

Sulla scarica di un condensatore

ovvero

sulla difficoltà di fare modelli giusti

(Versione lunga*)



1. Introduzione

Nello scorso anno sono apparsi su questo argomento, in *La Fisica nella Scuola*, un articolo di G. Fera [1], una lettera di G. Rinaudo [2], e una replica di Fera [3]. Non avrei creduto, prima di leggere l'articolo e le lettere, che il bilancio dell'energia nella scarica di un condensatore potesse nascondere così tanti aspetti interessanti, profondi e anche complessi. Perciò mi sembra ancora opportuno dedicare uno scritto al tentativo di mettere un po' d'ordine e di esaminare anche questioni collaterali ma tutt'altro che secondarie per l'insegnamento della fisica.

L'articolo di Fera è molto breve: tre pagine e mezza, di cui la prima presa quasi interamente dalla citazione dal testo di Manuzio e Passatore (in seguito M&P) e più di mezza dal calcolo dettagliato dell'energia trasformata in calore durante la scarica, nella resistenza del filo che connette i due condensatori. Eppure vedremo che di stimoli ne fornisce parecchi, il che è sicuramente un pregio dell'articolo, a mio giudizio il maggiore.

Ecco un indice dei diversi temi che mi riprometto di discutere:

- il problema della schematizzazione in fisica
- l'eterna questione degli ordini di grandezza
- continuità in fisica e in matematica
- costanti distribuite o concentrate?
- dipoli e multipoli ...
- come realizzare un apparato "misurabile"
- ...

2. Il problema

Cerco ora di spiegare sommariamente questo elenco. Chi abbia letto [1], [2], [3] sa che tutto verte su un condensatore inizialmente carico, che a un dato istante viene collegato con un altro scarico di uguale capacità (fig. 1). Tutti

* Una versione abbreviata di questo scritto è in corso di pubblicazione su *La Fisica nella Scuola*.

sappiamo che alla fine i due condensatori avranno la stessa d.d.p., metà di quella iniziale, quindi un'energia elettrostatica complessiva che è anch'essa la metà di quella iniziale. Il problema è: dov'è andata a finire l'energia mancante?

Con sua (e nostra) sorpresa Fera scopre che c'è chi pensa (almeno M&P, stando al loro testo citato in [1]) che l'energia mancante venga portata via da una radiazione elettromagnetica. Fera osserva che questo non è sempre vero; che non si può trascurare la resistenza del conduttore che unisce i due condensatori. Con opportuni calcoli dimostra che in genere è la dissipazione Joule che prevale, anche se — dice Fera — in certe condizioni l'irraggiamento può divenire importante.

C'è però da dire sul criterio adottato in [1] per confrontare i due modi di dissipazione: Joule e radiativa. Vedremo che il criterio giusto è un altro, ma l'idea proposta in [1] fa sorgere un nuovo problema. Fera introduce infatti, come tempo importante per il suo criterio, il tempo (da lui indicato con δ) che la luce impiega per attraversare il condensatore.⁽¹⁾ In realtà non è questo il tempo che conta, ma se si fa entrare in ballo un tempo di propagazione non si sfugge a una domanda: in che misura il sistema fisico in esame può essere trattato in termini di componenti discreti (resistenza, induttanza, capacità)? Se il tempo di propagazione è importante, non abbiamo a che fare con un sistema “a costanti distribuite”? Vedremo...

Rinaudo [2] critica Fera per aver trascurato l'induttanza del circuito, che è indispensabile almeno per evitare una discontinuità iniziale della corrente. Considerando l'induttanza abbiamo un circuito oscillante che può irradiare sia nel modo di dipolo elettrico (l'unico di cui si tiene conto in [1]) sia in quello di dipolo magnetico. Purtroppo in [2] non ci sono stime numeriche che permettano di capire se e quando l'uno o l'altro dei due modi possa essere prevalente. Fera in [3] accenna a una stima della radiazione di dipolo magnetico, e afferma che questa sia trascurabile. Un altro problema che dovremo esaminare, perché vedremo che non è sempre così.

In [1] si dice che la resistenza è necessaria: senza resistenza non si potrebbe raggiungere lo stato di equilibrio finale. Questo in realtà non è vero, e l'introduzione dell'induttanza spiega perché. