

Nascita e sviluppo dell'idea di fotone*

Elio Fabri

Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa

—o—

Mi riprometto di tracciare la storia e l'evoluzione dell'idea di fotone dai primi passi (Einstein 1905) ad alcuni sviluppi relativamente recenti (anni '80). Non farò una trattazione accuratamente storica: non avrei né il tempo né le competenze. Cercherò invece di delineare i passaggi essenziali e di chiarire alcuni aspetti che nella pratica didattica — a tutti i livelli — non sempre vengono spiegati.

La prima parte è dedicata al periodo “classico,” ossia agli anni dal 1905 al 1927. Descriverò i lavori principali, non in tutti i dettagli, ma in ciò che occorre sapere per apprezzarne la portata e il posto nelle idee del tempo.

Nella seconda parte invece tratteggerò gli sviluppi successivi, fino a tempi recenti. Vedremo come il concetto di fotone e la comprensione delle proprietà che si associano a questa particella si siano andati progressivamente arricchendo e modificando.

PRIMA PARTE

Le premesse

Nel 1860 Kirchhoff dimostra il suo fondamentale teorema sulla radiazione termica:

il rapporto tra potere emissivo e assorbente per qualsiasi corpo è una funzione universale della frequenza e della temperatura:

$$\frac{E}{A} = I(\nu, T).$$

La dimostrazione di Kirchhoff è basata esclusivamente su considerazioni termodinamiche, e in particolare sul *secondo principio*, a quel tempo assai recente. Nel corso della dimostrazione Kirchhoff introduce il concetto di *corpo nero* (ideale), definito come un corpo che abbia $A = 1$ a tutte le frequenze. Ovviamente per un corpo nero $E = I$.

Ma soprattutto interessa ricordare l'idea della *cavità*: una regione di spazio vuota e delimitata da pareti di materiale arbitrario, tenuta all'equilibrio termico

* Relazione tenuta alla Scuola di Storia della Fisica, Pisa, 4 e 5 dicembre 2003. Versione riveduta ed estesa, agosto 2005.

da un termostato esterno. Kirchhoff dimostra che in queste condizioni la cavità è occupata da una radiazione termica, la cui densità di energia spettrale ϱ è anch'essa una funzione universale di ν e T , legata alla $I(\nu, T)$ dalla relazione

$$I = \frac{c}{4\pi} \varrho.$$

Dato che la radiazione nella cavità ha la stessa composizione spettrale di quella emessa da un corpo nero, è divenuto abituale denominarla *radiazione nera*.

Si apriva così un filone di ricerca: la determinazione della funzione universale di Kirchhoff; problema che in base alla definizione di corpo nero poteva essere enunciato come “determinazione del potere emissivo del corpo nero,” o come “determinazione dello spettro della radiazione nera.” Il problema aveva carattere teorico, ma presentava anche un aspetto sperimentale: si poteva infatti imparare qualcosa sulla funzione $I(\nu, T)$ da misure di potere emissivo e assorbente di corpi reali.

Nel 1879 Stefan congettura che l'emissione integrale di qualsiasi corpo (l'integrale del suo potere emissivo su tutte le frequenze) vada come T^4 . La congettura non è corretta in generale: nel 1884 Boltzmann dimostra che essa vale solo per il corpo nero. In altre parole, Boltzmann prova che

$$\int_0^{\infty} I(\nu, T) d\nu \propto T^4.$$

La dimostrazione di Boltzmann fa uso, oltre che di argomentazioni termodinamiche, anche del carattere elettromagnetico della radiazione termica; risultato anch'esso assai recente.

Lorentz avrebbe dichiarato nel 1907 che questo breve lavoro di Boltzmann è “uno dei tesori della fisica teorica.”

Nel 1893 Wien fa un importante passo avanti, dimostrando che

$$\varrho(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T). \tag{1}$$

Nella (1) compare solo una funzione universale dell'unica variabile ν/T . Questa si chiama “legge di spostamento” perché se ne ricava subito che al crescere della temperatura tutta la distribuzione si sposta proporzionalmente verso le alte frequenze; in particolare ciò accade per la frequenza alla quale si ha il massimo di emissione del corpo nero.

Poco dopo, nel 1896, Wien fornisce anche una formula empirica:

$$\varrho(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta\nu/T}. \tag{2}$$

Essa era in buon accordo con le misure di Paschen (1897) nel vicino infrarosso, ma si dimostrò del tutto in disaccordo con successive misure, di Lummer–Pringsheim

e poi di Rubens–Kurlbaum, nell’infrarosso lontano (1900). Come vedremo poi, la formula di Wien è quindi da considerarsi una legge limite, valida solo per alte frequenze (o basse temperature).

Viceversa dalle misure di Rubens–Kurlbaum risulta che a basse frequenze ϱ è proporzionale a T ; il che richiede, per soddisfare la (1), un’espressione della forma

$$\varrho(\nu, T) = \gamma \nu^2 T. \quad (3)$$

Planck trova la soluzione generale nel 1900, prima come interpolazione tra i due casi limite, poi con un ragionamento più profondo ma assai discutibile, e che egli stesso definisce “arbitrario e complicato.” Tuttavia in questo lavoro appare per la prima volta l’idea di una quantità finita di energia ($\varepsilon = h\nu$) coinvolta negli scambi tra oscillatori e radiazione.

Non va poi trascurato che la legge di Planck:

$$\varrho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4)$$

risultava in ottimo accordo con le misure, e che lo stesso Planck riuscì a ricavarne valori del tutto plausibili per alcune costanti fondamentali allora note con grande incertezza: la costante k di Boltzmann, il “numero” N_A di Avogadro, la carica e dell’elettrone.

Einstein 1905

In quest’anno Einstein pubblica un lavoro dal titolo “*Su un punto di vista euristico relativo alla produzione e trasformazione della luce*” [1]. Il lavoro è universalmente noto come quello in cui viene data la spiegazione delle leggi dell’effetto fotoelettrico, il che è vero; tuttavia la sua importanza teorica sta altrove. L’applicazione all’effetto fotoelettrico si trova nella seconda parte dell’articolo, dove E. mostra come il suo risultato centrale possa essere impiegato per spiegare vari fenomeni. Ma per il nostro tema è la prima parte dell’articolo quella che conta di più.

Ci si può chiedere in primo luogo il significato del titolo: perché E. parla di “punto di vista euristico”? La risposta è che *non esiste una teoria*, e E. non è in grado di proporla: il suo è un argomento che “suggerisce” l’esistenza dei quanti. Con le parole di E.:

“Una radiazione monocromatica di densità ridotta (nei limiti di validità della legge di Wien) si comporta, nell’ambito della termodinamica, come se fosse composta di quanti di energia di grandezza $R\beta\nu/N$, indipendenti tra di loro.”

Chiariamo: la legge di Planck (4) ammette due casi limite importanti:

- 1) Quello a basse frequenze (o alte temperature, alte densità):

$$\varrho(\nu, T) = \frac{8\pi k}{c^3} \nu^2 T.$$

Non è altro che la (3) con specificata la costante γ . Sebbene venga solitamente designata come legge di Rayleigh–Jeans, in realtà l'espressione, con le costanti giuste, appare per la prima volta nel citato lavoro di E. È la soluzione per $\varrho(\nu, T)$ che si può ricavare con considerazioni classiche, e al momento non interessa.

- 2) Quello ad alte frequenze (o basse temperature, basse densità) che fornisce la formula di Wien (2), anche qui fissando la costante $\alpha = 8\pi h/c^3$.

E. parte dalla legge di Wien, di cui fa notare la validità sperimentale alle alte frequenze, e dimostra che se si isola una porzione pressoché monocromatica della radiazione la sua entropia ha una forma che ricorda molto da vicino quella di un gas perfetto. Vediamo il suo ragionamento (con qualche modifica a scopo di semplificazione).

Consideriamo la frazione di radiazione nera nella cavità compresa in un certo intervallino di frequenze $(\nu, \nu + \Delta\nu)$ e trattiamola come un sistema termodinamico. Esso avrà un'energia interna $U = \varrho V \Delta\nu$ (V è il volume della cavità) e una certa entropia S . Usando la (2)

$$U = \frac{8\pi h V \Delta\nu}{c^3} e^{-h\nu/kT}. \quad (5)$$

Dal secondo principio sappiamo che a volume costante $dS/dU = 1/T$, e $1/T$ si ottiene dalla (5):

$$\frac{dS}{dU} = -\frac{k}{h\nu} \ln \frac{c^3 U}{8\pi h V \nu^3 \Delta\nu}. \quad (6)$$

Integrando la (6) si trova

$$S = -\frac{kU}{h\nu} \left(\ln \frac{c^3 U}{8\pi h V \nu^3 \Delta\nu} - 1 \right). \quad (7)$$

La costante additiva può essere determinata per es. osservando che S deve tendere a 0 quando $\nu \rightarrow \infty$, perché a quel limite non ci sarà radiazione nella cavità; ed è facile verificare che la (7) soddisfa tale condizione.

E. osserva a questo punto che se si varia V , tenendo fermi U , ν e $\Delta\nu$, si ha

$$S - S_0 = k \frac{U}{h\nu} \ln \frac{V}{V_0} = k \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^{U/h\nu}.$$

Per un normale gas perfetto si avrebbe secondo Boltzmann $S = k \ln W$, e la probabilità W che n molecole che hanno a disposizione il volume V_0 si restringano nel volume V sarebbe $(V/V_0)^n$.

Confrontando, E. mostra che per la radiazione si ha la stessa espressione, se si ammette che essa consista di $n = U/h\nu$ particelle.

La novità di questo risultato è che non solo occorre considerare quantizzata la radiazione quando interagisce con la materia, ma anche quando è isolata in uno spazio vuoto. Per come ci si è arrivati, questo è però vero solo a basse densità. (In linguaggio moderno, il numero di occupazione medio per stato dev'essere $\ll 1$.)

Più tardi lo stesso E. dimostrerà che se quest'ipotesi non vale, la radiazione si comporta in modo più complicato, come qualcosa che non è né semplicemente corpuscolare né semplicemente ondulatorio. Quindi il limite di Wien è il caso limite corpuscolare (bassi numeri) e quello di Rayleigh–Jeans è quello ondulatorio (alti numeri).

Breve commento

Il ragionamento di E. è basato sulla legge di Wien, presa come legge empiricamente verificata; ma poi fa uso di argomentazioni termodinamiche (la relazione fra energia, entropia e temperatura) e della meccanica statistica (la relazione di Boltzmann fra entropia e probabilità). Si tratta di un fatto non banale: a quel tempo le idee di Boltzmann erano tutt'altro che unanimemente accettate tra i fisici teorici. È da notare che quasi tutto il lavoro di E., al di fuori della relatività, ha sempre fatto un profondo uso di concetti statistici.

Detto di passaggio, a me pare che l'attuale didattica della fisica nella scuola secondaria trascuri in modo estremo e ingiustificato questo importantissimo campo del pensiero fisico. Forse ci si dovrebbe preoccupare di modificare la situazione, per quanto possibile.

Tornando ad E., egli esprime invece apertamente i suoi dubbi sulla validità microscopica dell'e.m. maxwelliano. Dice nell'introduzione del lavoro di cui stiamo parlando: il carattere continuo della teoria di Maxwell è stato ampiamente confermato nel campo dell'ottica, ma le osservazioni in tale campo si riferiscono sempre a valori medi nel tempo. Non si può dunque escludere che in altri ambiti di fenomeni la luce manifesti un comportamento discontinuo.

Confronto con l'esperienza

È interessante osservare che praticamente tutti i lavori di E. si concludono col confronto con dati sperimentali noti, oppure con l'indicazione di possibili misure a conferma delle sue previsioni teoriche. Non fa eccezione questo articolo, la cui parte finale è appunto dedicata al confronto tra la nuova ipotesi dei quanti e alcuni fenomeni già noti. L'interpretazione che E. dà dell'effetto fotoelettrico

è troppo nota perché sia il caso di ripeterla; mi limito a ricordare che a quel tempo le conoscenze sperimentali erano scarse, e poco quantitative. La verifica conclusiva della relazione di E. sarebbe arrivata solo 10 anni dopo (Millikan).

E. cita e interpreta altri due tipi di fenomeni: la *fluorescenza* e la *fotoionizzazione*. Vediamo brevemente.

La fluorescenza

Il fenomeno consiste nella riemissione di luce da parte di un corpo esposto a radiazione. Essa si manifesta secondo la legge empirica di Stokes: *la lunghezza d'onda della luce emessa per fluorescenza è sempre maggiore di quella incidente*.

Lunghezza d'onda maggiore significa frequenza minore, ed E. osserva che ciò implica che i quanti della radiazione emessa hanno energia minore di quelli incidenti. La spiegazione è assai semplice, appena si osservi che il materiale fluorescente non è una sorgente d'energia, e che quindi l'energia del quanto incidente può essere diminuita per diversi processi, ma non aumentata.

La fotoionizzazione

Si tratta qui della ionizzazione di un gas, causata di regola da radiazione ultravioletta. Era nota l'esistenza di una soglia per tale processo: E. cita misure di Lenard per l'aria, che danno una soglia di 190 nm in lunghezza d'onda. Ne ricava che i quanti hanno un'energia di almeno $6.4 \cdot 10^{12}$ erg/mol.

D'altra parte misure di Stark avevano dato, come minima d.d.p. necessaria per avere ionizzazione dell'aria in un tubo a scarica, circa 10 volt, da cui $N_A eV = 9.6 \cdot 10^{12}$ erg/mol; come si vede l'accordo è abbastanza buono.

Einstein 1906

Si tratta di un secondo articolo, intitolato “*Teoria dell'emissione e assorbimento della luce*” [2]; un lavoro breve, del quale mi limito a richiamare le conclusioni. In primo luogo, E. fa vedere che dal suo risultato precedente [1] segue di necessità che anche gli oscillatori che Planck aveva impiegato per dedurre la sua legge non possono assumere valori di energia continui, ma solo quantizzati per salti pari ad $h\nu$. Va detto che Planck non aveva mai affermato una cosa del genere, che andava ovviamente contro i principi base della meccanica e dell'e.m. allora conosciuti. Invece E. scrive:

“... il sig. Planck ha introdotto un elemento ipotetico nuovo nella fisica: l'ipotesi dei quanti di luce.”

La seconda parte dell'articolo ancora una volta tratta di verifiche sperimentali: E. mostra che se l'ipotesi dei quanti è vera, la differenza di potenziale tra due metalli nell'effetto Volta dev'essere connessa alle loro frequenze di soglia fotoelettrica dalla relazione

$$V_{12} = \frac{h}{e} (\nu_1 - \nu_2). \quad (8)$$

Come si vede, la (8) lega tra loro tutte grandezze misurabili.

Einstein 1909

Questo articolo, dal titolo “*Lo stato attuale del problema della radiazione*” [3], a me pare non adeguatamente conosciuto, in rapporto all’importanza dei concetti che vi sono introdotti.

E. ripete in primo luogo che dalla meccanica statistica e dall’e.m. classico segue la legge di Rayleigh–Jeans (come ho già detto, l’aveva dimostrato nel 1905). Osserva subito che tale legge è in patente conflitto con l’esperienza più comune: per es. se valesse la legge di Rayleigh–Jeans le lastre fotografiche chiuse nei loro involucri non potrebbero mantenersi non esposte, dal momento che qualunque cavità sarebbe piena, anche a temperatura ambiente, di radiazione visibile e ultravioletta di notevole intensità (che naturalmente nessuno ha mai visto).

Ricorda poi di aver già dimostrato [2] che per conciliare la legge di Planck con e.m. e meccanica statistica occorre da un lato mantenere la formula (dedotta da Planck) che dà l’energia media di un oscillatore in equilibrio con la radiazione:

$$\overline{E} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \varrho$$

e dall’altro modificare (lui dice “la teoria statistica del calore,” ma in realtà la meccanica) con la seguente ipotesi:

“Una struttura capace di oscillare con frequenza ν e di trasformare, se possiede una carica elettrica, energia radiante in energia della materia e viceversa, non può assumere stati di oscillazione di energia arbitraria, bensì solo quegli stati la cui energia è un multiplo di $h\nu$.”

Dice poi che la modifica è così profonda, che è bene cercare altre interpretazioni semplici della legge di Planck. Ne propone due, tra loro connesse in quanto entrambe legate con le fluttuazioni (tema caratteristico del pensiero di E. in quegli anni).

Riprende gli argomenti del 1905, che erano basati sul caso limite di Wien, e li applica a una radiazione distribuita con la legge di Planck. Dimostra che il valor medio del quadrato della fluttuazione ε di energia in un volumetto v , e ristretta a una piccola banda di frequenza $\Delta\nu$, soddisfa la relazione

$$\overline{\varepsilon^2} \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} = k \tag{9}$$

dove σ è la corrispondente entropia.

Incidentalmente, la (9), ricavata per la prima volta da E., è una relazione fondamentale nella teoria delle fluttuazioni statistiche, che ha trovato largo impiego, fino a oggi, in svariate situazioni.

L’entropia si ricava dalla legge di Planck, e a conti fatti $\overline{\varepsilon^2}$ risulta la somma di due termini, che E. interpreta osservando che uno corrisponde al limite di

Rayleigh–Jeans, l’altro al limite di Wien:

$$\overline{\varepsilon^2} = \left(h\nu \varrho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \varrho^2 \right) v \Delta\nu. \quad (10)$$

Interpretazione della (10)

E. osserva che solo il secondo termine ha una spiegazione nell’e.m. classico, in quanto lo si può vedere come dovuto all’interferenza delle singole onde monocromatiche (tra loro scorrelate). Il primo termine invece è proprio quello che risulterebbe assumendo che la radiazione consista di “quanti” di energia $h\nu$, che si comportano come particelle indipendenti.

Quanto al secondo termine, E. ricorre a un argomento dimensionale: lo presento qui in maggior dettaglio di quanto non sia nell’articolo.

In primo luogo $\overline{\varepsilon^2}$, essendo prodotta dal contributo di più onde indipendenti, sarà proporzionale a $\Delta\nu$; e sarà anche proporzionale a v , dato che le fluttuazioni in volumetti diversi non sono correlate. Le grandezze disponibili per costruire l’espressione di $\overline{\varepsilon^2}$ sono, oltre a v e a $\Delta\nu$, le seguenti: ϱ , ν , c . D’altra parte $\overline{\varepsilon^2}$ ha le dimensioni del quadrato di un’energia, ossia le stesse dimensioni di $(\varrho v \Delta\nu)^2$; dobbiamo dunque dividere questa espressione per $v \Delta\nu$ e moltiplicarla per qualcosa che abbia le stesse dimensioni. Si vede che solo c^3/ν^2 fa al caso nostro, e così si arriva al secondo termine della (10) a meno del fattore 8π , che ovviamente non si poteva ottenere con un argomento dimensionale.

La spiegazione del primo termine è ancora più semplice. Dato che nel volumetto v e nell’intervallo di frequenze $\Delta\nu$ è presente un’energia media $\varrho v \Delta\nu$, il corrispondente numero medio di quanti sarà

$$\bar{n} = \frac{\varrho v \Delta\nu}{h\nu}.$$

Le fluttuazioni di n seguiranno la distribuzione di Poisson, e avranno quindi varianza pari proprio a \bar{n} . Dato che ciascun quanto porta l’energia $h\nu$, avremo

$$\overline{\varepsilon^2} = \text{Var}(\varepsilon) = (h\nu)^2 \text{Var}(n) = h\nu \varrho v \Delta\nu$$

che è proprio il primo termine della (10).

Chiarito il significato dei due termini, E. osserva che mentre la teoria e.m. classica (ondulatoria) rende ragione solo del secondo, nella radiazione usata negli esperimenti il primo termine è di gran lunga prevalente.

Dimostriamolo con qualche stima numerica. A una temperatura di 1700 K (circa al limite delle misure di Rubens e Kurlbaum) si ha $kT \simeq 0.14$ eV, mentre per una lunghezza d’onda al centro del visibile ($0.5 \mu\text{m}$) l’energia dei quanti vale 2.4 eV. Ne segue

$$h\nu/kT \simeq 17.$$

Siamo dunque largamente nella regione di Wien (corpuscolare, secondo E.) e vale per ϱ l'espressione (2).

Calcoliamo ora il rapporto tra i due termini nella (10):

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3 \varrho} = e^{h\nu/kT} = 2.8 \cdot 10^7$$

e si vede che la teoria classica fornisce un risultato troppo piccolo per 7 ordini di grandezza.

Fluttuazioni della pressione di radiazione

Il secondo ragionamento riguarda le fluttuazioni della q . di moto. E. considera uno specchietto situato nella solita cavità, e libero di muoversi in direzione ortogonale al suo piano. Osserva che lo specchietto sarà soggetto a due tipi di forze:

- a) delle spinte irregolari, dovute appunto alle fluttuazioni della pressione di radiazione
- b) un frenamento dovuto alla pressione di radiazione media, che è diversa sulle due facce quando lo specchietto ha una velocità non nulla.

In queste condizioni lo specchietto raggiungerà uno stato di equilibrio statistico, nel senso che effettuerà delle oscillazioni irregolari, del tutto simili al moto browniano. La sua velocità quadratica media sarà quella prevista dal teorema di equipartizione:

$$\overline{v^2} = kT/m.$$

Tale condizione di equilibrio permette di legare le fluttuazioni della pressione al suo valor medio, mentre questo si ottiene per via termodinamica dalla densità di energia. Se per ϱ si prende l'espressione di Planck, si ottiene per la fluttuazione della pressione una formula del tutto simile alla (10), valida per l'energia.

È notevole come E. commenta il risultato:

“Si nota subito la stretta parentela di questa relazione con quella ricavata nel paragrafo precedente per la fluttuazione dell'energia [...] Se fosse presente solo il primo termine [quello ‘corpuscolare’] le fluttuazioni della pressione di radiazione potrebbero essere spiegate perfettamente tramite l'ipotesi che la radiazione consista in complessi di energia $h\nu$, poco estesi e dotati di moto reciprocamente indipendente.”

Colpisce il fatto che non dica niente sulla q . di moto; eppure si vede a colpo d'occhio che per spiegare la fluttuazione nella pressione occorre anche assumere che i suoi “complessi di energia” abbiano q . di moto $h\nu/c$. Come mai?

È impossibile credere che E. non avesse visto questo; è più plausibile supporre che non abbia ritenuto di “caricare” la sua ipotesi quantistica — che già

incontrava notevoli resistenze, come vedremo — anche di un ulteriore aspetto difficilmente digeribile, ossia di una q. di moto anch'essa discreta. Solo nel 1917 quest'ipotesi verrà enunciata in modo del tutto esplicito.

Il limite di Duane–Hunt per i raggi X

In tema di verifiche dell'ipotesi dei quanti di radiazione, è opportuno citare un'altra prova sperimentale, relativa all'emissione di raggi X. Questi vengono emessi, come'è noto, quando degli elettroni vengono frenati bruscamente in un corpo solido. Il fenomeno viene spesso indicato col termine tedesco “Bremsstrahlung,” che vuol dire appunto “radiazione da frenamento.”

Nel 1911 E. osserva che la perdita di energia degli elettroni avverrà per emissione di uno o più quanti di radiazione, e i quanti di massima energia si possono ottenere se tutta l'energia cinetica di un elettrone viene trasferita a un singolo quanto. Se gli elettroni sono stati accelerati in una differenza di potenziale V , la loro energia cinetica sarà eV , e questa sarà anche l'energia massima dei quanti emessi. Dunque

$$h\nu_{\max} = eV.$$

La prima verifica sperimentale fu data nel 1915, da Duane e Hunt.

Einstein 1917

A differenza di quello del 1909, questo lavoro è largamente (e meritatamente) conosciuto. Il suo titolo è: “*La teoria quantistica della radiazione*” [4]. Nel lavoro E. affronta diverse questioni. La prima è la dimostrazione che si arriva alla formula di Planck facendo ipotesi “naturali, dal punto di vista della teoria dei quanti, sull'emissione e sull'assorbimento di radiazione da parte delle molecole.”

Le ipotesi sono:

- a) che gli stati di energia interna delle molecole sono quantizzati
- b) che in un gas in equilibrio a una temperatura T le molecole si distribuiscono fra i diversi stati secondo la legge di Boltzmann

$$W_n = p_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

dove ε_n sono i diversi livelli, p_n i loro “pesi statistici” (in seguito spiegati dalla meccanica quantistica come “degenerazioni”) e W_n le probabilità relative

- c) che una molecola può passare dallo stato di energia ε_m a uno di energia minore, ε_n , emettendo *spontaneamente* (“Ausstrahlung”) un quanto di radiazione di energia $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; la probabilità per unità di tempo di questo processo sia A_m^n

- d)* che può invece passare da ε_n a ε_m assorbendo un quanto della stessa energia, con probabilità (per unità di tempo) $B_n^m \varrho$, essendo ϱ la densità di energia della radiazione presente
- e)* che in presenza di radiazione può anche avvenire il processo inverso, da ε_m a ε_n (emissione *indotta* o *stimolata*), con probabilità per unità di tempo $B_m^n \varrho$.

I due processi *d)* ed *e)* sono chiamati da E. “Einstrahlung.” E. giustifica l'emissione indotta con l'analogia classica: un oscillatore investito da un'onda e.m. può assorbire energia da questa, oppure emetterla, a seconda della fase con cui oscilla. Dunque ci si aspetta che entrambi i processi siano presenti.

L'equilibrio richiede che i processi di assorbimento uguaglino quelli di emissione. Osservando che i coefficienti A e B dipendono solo dalla natura delle molecole e dai loro stati, mentre ϱ dipende solo dalla temperatura e dalla frequenza, si arriva subito ai seguenti risultati:

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n$$

$$\varrho = \frac{A_m^n / B_m^n}{\exp\left(\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}\right) - 1}. \quad (11)$$

Confrontando la (11) con la legge generale di Wien (1) si vede poi che dev'essere

$$A_m^n / B_m^n = \alpha \nu^3 \quad \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \quad (12)$$

con α , h costanti universali.

Infine, il confronto col limite di Rayleigh–Jeans fornisce il valore di α :

$$\alpha = \frac{8\pi h}{c^3}$$

mentre la seconda delle (12), interpretata come conservazione dell'energia, da una parte mostra che i quanti di radiazione hanno energia $h\nu$, dall'altra riproduce la legge con la quale Bohr aveva interpretato le righe spettrali.

Commento: È semplicemente impressionante quante cose E. riesca a tirar fuori da così poco!

Ma nel lavoro c'è di più: E. osserva che le molecole sono dotate di agitazione termica, e la loro interazione con la radiazione interferisce con questo moto: da un lato tende a frenarlo (vedremo subito perché) dall'altro lo eccita, attraverso i processi casuali di emissione e assorbimento.

Il frenamento è dovuto al fatto che una molecola che si muove “vede” venirsi incontro una radiazione d'intensità maggiore di quella che arriva da dietro,

e quindi la q . di moto che riceve (in assorbimento) o emette (in emissione stimolata) è diversa dalle due parti.

Qui E. osserva che quando una molecola assorbe radiazione da una certa direzione, riceve una q . di moto avente la stessa direzione e verso in cui viaggia la radiazione, e pari all'energia assorbita divisa per c . Invece nell'emissione indotta la molecola cede alla radiazione q . di moto nello stesso verso e direzione in cui questa si propaga.

Resta il problema dell'emissione spontanea: si deve supporre che non comporti scambio di q . di moto, come avviene classicamente, oppure questo sarà vero solo in media, mentre in ciascun atto di emissione c'è uno scambio di q . di moto non nullo?

E. conduce il calcolo dettagliato di tutti i processi, e impone che nell'insieme essi non alterino la distribuzione delle velocità delle molecole; in particolare, che resti inalterata la velocità quadratica media, nota dal teorema di equipartizione:

$$\frac{1}{2}M \overline{v^2} = \frac{1}{2}kT$$

per moti in una sola dimensione.

Nota: È interessante che qui per la prima volta E. introduce nella sua ricerca in materia di quanti di radiazione degli argomenti relativistici. Infatti questi sono necessari per trasformare frequenza, direzione e intensità della radiazione dal sistema di riferimento del "laboratorio" a quello in cui la molecola è momentaneamente in quiete.

Alla fine dei conti si dimostra che l'equilibrio e la distribuzione delle velocità sono mantenute purché

- a) la radiazione abbia una densità di energia data dalla legge di Planck
- b) in ogni singolo processo di emissione spontanea, la molecola emetta anche una q . di moto $h\nu/c$, in direzione casuale e con distribuzione isotropa.

E. scrive:

"La molecola subisce a causa del processo elementare di 'Ausstrahlung' un impulso di rinculo dell'entità $h\nu/c$ in una direzione che *nello stato attuale della teoria* [corsivo mio, E.F.] è determinata solo dal 'caso'."

È quasi superfluo sottolineare l'importanza di questo risultato: è chiaro come rafforzi l'idea del fotone come particella. Non solo il fotone è dotato di energia, ma ora possiede indubbiamente anche una q . di moto determinata, e legata all'energia come dev'essere per una particella di massa nulla. Però E. questo non lo dice; era troppo presto. . .

Sul carattere direzionale dell'emissione spontanea (E. parla di "Nadelstrahlung," irraggiamento aghiforme) dovremo tornare, per discuterlo dal punto di vista della meccanica quantistica.

L'effetto Compton

Un fenomeno che ebbe probabilmente un ruolo decisivo nell'affermazione dell'idea di fotone, è l'effetto Compton. Intorno al 1920 era già stato osservato, prima coi raggi γ (emessi nei decadimenti nucleari) e poi anche coi raggi X (radiazione di Bremsstrahlung da elettroni) che nella diffusione di queste radiazioni da parte degli atomi era presente, nella radiazione diffusa, una componente a lunghezza d'onda maggiore di quella incidente. Non esisteva però una spiegazione del fenomeno.

Nel 1923 Compton e Debye avanzano indipendentemente l'interpretazione quantistica: la diffusione consiste nell'urto elastico tra un fotone e un atomo. Più esattamente, l'interazione è tra il fotone e un *singolo* elettrone (così dice Compton). L'elettrone, inizialmente legato all'atomo, può essere considerato fermo, mentre dopo l'urto viene strappato dall'atomo e acquista un'apprezzabile energia cinetica. Di conseguenza il fotone perde energia nell'urto. (L'energia di legame dell'elettrone può essere trascurata, dato che è per ordini di grandezza minore dell'energia del fotone.)

Data la relazione tra energia, frequenza e lunghezza d'onda dei fotoni, si deve verificare un aumento della lunghezza d'onda della radiazione diffusa.

La formula è ben nota:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta). \quad (13)$$

La (13) discende esattamente dalla conservazione dell'energia e della q. di moto, usando le espressioni relativistiche.

Il calcolo è molto semplice: indichiamo con ε , ε' le energie del fotone prima e dopo l'urto; con E l'energia dell'elettrone dopo l'urto (quella prima è mc^2). Allora la conservazione dell'energia dà

$$\varepsilon + mc^2 = \varepsilon' + E \quad (14)$$

Se indichiamo con \vec{p} , \vec{p}' le q. di moto del fotone prima e dopo l'urto, e con \vec{q} quella dell'elettrone dopo l'urto, la conservazione della q. di moto si scrive

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{q}.$$

Da questa, scritta $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{q}$ e prendendo i quadrati dei moduli:

$$p^2 + p'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = q^2 \quad (15)$$

mentre la (14) fornisce

$$(\varepsilon - \varepsilon' + mc^2)^2 = E^2. \quad (16)$$

Ricordiamo ora che $\varepsilon = cp$, $\varepsilon' = cp'$, mentre $E^2 = m^2c^4 + c^2q^2$; allora moltiplicando la (15) per c^2 e sottraendola della (16) si arriva, dopo qualche semplificazione, a

$$pp' - \vec{p} \cdot \vec{p}' = mc(p - p').$$

Se ϑ è l'angolo al quale viene diffuso il fotone, si ha

$$1 - \cos \vartheta = mc \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)$$

e infine, usando $\lambda = h/p$, si arriva alla (13).

Compton verifica la (13) sperimentalmente, meglio dell'1%, nella diffusione di raggi X di circa 20 keV ($\lambda = 0.06$ nm) su grafite.

Il difficile cammino del fotone

Nel tempo dalla prima formulazione (1905), e per circa vent'anni, l'idea che poi sarebbe diventata "fotone" non ebbe mai buona accoglienza. Gran parte dei fisici pensavano che non si potesse rinunciare al carattere continuo del campo e.m., e che E. stavolta avesse preso una cantonata. Ecco due esempi.

Millikan nel 1916 scrive:

"L'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico [...] appare in ogni caso capace di prevedere esattamente i risultati delle osservazioni [...]. Tuttavia la teoria semicorpuscolare mediante la quale Einstein è pervenuto alla sua equazione sembra, allo stato attuale, del tutto insostenibile."

Planck, Nernst, Rubens e Warburg propongono nel 1913 la nomina di E. a membro dell'Acc. prussiana delle Scienze e scrivono:

"In breve, si può dire che non c'è quasi nessuno dei grandi problemi di cui la fisica moderna è così ricca al quale Einstein non abbia dato un contributo rilevante. Che possa a volte aver mancato il bersaglio nelle sue congetture, come, per esempio, nel caso dell'ipotesi dei quanti di luce, non può essere in realtà considerato troppo grave: è impossibile infatti introdurre idee veramente nuove, neppure nelle più esatte delle scienze, senza correre a volte qualche rischio."

A dire il vero lo stesso E. prese in considerazione l'idea che si potessero spiegare i fenomeni in altro modo, abbandonando la conservazione dell'energia negli atti elementari di emissione e assorbimento; però la scartò ben presto: la conservazione dell'energia gli pareva una legge troppo fondamentale. L'ipotesi fu considerata anche da altri, per es. Nernst, Sommerfeld.

Più avanti si spinsero Bohr, Kramers e Slater, i quali nel 1924 (quindi a effetto Compton già verificato) affermarono che l'energia si conserva solo in media, ma non nella singola transizione di un elettrone da un livello a un altro di un atomo.

Aggiunsero anche un'altra ipotesi, per spiegare il carattere casuale nel tempo dell'emissione spontanea. Si doveva ammettere l'esistenza di un "campo e.m. virtuale," che interagiva con gli elettroni come quello reale. L'emissione spontanea era causata dal campo virtuale allo stesso modo come quella indotta lo era dal campo reale. (È forse interessante notare che quest'ipotesi ricorda piuttosto da vicino il modo come l'emissione spontanea si spiega secondo l'elettrodinamica quantistica. . .)

E. si opponeva recisamente alla proposta BKS, ma il verdetto arrivò da altri esperimenti. Nel 1925 Bothe e Geiger dimostrano che nell'effetto Compton il fotone e l'elettrone vengono emessi insieme (entro 1 ms, in quegli esperimenti). Ma decisivo è l'esperimento di Compton e Simon (1925) [5] in cui, usando una camera di Wilson, si riesce a rivelare tanto la traiettoria dell'elettrone quanto quella del fotone, verificando così in modo diretto la conservazione della q. di moto (fig. 1).

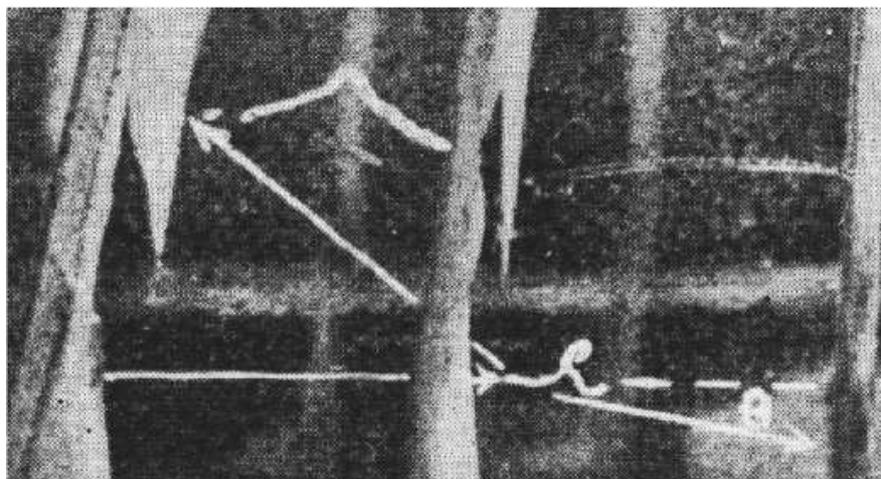


fig. 1

Spiegazione della fig. 1: Il percorso dei fotoni, che sono particelle neutre, non è direttamente visibile. Però la direzione dei fotoni incidenti è nota, e la freccia orizzontale da sinistra a destra indica tale direzione. Il ricciolo che inizia dalla punta della freccia è la traccia lasciata dall'elettrone urtato, e la freccia obliqua verso destra è presa tangente alla traccia alla partenza.

La freccia che sale verso sinistra indica la direzione del fotone diffuso, che viene riconosciuto perché a un certo punto (estremità della freccia) produce un secondo elettrone.

A questo punto l'idea del fotone come particella, dotata di energia e q. di moto, entra ormai incontrastata nella fisica. Il nome "fotone" nasce nel 1926, per opera del chimico fisico Lewis, che proponeva una sua teoria della luce, presto dimenticata. Però il famoso Congresso Solvay del 1927 aveva già per tema: "elettroni e fotoni."

SECONDA PARTE

Fotoni e paradigmi

Una difficoltà nel delineare una storia dell'idea di fotone è che essa attraversa almeno 4 paradigmi della fisica, di conseguenza cambiando contenuto e significato. I paradigmi sono:

- 1) l'elettromagnetismo classico e la teoria elettronica di Lorentz
- 2) la “vecchia” teoria dei quanti
- 3) la meccanica quantistica
- 4) l'elettrodinamica quantistica.

Il ruolo dei fotoni e della radiazione e.m. è assai diverso nei 4 paradigmi: cerchiamo di descriverlo, anche se di necessità in modo assai sommario.

1. *L'elettromagnetismo classico e la teoria elettronica di Lorentz*

Nella teoria di Maxwell–Lorentz le onde e.m. sono campi continui, che interagiscono con le cariche (essenzialmente gli elettroni) attraverso la ben nota legge di forza. L'emissione spontanea si spiega bene, in quanto una carica accelerata irraggia: questo vale per es. per la già ricordata Bremsstrahlung (raggi X da frenamento) ma anche per l'irraggiamento da parte degli elettroni atomici. La spiegazione funziona anche nei dettagli (distribuzione spaziale, polarizzazione) e pure per l'effetto Zeeman cosiddetto “normale”.

Va anzi ricordato che l'accordo della separazione in frequenza osservata con quella dedotta dalla teoria, che prevede $eB/(4\pi mc)$, costituì a fine '800 un forte argomento a favore dell'esistenza di elettroni negli atomi: infatti il rapporto e/m calcolato dall'effetto Zeeman coincideva con quello misurato direttamente negli esperimenti di deflessione di elettroni (raggi catodici).

Anche l'assorbimento di radiazione si spiega col modello lorentziano di oscillatore smorzato; lo stesso vale per la diffusione (scattering Thompson) come intensità e come distribuzione angolare. La teoria classica è pure in grado di prevedere l'emissione indotta (ne abbiamo parlato sopra, a proposito del lavoro di Einstein del 1917).

Viceversa la teoria classica si mostra impotente a spiegare il dettaglio delle righe spettrali, per es. la serie di Balmer nello spettro dell'idrogeno. E una volta che gli esperimenti di Rutherford, Geiger e Marsden (1909–1911) avranno portato al modello “planetario” per l'atomo, sorgerà un'altra difficoltà: secondo la teoria classica un tale modello *non può essere stabile*, in quanto gli elettroni dovrebbero perdere energia irraggiando, fino a cadere sul nucleo.

Ovviamente in questo paradigma i fotoni *non possono esistere*: è qui la ragione della ricordata resistenza che per lungo tempo fu opposta alle idee di Einstein.

2. La vecchia teoria dei quanti

Anche nella “vecchia” teoria dei quanti, che nasce con Bohr nel 1913, i fotoni sono un problema, in quanto la teoria postula l’esistenza di stati energetici discreti degli atomi e assume che la radiazione venga emessa e assorbita nelle transizioni tra questi stati; ma tali transizioni sono misteriose, dal momento che la teoria e.m. non è cambiata. Niente dice a che istante verrà emesso o assorbito un fotone, in che direzione. . .

L’unica via d’uscita, o se vogliamo l’unico criterio d’orientamento, è il *principio di corrispondenza*: per alti numeri quantici la teoria quantistica deve ricondursi a quella classica, quindi intensità e polarizzazione della radiazione emessa o assorbita debbono concordare con quelle previste dall’e.m. di Maxwell–Lorentz.

Ricordiamo che la vecchia teoria dei quanti è vissuta solo circa 10 anni: si tratta quindi di una teoria di transizione, sulla quale non occorre insistere.

3. La meccanica quantistica

Anche la m.q. ignora i fotoni. Infatti è solo la meccanica degli elettroni che viene modificata (equazione di Schrödinger) mentre il campo e.m. resta descritto dalle equazioni di Maxwell.

Emissione e assorbimento indotto si trattano introducendo nell’equazione di Schrödinger per gli elettroni atomici i termini dovuti al “campo esterno” dell’onda e.m. Questi termini (perturbazioni) fanno sì che gli stati stazionari dell’atomo non siano più tali, ma si abbiano invece transizioni in aumento oppure in diminuzione dell’energia, che vengono interpretate appunto come assorbimento oppure emissione indotta.

La regola di Bohr $E_2 - E_1 = h\nu$ è automaticamente verificata. Anche le distribuzioni spaziali della radiazione emessa, le regole di selezione sulla polarizzazione, le intensità delle righe si spiegano correttamente.

Invece l’emissione spontanea è semplicemente impossibile: se non è presente un campo esterno e l’atomo si trova in uno stato stazionario, anche eccitato, ci rimane indefinitamente. Questo è il limite della m.q. in senso stretto.

Fino alla creazione dell’elettrodinamica quantistica il problema dell’emissione spontanea veniva aggirato basandosi sul lavoro di Einstein (1917). Infatti la m.q. permette di calcolare i coefficienti B , e la prima delle (12) fornisce allora anche gli A .

4. L’elettrodinamica quantistica (QED)

La QED nasce a brevissima distanza dalla fondazione della m.q. (Jordan–Pauli–Wigner, 1927–28) proprio per superare i limiti che ho appena accennati. Non è qui possibile affrontarne una descrizione anche sommaria; mi limito perciò a ricordare l’idea centrale, che può essere vista come un nuovo paradigma nella fisica quantistica.

L'idea è di “quantizzare” il campo e.m. così come sono stati quantizzati in m.q. tutti i sistemi meccanici (es. atomi). Si parte da un'analogia formale: un campo e.m. può essere trattato come un sistema di (infiniti) oscillatori armonici, uno per ogni “modo normale” del campo. Dopo di che si trattano questi oscillatori come sistemi meccanici applicando la m.q., e per ciascuno si trovano autovalori discreti ed equidistanti per l'energia. Lo stato corrispondente all'autovalore n -mo ($n = 0, 1 \dots$) viene interpretato come uno stato in cui in quel modo normale sono presenti n quanti, ossia fotoni. Lo stato in cui $n = 0$ per ogni modo normale è il *vuoto*.

