodo ha dietro di sé un'antichissima tradizione, che risale alla classica sistemazione euclidea della geometria greca, rimasta per duemila anni un modello per il ricercatore come per il maestro. Vale se mai la pena di notare che il metodo assiomatico ha assunto in questo secolo un aspetto nuovo, il cui interesse non è solo filosofico (come potrebbe a prima vista sembrare) in quanto ha preparato il terreno a quella sensibilizzazione dei matematici verso i problemi di struttura cui si è accennato sopra. Intendiamo dire che gli assiomi hanno perduto quel carattere, che avevano in Euclide, di affermazioni sulla realtà degli enti matematici, per assumere quello di regole del gioco, o se si vuole di definizioni implicite degli enti in questione; comunque di proposizioni sulla cui verità non può aver luogo discussione, non in quanto certe o evidenti o ben fondate, ma solo in quanto convenzionali e arbitrarie (col solo obbligo della compatibilità). È poi chiaro come su questa strada non si dovesse tardare ad accorgersi che gli assiomi non determinano altro che la struttura di un sistema matematico, lasciandone impregiudicata l'interpretazione. Questa osservazione, se da un lato ci ricollega a quanto detto in precedenza, dall'altro spiega la rinuncia della matematica moderna ad atteggiamenti ontologizzanti, sempre ricorrenti nella storia passata; infine apre la strada a una riconsiderazione dei rapporti della matematica con le scienze naturali, di cui dovremo occuparci più oltre.

Da quanto ora detto dovrebbe apparire chiaro che l'aspetto "strutturale" e quello "assiomatico" della matematica moderna, per quanto strettamente connessi, non sono però inscindibili: è perciò opportuno, anche sul piano didattico, discuterne separatamente le possibili applicazioni. Ciò è sempre stato ben chiaro ai citati pionieri della moderna didattica matematica, e a molti dei continuatori delle loro ricerche; ma non si può dire lo stesso di quanti, forse perché affascinati dalla concisione e dall'eleganza delle moderne presentazioni assiomatiche, ritengono di trasferirle *tel quel* nell'insegnamento. L'equivoco consiste nel credere che la forma perfetta che una teoria matematica (tanto per restare all'esempio che ci interessa, quella degli spazi vettoriali) riceve nella sua attuale formulazione assiomatica, per il solo fatto di essere la più soddisfacente per chi la contempli come qualcosa di già costruito, debba anche essere il migliore punto di partenza per chi invece deve penetrarvi come in un mondo a lui del tutto nuovo. Se siamo disposti a riconoscere l'assurdo di una didattica quale si praticava, almeno fino a qualche anno fa, fin nei corsi universitari, e in conseguenza della quale lo studente poteva sentir parlare di vettori anche in tre corsi diversi, senza che gli fosse dato modo di riconoscere un'unità nelle diverse trattazioni, non ci sembra però che il problema si risolva iniettando alla sprovveduta matricola una massiccia dose di assiomi, dai quali tutto segue con inflessibile logica deduttiva. Crediamo infatti che lo studente non abbia solo bisogno di conoscere definizioni impeccabili e dimostrazioni rigorose ed eleganti, ma anche di essere preparato a valutarle, a vederne la connessione con altre trattazioni più empiriche (le famigerate "freccette" dei fisici); in una parola di essere portato a ripercorrere, naturalmente sfrondandola di deviazioni sterili e di passaggi inutilmente faticosi, la stessa strada che dalle prime intuizioni ha condotto alla pura astrazione che costituisce la "matematica moderna." Solo così egli potrà alla fine apprezzare i vantaggi che la formulazione astratta presenta, ne comprenderà la vastità di applicazione e saprà servirsi dell'intuizione, ai vari livelli, quando ciò gli sia necessario.

Discorso analogo può farsi per l'insegnamento elementare e medio; anzi, riguardo a quest'ultimo, ci sembra che questo libro possa di per sé costituire un'eccellente traccia per procedere — seguendo l'evoluzione del teorema di Pitagora, dal carattere magico attribuitogli quando fu scoperto, alla sua apparente discesa al rango di pura definizione — a una trattazione del concetto di vettore che ne mostri i vari gradi di sviluppo. In questo modo, senza concessioni sul piano del rigore, lo studente può arrivare a vedere la formulazione assiomatica per quello che essa è realmente stata: una faticosa conquista, che non cancella il cammino che l'ha preceduta, ma anzi ne rivela i più profondi significati.