Ciò posto, l'interazione fra atomo e radiazione viene trattata considerando il sistema quantistico formato dall'atomo e dal campo e.m. quantizzato. In assenza d'interazione, atomo e campo avrebbero ciascuno i propri stati stazionari: quelli dell'atomo sono i soliti, quelli del campo sono gli stati descritti sopra, in cui sono presenti un dato numero di fotoni per ogni modo normale.

Possiamo avere ad es.:

- a) l'atomo nello stato fondamentale, e il campo nello stato di vuoto;
- b) l'atomo in uno stato eccitato, e il campo nello stato di vuoto;
- c) l'atomo in uno stato stazionario qualsiasi, e il campo nello stato in cui sono presenti n fotoni di data energia e impulso. . .

Ma a causa dell'interazione tutti questi stati, a eccezione del primo, non sono più stazionari, e diventano possibili delle transizioni. Si ritrovano così i risultati della m.q. per quanto riguarda assorbimento ed emissione indotta, che hanno luogo a partire dallo stato *c*), quando l'atomo sale o scende di livello, mentre il campo passa rispettivamente a $n - 1$ oppure a $n + 1$ fotoni. In questa situazione la regola di Bohr esprime semplicemente la conservazione dell'energia per il sistema complessivo atomo + campo.

Ora però è possibile anche l'emissione spontanea, come transizione dallo stato *b*) a quello con atomo in un livello inferiore e campo con un fotone presente. Le relazioni di Einstein (12) tra i coefficienti A e B sono *conseguenza* della teoria, e non debbono più essere postulate a parte.

Nota: Come già detto, in QED i fotoni sono descritti come particelle (“quanti” del campo) e possono avere impulso e polarizzazione definite; ma come ogni sistema quantistico possono anche essere in stati sovrapposizione. Su questo torneremo più avanti.

Indicazione bibliografica: Una presentazione divulgativa delle proprietà quantistiche dei fotoni e della QED si trova nelle mie pagine HTML [6][7][8]. È inoltre d'obbligo consigliare lo studio delle prime due lezioni di Feynman, pubblicate appunto col titolo *QED* [9] (solo le prime due, perché le successive si propongono un obiettivo a mio giudizio troppo ambizioso per il livello di trattazione a cui sono tenute).

I fotoni hanno sempre energia $h\nu$ e impulso $h\nu/c$?

La risposta alla domanda del titolo è: non è detto, anzi in generale no. In generale un fotone non ha un valore esattamente definito né per l'energia, né per l'impulso; inteso quest'ultimo anche come vettore.

Energia: Consideriamo un livello atomico eccitato con vita media τ : una transizione a un livello inferiore, di frequenza (nominale) ν conterrà $N \simeq \nu\tau$ cicli, e quindi l'incertezza relativa della frequenza sarà

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1}{N} \simeq \frac{1}{\nu\tau}.$$

La stessa incertezza relativa avrà l'energia:

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{1}{\nu\tau}.$$

Esempi: Per una transizione in luce gialla ($\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz) con vita media 1 ns si ha $N = 5 \cdot 10^5$; quindi

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq 2 \cdot 10^{-6}.$$

Oggi si sanno realizzare impulsi con $N \simeq 10$, quindi con

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq 0.1.$$

Una prova ancora più significativa del fatto che un fotone può avere energia non definita la vedremo più avanti (“quantum beats”).

Impulso: Basta pensare all'esperimento di Young (fig. 2).

Dopo la prima fenditura il fotone non ha una direzione determinata: infatti questa fenditura ha proprio lo scopo di produrre una diffrazione così ampia che la radiazione diffratta veda entrambe le fenditure A e B. In termini di onde la cosa si capisce senza difficoltà, ma se pensiamo a un singolo fotone l'esigenza che esso “veda” entrambe le fenditure vale ancora, altrimenti non si potrà avere interferenza.

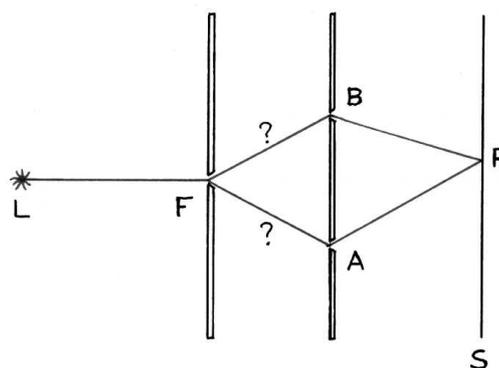


fig. 2

Dunque l'impulso può essere molto ben definito in modulo (l'incertezza relativa sarà la stessa dell'energia) e al tempo stesso essere mal definito quanto alla direzione.

Peggio ancora se un atomo isolato emette un fotone: al contrario di ciò che pensava E. (la “Nadelstrahlung”) il fotone è distribuito in tutto lo spazio. Una bella dimostrazione è data dall’esperimento che a me piace chiamare “l’atomo davanti allo specchio”: lo vedremo più avanti.

I fotoni sono strani

Alcune proprietà “strane” dei fotoni avrebbero potuto essere notate fin dagli inizi. Vediamo.

L’esperimento di Taylor: da che parte passa il fotone?

G.I. Taylor [10] su suggerimento di J.J. Thomson fotografa nel 1909 la figura di diffrazione di un ago (fig. 3) in condizioni di bassa intensità (densità di energia stimata in $1.6 \cdot 10^{-16}$ erg/cm³). Con un’intensità così bassa, e con le emulsioni fotografiche del tempo, la fotografia richiese ben tre mesi!

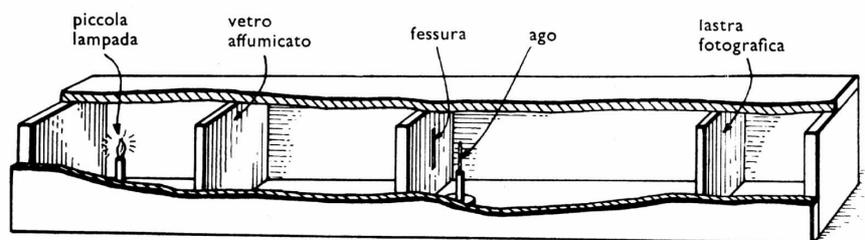


fig. 3

Taylor non trova nessuna differenza rispetto alle fotografie a intensità normale, e conclude:

“Secondo Sir J.J. Thomson questo valore [$1.6 \cdot 10^{-16}$ erg] pone un limite superiore alla quantità di energia contenuta in una delle unità indivisibili sopra menzionate.”

Le “unità indivisibili” sarebbero in sostanza i “quanti” di Einstein. Invece l’energia dei quanti di E. in luce visibile è attorno a $3 \cdot 10^{-12}$ erg; quindi l’esperimento di Taylor sarebbe una confutazione dell’idea di E.

Possiamo però vedere la cosa da un altro punto di vista: a quella densità di energia un quanto dovrebbe occupare un volume di $2 \cdot 10^4$ cm³ (20 litri). Nello spazio tra la fenditura e la lastra non potrebbe quindi esserci più di un quanto alla volta.

Per questo motivo oggi l’esperimento di Taylor viene citato per mostrare che la diffrazione viene prodotta da ciascun singolo fotone, e che quindi questo deve in qualche modo “passare contemporaneamente” da entrambi i lati dell’ago, contrariamente all’idea di E. della “emissione aghiforme.”

Le fluttuazioni

Come abbiamo già visto, nello stesso anno 1909 E. calcola le fluttuazioni dell'energia in una cavità, e trova che esse constano di due termini, uno dei quali ha un'interpretazione ondulatoria e l'altro un'interpretazione corpuscolare.

Il risultato pone un evidente problema: come fanno a coesistere nella stessa formula un termine "ondulatorio" e uno "corpuscolare"?

Si ha qui un'anticipazione del famoso (famigerato) *dualismo onda-corpuscolo*. . . In effetti la presenza di due termini nelle fluttuazioni troverà spiegazione in una teoria organica solo con l'*elettrodinamica quantistica*.

La statistica di Bose: i fotoni sono indistinguibili.

Bose nel 1924 trova che si può arrivare alla formula di Planck se si tratta la radiazione come un gas di fotoni, ma a patto di calcolare il numero di microstati in base solo a quanti fotoni ci sono in ogni cella dello spazio delle fasi, di volume h^3 .

Einstein applica lo stesso procedimento ai gas ordinari, e di fronte alle critiche di Ehrenfest e altri ammette di aver dovuto fare implicitamente "una ben definita ipotesi di una reciproca influenza fra le molecole," per il momento "di natura affatto misteriosa."

Nel 1926 Dirac capirà che in realtà si tratta solo dell'indistinguibilità delle molecole (o dei fotoni) che obbliga a considerare unico in m.q. il microstato di N particelle identiche.

Fotoni e interferenza

Il comportamento "strano" dei fotoni si manifesta soprattutto nell'interferenza. L'interferenza con due fenditure (Young) è molto vicina all'esperimento di Taylor. Anche in questo caso ci si chiede: dov'è passato il fotone? Abbiamo già visto che non si può parlare di "Nadelstrahlung": per avere interferenza occorre che il fotone possa "vedere" insieme entrambe le strade (A e B in fig. 4), quindi è tutt'altro che direzionale.

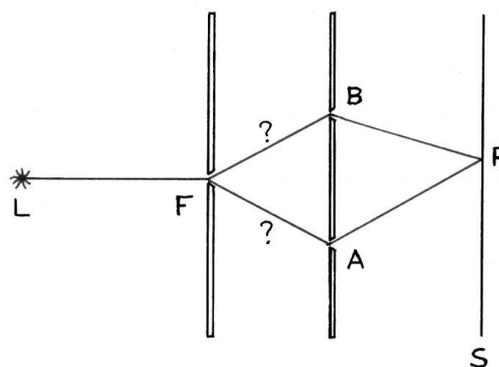


fig. 4

Un altro esempio è l'interferometro di Mach-Zehnder (fig. 5) nel quale un unico fascio di luce emesso dalla sorgente S viene diviso da un primo specchio semitrasparente (beam splitter) A e poi ricombinato da un secondo, in C, per arrivare al rivelatore R. Qui si ha una separazione spaziale, anche grande, di due cammini permessi al fotone. Perché si abbia interferenza, bisogna che il fotone

possa passare *insieme* per entrambi i cammini. In questo caso non è in discussione la direzionalità dei fotoni, ma il fatto se si dividano o no sullo specchio semiriflettente.

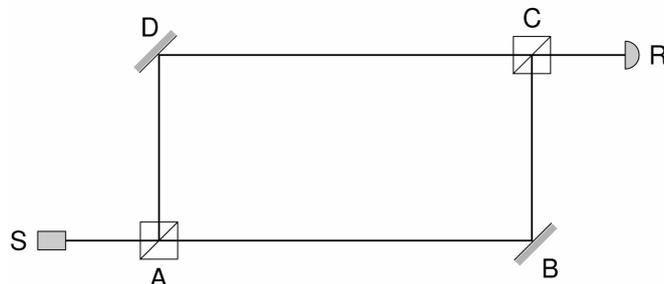


fig. 5

Nota: Attenzione al significato della parola “dividano”: non si deve pensare che “mezzo fotone” segua un cammino, e l’altra metà segua l’altro; in questo senso i fotoni (quanti) sono *indivisibili*. La divisione di cui si parla è un comportamento “strano” tipico dei sistemi quantistici: formalmente, si traduce in uno stato *sovrapposizione*, ma una rappresentazione in termini intuitivi, secondo i paradigmi dell’esperienza comune, è impossibile.

Supponiamo di mandare un certo numero di fotoni, poniamo 100, uno a uno nell’interferometro. Per cominciare, interponiamo un ostacolo opaco nel tratto DC: allora il numero di fotoni che si conteranno nei vari punti è quello indicato in fig. 6. In particolare, si vede che solo 1/4 dei fotoni arrivano al rivelatore.

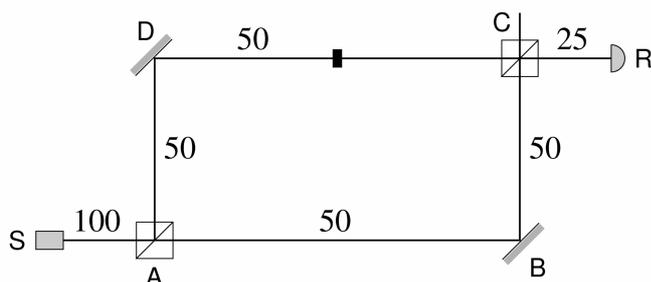


fig. 6

Nota: Qui e in seguito quando scrivo numeri, o una frazione come “1/4,” si deve intendere “in media”: in un singolo esperimento con piccoli numeri i risultati possono fluttuare, come ben noto.

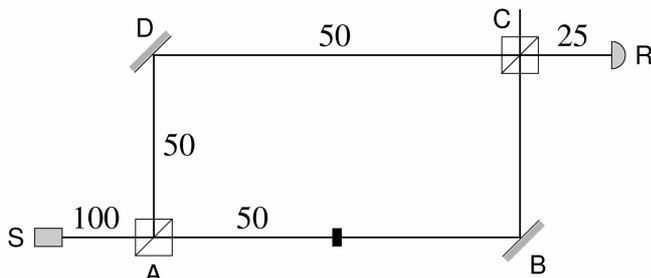


fig. 7

Se l’ostruzione viene posta nel tratto AB (fig. 7) il risultato è lo stesso: solo 1/4 dei fotoni arrivano in R.

Ed ecco ora il comportamento strano dei fotoni: se non c’è nessuna ostruzione (fig 8), sì che entrambi i percorsi sono permessi, chiunque si aspetterebbe

(molti direbbero, sbagliando, “su basi puramente logiche”) che il numero di fotoni rivelati in R sia $25 + 25 = 50$. Invece l’esperienza mostra che se l’interferometro è geometricamente

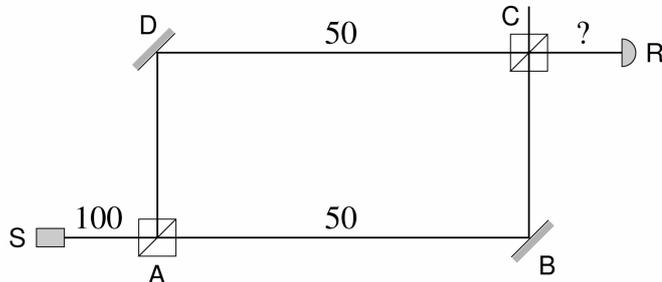


fig. 8

perfetto (ABCD è un rettangolo) *tutti* i fotoni emessi da S arrivano in R. Se invece c’è una piccola differenza di cammino tra i due percorsi (dell’ordine della lunghezza d’onda della luce, come sapete) il numero di fotoni rivelati da R può essere un qualsiasi numero tra 0 e 100.

Di più: niente c’impedisce di disporre un secondo rivelatore in R’ (fig. 9): in questo caso l’esperienza mostra che la somma dei fotoni rivelati è sempre 100, e ciascun fotone “sceglie” uno e uno solo dei rivelatori, *in modo casuale*. Cambiando la geometria cambia però la proporzione tra i conteggi dei due rivelatori: se R conta 100, R’ conta 0 e viceversa; se R conta 60, R’ conta 40, ecc.

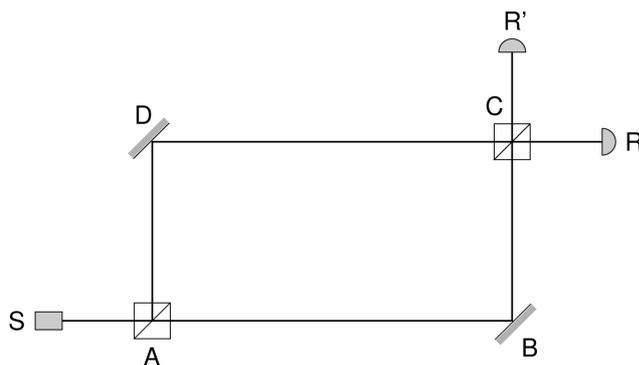


fig. 9

Tutte queste “stranezze” obbligano a dire che un fotone non è sempre *localizzato*, né *direzionale*. Ma non solo questo: la dipendenza del risultato in un esperimento d’interferenza (es. Mach-Zehnder) da piccole variazioni nella differenza dei due cammini, ci obbligano a convenire che un fotone porta con sé un’informazione relativa alla sua *fase*: è quello che (forse impropriamente) si chiama “comportamento ondulatorio.”

Per quanto riguarda la localizzazione dei fotoni, ancora più impressionanti sono gli esperimenti d’interferometria stellare: vediamone un cenno.

L’interferometro stellare di Michelson e i radiointerferometri

Il primo interferometro stellare fu realizzato nel 1920 per misurare i raggi delle stelle, troppo piccoli (le stelle sono troppo lontane) per poterli risolvere con un telescopio.

La disposizione dell’interferometro si vede in fig. 10: si ottiene interferenza fra la luce proveniente dalla stella Σ e che colpisce i due specchietti estremi. Questi nel primo interferometro di Michelson distavano fino a 5 metri.

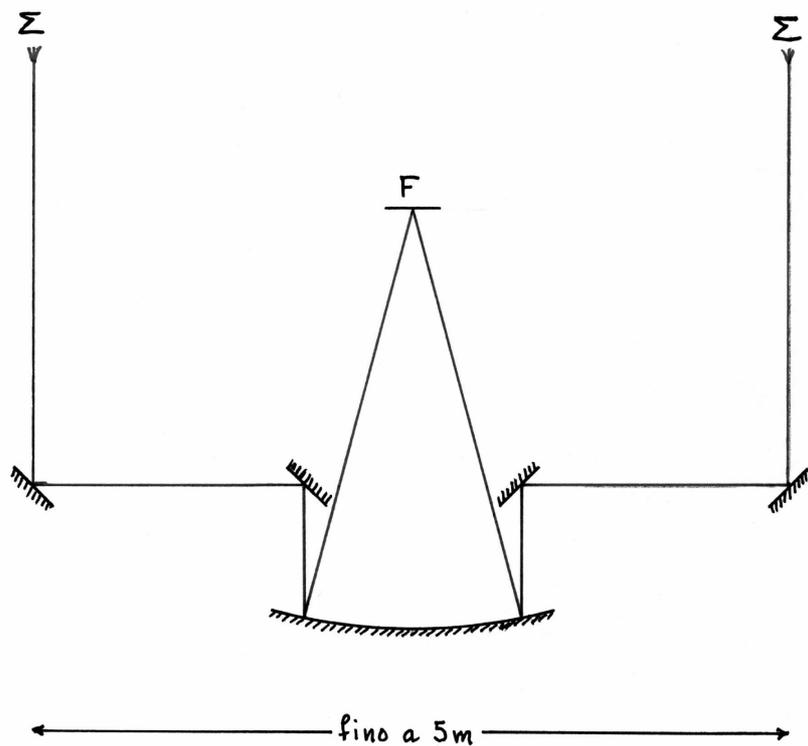


fig. 10

Per non deviare dal nostro tema, rinuncio a descrivere come l'interferometro permetta di misurare il raggio di una stella. M'interessa invece sottolineare il semplice fatto che un effetto d'interferenza sia possibile. L'esperimento di Taylor ci ha insegnato che l'interferenza è affare del singolo fotone: di conseguenza in questo caso un fotone si deve estendere per almeno 5 metri in senso trasversale alla sua propagazione.

In anni più recenti la radiointerferometria a larghissima base (VLBI) ha fatto ben altro: si osserva interferenza tra radiotelescopi distanti migliaia di km. Qui si lavora nel campo radio e non nel visibile, ossia con lunghezze d'onda almeno 4 ordini di grandezza maggiori; ma sempre di fotoni si tratta, e per poter avere interferenza in un tale strumento, ciascun fotone si deve estendere per migliaia di km. . .

L'atomo davanti allo specchio

Negli anni '60 Drexhage e coll. eseguirono una serie di esperimenti sfruttando una tecnica che permetteva tra l'altro di porre strati monomolecolari di materiale fluorescente a distanze controllate da una superficie riflettente [11].

In uno di questi esperimenti si realizzava la situazione che possiamo così schematizzare (fig. 11): un atomo A è posto in vicinanza di uno specchio S. L'atomo viene eccitato, e torna allo stato fondamentale emettendo un fotone,

che viene rivelato in R. Il rivelatore R in realtà sta molto lontano e può ricevere i fotoni emessi da parecchi atomi, ciascuno indipendentemente dall'altro. Quello che viene misurato è il numero di fotoni ricevuti in R in funzione della posizione del rivelatore e del tempo, per diverse distanze degli atomi dallo specchio.

È chiaro che ciascun fotone può andare da A a R per due vie: quella diretta e quella che comporta una riflessione su S. Se l'emissione fosse "aghiforme" le due vie sarebbero indipendenti, si sommerebbero le probabilità, e il numero di fotoni ricevuti in R non dovrebbe dipendere né dalla direzione AR né dalla distanza atomo-specchio. Anche la dipendenza dal tempo, ossia la vita media dello stato eccitato, dovrebbe riuscire indipendente da questa distanza. Invece l'esperimento mostra tutt'altro: il numero di fotoni che arrivano in R ha un tipico andamento da interferenza, e anche la vita media risulta variare in modo oscillante con la distanza dell'atomo dallo specchio.