La seconda metà del libro di Friedrichs tratta un argomento ben distinto da quello svolto nella prima metà, e potrebbe intitolarsi: impulso ed energia nella dinamica di Newton e in quella di Einstein. Questo semplice fatto, che a una prima parte spiccatamente matematica segua una seconda di indiscutibile carattere fisico, può far sorgere un interrogativo: se cioè si debba considerare la prima parte un'introduzione alla seconda, o piuttosto la seconda un'applicazione della prima. È probabile che il lettore propenderà verso l'una o l'altra alternativa, a seconda che la sua forma mentis sia più vicina a quella del fisico o a quella del matematico. Infatti il matematico sarà portato a ritenere come fondamentale la prima parte del libro; la seconda gli apparirà una notevole ma particolare interpretazione, la cui mancanza non avrebbe in nulla alterato la sostanza della trattazione, e che forse può anzi oscurarne la chiarezza, per le necessarie cautele di cui occorre circondarla (le verifiche sperimentali, il problema della validità, la stessa esistenza di due diverse meccaniche ecc.). Al contrario il fisico sarà tentato di vedere la prima parte come la presentazione di un puro strumento tecnico, utile ma non essenziale; e considererà comunque eccessivo il rigore di molte argomentazioni, che vedrebbe volentieri sostituite da procedimenti più intuitivi, che portino più rapidamente allo stesso risultato.

È chiaro che ci siamo qui rappresentati due personaggi limite, mentre nella realtà fra le due posizioni si avranno infinite sfumature intermedie; tuttavia crediamo che le tendenze fondamentali siano rese in modo sufficientemente fedele. A entrambi questi ipotetici lettori il libro apparirebbe squilibrato (naturalmente in sensi opposti), proprio per il fatto di essere troppo equamente diviso tra matematica e fisica. Ma certo questa equa divisione non è casuale, e noi vorremmo qui tentarne un'interpretazione, della quale ci assumiamo naturalmente tutta la responsabilità; anche se alcune frasi del Friedrichs ci sembrano confortarla.

Del rapporto della matematica con le scienze naturali (e in particolare con la fisica) sono state date, durante oltre venti secoli, diverse rappresentazioni. Non potendo ovviamente permetterci altro che un rapidissimo cenno, ricorderemo solo quelle che potremmo in un certo senso considerare estreme. La prima, che si può far risalire a Platone, ritiene la descrizione matematica della realtà possibile solo in quanto la realtà stessa è un (imperfetto) riflesso di superiori entità coincidenti con quelle della matematica. L'altra, più moderna, e principalmente riconoscibile in Mach, vede invece nella teoria fisica un ausilio mnemonico per la raccolta dei molteplici dati sperimentali, e perciò nella matematica una specie di comoda stenografia che abbrevia e sintetizza questo lavoro di raccolta. È chiaro come il punto di vista platonico implichi che ogni fenomeno fisico ha già pronta dietro di sé la sua vera essenza, e perciò la sua teoria matematica: quello che al fisico resta da fare è solo cogliere, nella confusione dei dati sperimentali, le tracce di questa Verità superiore. Il machista conseguente sosterrà invece la sua completa indifferenza per la particolare forma della teoria, una volta che questa riassuma correttamente i fatti osservati.

L'interpretazione che ci trova più favorevoli, e che ci sembra anche condivisa dall'Autore, accoglie alcune esigenze riconoscibili nelle due soluzioni prospettate sopra, senza forzarle in schemi troppo rigidi e lontani dall'effettivo svolgersi della ricerca. Della soluzione platonica si ritiene valida non già la componente metafisica, ma il puro riconoscimento di un fatto: e cioè che la teoria non è in genere pura e diretta conseguenza dell'insieme dei dati sperimentali, ma possiede un momento creativo autonomo, non necessitato dai fatti che deve descrivere. Si aggiunge ancora che in realtà la stessa organizzazione dei dati sperimentali — anzi, prima ancora, la stessa scelta degli esperimenti da condurre — risente di un preesistente schema teorico, dal quale sorgono le "domande da porre alla natura." Della soluzione empirista si accetta invece la negazione di ogni necessità superiore quanto alla forma della teoria, e la dichiarazione che i soli ultimi criteri di validità sono l'accordo coi fatti e la capacità di previsione; si riconosce però a criteri extraempirici (quali la semplicità e l'eleganza formale) un valore di orientamento nella scelta.