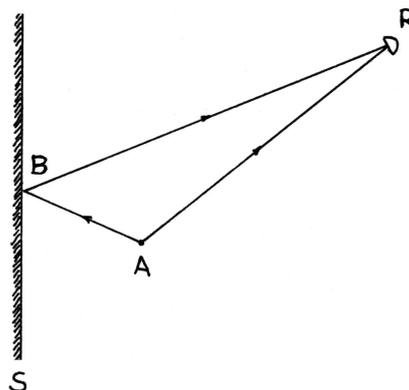


fig. 11

Il tutto si spiega perfettamente se si ammette che il fotone emesso non abbia una direzione definita, ma al contrario percorra *insieme* le due strade AR e ABR. Si può fare il calcolo in tutti i dettagli secondo l'approccio di Feynman [9]: ai due percorsi del fotone si associano due *ampiezze* che vanno sommate prima di calcolare il modulo quadrato che darà la probabilità di rivelazione. Per brevità mi limito a questa considerazione semiquantitativa.

Quanto alla vita media, la spiegazione è la stessa: la probabilità totale che un fotone venga emesso in un dato intervallo di tempo è l'integrale delle probabilità di rivelarlo in tutte le possibili direzioni. Se queste risentono di un effetto d'interferenza da parte dello specchio, non è strano che anche la probabilità totale dipenda dalla distanza dello specchio dall'atomo.

Per una spiegazione un po' più approfondita rimando all'articolo citato [11]. Qui ci basta osservare che anche gli esperimenti di Drexhage obbligano ad ammettere che un fotone produce interferenza anche in condizioni in cui ciò richiede un'evidente mancanza di direzionalità nella propagazione del fotone stesso. Anzi: questa "non direzionalità" è condizione necessaria perché l'interferenza abbia luogo.

Quando i fotoni sono due ...

Intorno al 1954 R. Hanbury Brown propose una modifica all'interferometro stellare, in cui anziché rivelare direttamente l'interferenza, si sarebbero dovute vedere le coincidenze tra due fotoni, rivelati separatamente da due fotomoltiplicatori situati nel fuoco di due distinti telescopi (fig. 12).

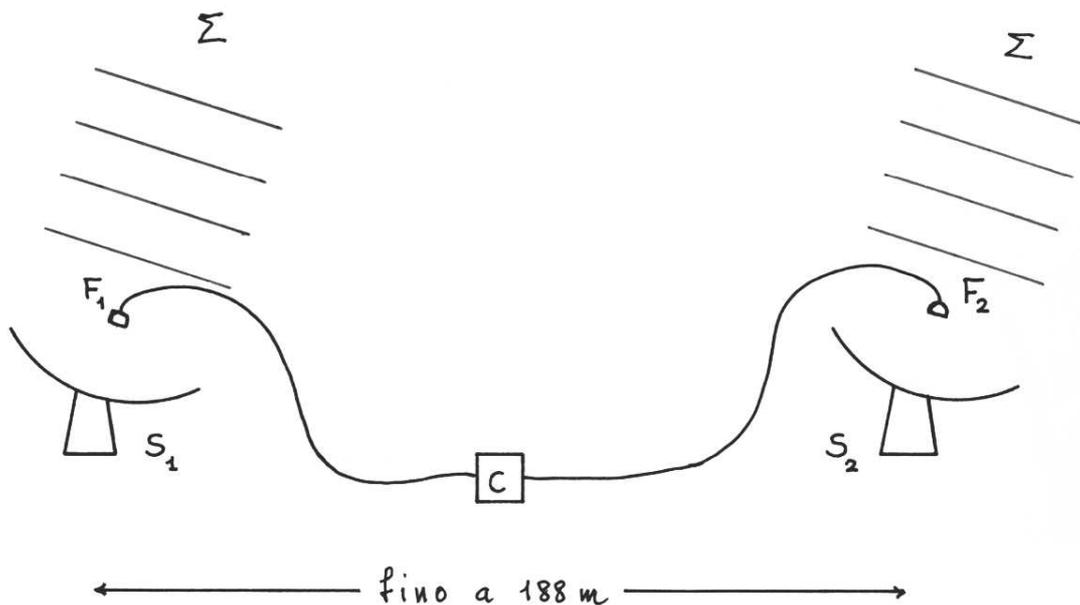


fig. 12

L'idea incontrò inizialmente forte opposizione, in quanto giudicata assurda. Tuttavia il primo strumento entrò in funzione nel 1965 a Narrabri (Australia) con una base di oltre 180 metri, e riuscì a determinare i diametri di stelle fino allora non misurabili.

Lo strumento di Hanbury Brown è noto col nome di “interferometro a intensità”: vediamo perché. In un radiointerferometro la disposizione sperimentale consiste di due radiotelescopi con due antenne; la spiegazione del funzionamento è molto più semplice se la si vede da un punto di vista classico. Le correnti indotte nelle due antenne dal campo della radiazione incidente vengono inviate, per mezzo di cavi coassiali, a un circuito che le somma e fornisce l'intensità di questa somma. Il segnale rivelato è dunque variabile col variare della fase relativa dei segnali sulle due antenne, e per questo si può dire che il radiointerferometro lavora sulle *ampiezze* (campi).

Nel caso dello strumento di Hanbury Brown, invece, i rivelatori si trovano nel fuoco di due telescopi (ottici). Se vogliamo ragionare in termini classici, le correnti prodotte nei due rivelatori sono proporzionali alle *intensità* delle onde ricevute, non alle ampiezze. Le due correnti vengono inviate al *circuito di correlazione* C, che ne analizza le fluttuazioni: ecco dunque che l'interferenza si manifesta sulle *intensità*, anziché sulle ampiezze.

Per noi è più interessante vedere lo strumento da un punto di vista quantistico, pensando ai singoli fotoni ricevuti. La descrizione classica è naturale quando il numero di fotoni ricevuti è così alto da dar luogo nei fotomoltiplicatori a una corrente costante (a parte piccole fluttuazioni); invece la descrizione quantistica

s'impone nel caso di segnali deboli, ossia quando i fotoni rivelati danno luogo a impulsi di corrente ben distinti uno dall'altro. Allora il circuito C andrà visto come un *circuito di coincidenza*, e il nostro problema sarà appunto di calcolare la probabilità di una coincidenza, in funzione dei parametri del sistema.

Il modo più semplice per capire l'interferometro a intensità è ancora una volta il ragionamento alla Feynman. Consideriamo il caso di due sorgenti puntiformi, A e B (fig. 13). L'ampiezza per la propagazione di un fotone da A allo specchio 1 è $\exp(ik r_{A1})$. Analogamente, per un fotone da B a 2: $\exp(ik r_{B2})$. L'ampiezza per l'insieme dei due fotoni è il prodotto:

$$\exp[ik(r_{A1} + r_{B2})].$$

Esiste però anche l'alternativa che il fotone emesso da A vada in 2, e quello emesso da B vada in 1: questo processo ha ampiezza

$$\exp[ik(r_{A2} + r_{B1})].$$

Ma i due fotoni sono indistinguibili, quindi le due ampiezze vanno sommate:

$$\exp[ik(r_{A1} + r_{B2})] + \exp[ik(r_{A2} + r_{B1})]$$

(sommate perché i fotoni sono bosoni; se fossero fermioni, andrebbero sottratte).

La probabilità di una coincidenza è proporzionale al quadrato del modulo dell'ampiezza totale:

$$|\exp[ik(r_{A1} + r_{B2})] + \exp[ik(r_{A2} + r_{B1})]|^2. \quad (17)$$

Il resto è solo calcolo. Si assume che la distanza a fra i rivelatori, e quella fra le sorgenti, siano molto minori della distanza delle sorgenti da noi, e si arriva a

$$4 \cos^2\left(\frac{1}{2} ka \varepsilon \sin \vartheta\right) \quad (18)$$

dove gli angoli ϑ , ε sono quelli indicati in figura.

La (18) mostra che al variare di a la probabilità di una coincidenza passa per massimi e minimi: dalla misura di questi, noti k e ϑ , si ricava ε e quindi la distanza tra le sorgenti.

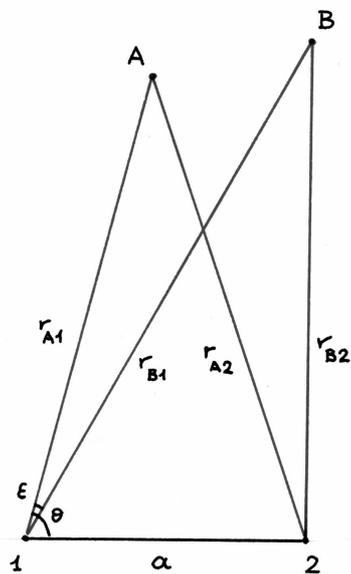


fig. 13

Esercizio: La distanza di Sirio è circa $8 \cdot 10^{13}$ km. Quanto misura il suo diametro, se il primo minimo delle coincidenze si trova per $a = 6$ m? (Si prendano le sorgenti A e B agli estremi di un diametro.)

Gli stati intrecciati e l'esperimento di Aspect⁽¹⁾

La descrizione quantistica di sistemi formati di due o più parti componenti presenta degli aspetti peculiari che hanno fatto discutere i fisici almeno dal tempo del famoso lavoro di Einstein–Podolski–Rosen [12]: la discussione dura tuttora. Anche solo accennare a questa tematica ci porterebbe troppo lontano, ma non si può fare a meno di ricordare sviluppi anche sperimentali abbastanza recenti, che riguardano sistemi di due fotoni.

Un sistema di due fotoni in uno stato intrecciato è infatti un caso particolare del problema posto da EPR, e abbiamo già visto che per interpretare l'interferometro a intensità è necessario far ricorso a stati di questo tipo. Infatti non si può dire che il fotone emesso da A è stato rivelato in 1, e quello emesso da B è stato rivelato in 2: occorre anche considerare la situazione scambiata, e non ci si può neanche accontentare di sommare le probabilità dei due processi:

$$(A \rightarrow 1) \text{ e } (B \rightarrow 2) \quad (A \rightarrow 2) \text{ e } (B \rightarrow 1).$$

Se si facesse questo, invece della (17) avremmo

$$|\exp[ik(r_{A1} + r_{B2})]|^2 + |\exp[ik(r_{A2} + r_{B1})]|^2 = 2$$

e non ci sarebbe nessuna interferenza.

Tuttavia l'evidenza sul comportamento degli stati intrecciati nell'interferometro a intensità è piuttosto indiretta: in primo luogo perché i fotoni provengono da una stella e non sono sotto il nostro controllo. È perciò importante produrre una situazione sperimentale ben controllata, dove l'effetto dell'intreccio sia osservabile in modo più diretto. La versione più raffinata di questo esperimento è stata realizzata da Aspect e coll. nel 1982 [13].