Da quanto detto discende un'altra considerazione, sul rapporto fra matematica e fisica, che ha anche notevoli aspetti didattici. Se la matematica è da considerare uno strumento, la cui giustificazione è nell'applicazione fisica, anche l'insegnamento dovrà riflettere questo punto di vista, subordinando la discussione dei concetti matematici alle loro dirette applicazioni, e rinunciando a una presentazione logicamente autonoma. Se invece è la struttura matematica che va vista *a priori*, sarà la fisica ad esserle subordinata e quasi ridotta a insieme di regole pratiche, mentre la trattazione matematica dovrà acquistare un aspetto il più possibile astratto e indipendente da ogni interpretazione. Il lettore che ci ha seguito fin qui comprende però che noi abbiamo letto il libro di Friedrichs in una chiave che non è né l'una né l'altra delle due accennate.

Per esemplificare in concreto: l'idea di vettore nasce dalla stessa intuizione geometrica e cinematica che dà origine alla geometria euclidea, e perciò i vettori sono inizialmente vettori euclidei tridimensionali. Ma già questa sistemazione concettuale cambia il grado e il modo di comprensione della realtà, anche senza intervento di nuovi fatti sperimentali: la struttura dello spazio e del moto risulta definita in un modo così privo di ambiguità, e apparentemente così necessario, che si può — con Kant — credere di aver a che fare con "forme a priori." Ma è la stessa invenzione matematica (con la geometria non euclidea) a demolire questo mito; e allora acquista senso il problema di quale sia la "geometria del mondo fisico": problema che Gauss tenta di risolvere sperimentalmente. La discussione che ne segue presenta in una nuova luce il problema del rapporto fra teoria ed esperienza. La relatività ristretta di Einstein non usa dapprincipio tecniche matematiche particolari: ma ben presto Minkowski ne scopre la formulazione quadridimensionale, in termini di vettori pseudoeuclidei, che poi Einstein generalizza alle varietà riemanniane della sua relatività generale. Frattanto i matematici stanno indagando le proprietà degli spazi vettoriali a infinite dimensioni (Hilbert): a ciò spinti dai problemi posti dalla teoria delle serie di Fourier e più in generale dalle ricerche sulla risoluzione delle classiche equazioni della fisica matematica (teoria del potenziale, propagazione del calore, onde, vibrazioni di sistemi estesi ecc.). I fondatori della meccanica quantistica trovano così pronta una tecnica che si presta mirabilmente alla descrizione della nuova fisica e finisce per formarne parte integrante; ma la ricerca matematica riceve fecondissimo impulso dai problemi che la nuova fisica pone, e si assiste a tutto un fiorire di nuovi sviluppi, il cui interesse va poi molto al di là dei probiemi dai quali hanno tratto origine (basti citare per tutti il von Neumann, e la teoria delle algebre di operatori, che da lui prende il nome). E il processo continua tutt'oggi.

La conclusione ci sembra chiara; nella realtà della ricerca come nell'insegnamento, matematica e fisica vanno intimamente connesse; ciascuna trae alimento dall'altra e le fornisce idee, strumenti, modelli. Ciò nonostante le due scienze — e i due metodi — sono nettamente distinti; e ci sembra che la maggior difficoltà didattica sia proprio nel trasmettere all'allievo questo rapporto di distinzione nella reciproca dipendenza. La soluzione non è certo nella confusione delle lingue, nel fare d'ogni erba un fascio; ma piuttosto nella solida preparazione, seguita da riflessione critica. Questo libro fornisce un valido aiuto a chi voglia affrontare i problemi che abbiamo superficialmente discussi; e sta ormai al lettore di convincersene, seguendo il filo che l'Autore ha tracciato.

Elio Fabri

Incaricato di meccanica quantistica
all'Università di Pisa