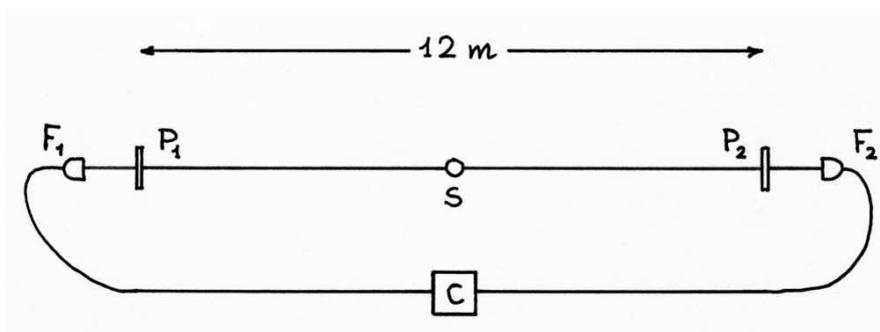


fig. 14

Quella che segue è una descrizione assai schematica e semplificata dell'esperimento (fig. 14). Due fotoni sono emessi dalla sorgente S (un atomo di

⁽¹⁾ Ho tradotto con “intrecciato” il termine inglese “entangled,” che vorrebbe dire piuttosto “ingarbugliato,” “impossibile da sciogliere.” Però, anche se rende meno l'idea, “intrecciato” mi sembra più scorrevole.

calcio 40) in uno stato di momento angolare nullo (per il sistema dei due fotoni: fig. 15). I fotoni attraversano due polarizzatori P_1 e P_2 e vengono rivelati dai fotomoltiplicatori F_1 e F_2 .

Si può dimostrare che in conseguenza dello stato di momento angolare dato le polarizzazioni dei fotoni debbono essere sempre parallele: se una è verticale, lo è anche l'altra; idem se sono orizzontali o in qualunque altra direzione. Però al tempo stesso *nessuno dei due fotoni*, preso da solo, *ha polarizzazione determinata*: comunque si orienti il polarizzatore P_1 , si vede che esso lascia passare metà dei fotoni emessi nella direzione SP_1 , e lo stesso vale per P_2 .

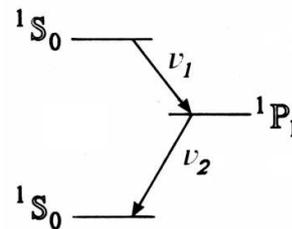


fig. 15

Il sistema dei due fotoni è dunque in uno stato intrecciato, che non può essere descritto indicando *separatamente* lo stato dell'uno e dell'altro fotone: una tipica situazione quantistica. Deve esserci tuttavia una correlazione: se i due polarizzatori sono entrambi verticali, quando P_1 lascia passare un fotone (rivelato da F_1) anche F_2 rivelerà un fotone, ecc. Che le cose vadano così, può essere provato osservando le coincidenze in C. Gli esperimenti confermano la previsione.

Nell'esperimento di Aspect i polarizzatori erano separati di 12 metri, e potevano essere orientati a caso, molto rapidamente. Il risultato dell'esperimento obbliga ad ammettere che due fotoni emessi insieme, in uno stato intrecciato, "ricordano" il loro stato complessivo anche quando sono separati da una distanza tale che nessun segnale (che viaggi a velocità non superiore a c) può più andare dall'uno all'altro. Si può facilmente immaginare quante discussioni siano state originate da esperimenti del genere; ma qui non possiamo insistere.

I battimenti quantistici

L'ultimo esempio di "stranezza" riguarda singoli fotoni, e si collega con la discussione fatta circa l'averne un fotone energia sempre definita o no. I battimenti del titolo ("quantum beats") si presentano in esperimenti in cui si studia l'andamento nel tempo nell'emissione di fotoni da atomi eccitati. Il primo esperimento è di Alexandrov (1964) [14].

Nelle condizioni usuali, in cui un atomo viene portato dallo stato fondamentale E_0 a uno stato eccitato E_1 , nel decadimento l'atomo emetterà un fotone di energia pari a $E_1 - E_0$ (come abbiamo già discusso) e il decadimento avverrà con legge esponenziale: se si parte al tempo 0 da un insieme di N atomi, tutti eccitati, il numero n di fotoni emessi per unità di tempo varierà nel tempo con la legge

$$n(t) = \frac{N}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (18)$$

(si verifica facilmente che l'integrale di $n(t)$ da 0 a $+\infty$ è proprio N).

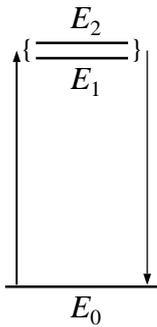


fig. 16

Fin qui niente di strano. Ma supponiamo di avere un atomo il cui stato eccitato consiste in realtà di due stati con energie vicine E_1 , E_2 (cosa facilmente ottenibile per effetto Zeeman, con un campo magnetico: fig. 16). Supponiamo inoltre di riuscire a eccitare l'atomo in una *sovrapposizione* dei due stati: questo si può ottenere con un impulso di luce molto breve (per le ragioni che vedremo subito) e della giusta polarizzazione.

Vediamo che cosa ci dice la teoria, cominciando dal caso semplice di un singolo stato eccitato. L'ampiezza di decadimento contiene il prodotto di due fattori esponenziali: il primo

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t\right]$$

è quello previsto dell'equazione di Schrödinger; il secondo

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)$$

tiene conto del decadimento esponenziale dello stato eccitato. La probabilità di emissione del fotone per unità di tempo è proporzionale al quadrato del modulo dell'ampiezza, e facendo il modulo quadrato il primo fattore dà 1, mentre il secondo dà $\exp(-\gamma t)$: confrontando con la (17) si vede che $\gamma = 1/\tau$, e non c'è altro da dire.

Nel caso in cui sono stati eccitati due stati in sovrapposizione, per ciascuno dei due stati le ampiezze si calcolano come prima, ma occorre sommarle (in generale moltiplicate per qualche coefficiente, ma qui supponiamo per semplicità che i coefficienti siano uguali). Si ottiene quindi un'ampiezza complessiva della forma⁽²⁾

$$\left(\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t\right] + \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_0)t\right]\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right)$$

il cui modulo quadrato è

$$4 \cos^2\left(\frac{E_2 - E_1}{2\hbar}t\right) e^{-\gamma t}. \quad (19)$$

L'andamento della (19) in funzione di t è rappresentato in fig. 17: ci si aspetta dunque che il decadimento esponenziale sia modulato da un andamento sinusoidale, con periodo $h/(E_2 - E_1)$.

⁽²⁾ Occorre precisare che questa trattazione semplificata non descrive bene tutte le situazioni che si possono presentare; ma è sufficiente per i nostri scopi.

Si può capire in due modi perché l'impulso che eccita gli atomi dev'essere breve:

- a) la sua larghezza in frequenza dev'essere sufficiente per poter eccitare insieme i due livelli E_1 , E_2
- b) l'impulso fissa l'origine dei tempi nella (19), e tale origine dev'essere definita meglio del periodo del battimento.

Si vede che da entrambi i punti di vista si arriva alla stessa condizione.

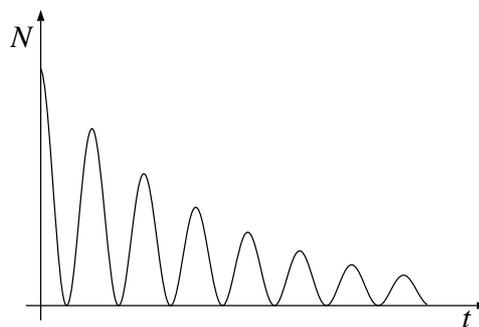


fig. 17

Conclusion

Per finire, alcune brevi note su quello che abbiamo visto fin qui.

Vorrei prima di tutto sottolineare che il continuo richiamo alla “Nadelstrahlung sbagliata” non è certo stato fatto per sminuire E., il cui contributo all'idea di fotone è stato fondamentale, e non soltanto all'inizio: basti pensare al lavoro del 1917 e al “paradosso EPR.”

La cosa che mi premeva mettere in discussione è la concezione “aghiforme” in sé, ossia la convinzione che un fotone abbia sempre una precisa direzione di propagazione. A livello intuitivo (ma non solo) questa concezione sopravvive ancora; perciò occorre smontarla, mostrando come essa sia in palese disaccordo con una quantità di fatti sperimentali.

La posizione di E. era ben più profonda, in quanto si legava alla sua visione riguardo all'intera m.q. Non era però questa la sede per affrontare l'argomento.

Dal momento che ho descritto la storia dei fotoni dalle origini a oggi, si sarà notato che in realtà la mia storia si ferma a circa 20 anni fa: non ho parlato degli sviluppi più recenti, come gli esperimenti sul cosiddetto “teletrasporto” o di tutta la ricerca attivamente in corso su computer quantistici, crittografia quantistica, e simili.

Il motivo di questa limitazione non sta solo nel tempo disponibile, ma anche nel fatto che dal punto di vista dei fondamenti le applicazioni recenti non aggiungono in realtà niente di nuovo. Alla base di tutte sta un uso sistematico e sofisticato degli stati intrecciati di due o più fotoni, reso possibile anche dai continui sviluppi delle tecniche sperimentali. In questo senso sono ulteriori e più complesse conferme delle proprietà “strane” dei fotoni di cui abbiamo parlato, ossia in sostanza della validità della m.q. Ma per la stessa ragione i recenti sviluppi non hanno portato modifiche né approfondimenti delle idee di base.

È di un certo interesse dal punto di vista didattico il fatto che oggi anche gli studenti d'informatica si trovano a dover capire qualcosa della m.q.: potrebbe

quindi essere importante trovare il modo di preparare il terreno in modo corretto anche nella scuola secondaria.

Ma questa è materia per un'altra scuola. . .

Bibliografia

- [1] A. Einstein: “Über eine die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt” *Ann. d. Physik* **17** (1905), 132.
- [2] A. Einstein: “Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption” *Ann. d. Physik* **20** (1906), 199.
- [3] A. Einstein: “Zur gegenwärtigen Stande des Strahlungsproblems” *Phys. Zeitschrift* **10** (1909), 185.
- [4] A. Einstein: “Quantentheorie der Strahlung” *Phys. Zeitschrift* **18** (1917), 121.
- [5] A.H. Compton, A.W. Simon: “Directed Quanta of Scattered X-Rays” *Phys. Rev.* **26** (1925), 289.
- [6] E. Fabri: “Quanto sono strani i fotoni. . .”
- [7] E. Fabri: “Sovrapposizioni e intrecci.”
- [8] E. Fabri: “Breve storia dell'elettrodinamica quantistica”
([6], [7], [8] si trovano in <http://www.df.unipi.it/~fabri>).
- [9] R.P. Feynman: “QED – La strana teoria della luce e della materia” (Adelphi 1996).
- [10] G.I. Taylor: “Interference fringes with feeble light” *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **15** (1909), 114.
- [11] K.H. Drexhage: “Monomolecular layers and light” *Sci. Am.* **222** (1970), n. 3, p. 108; *Le Scienze* **5** (1970), n. 24, p. 80.
- [12] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.* **47** (1935), 777.
- [13] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger: “Experimental tests of Bell’s inequality using time-varying analyzers” *Phys. Rev. Letters* **49** (1982), 1804.
- [14] E.B. Alexandrov: “Luminescence beats induced by pulse excitation of coherent states” *Opt. Spectr.* **17** (1964), 522.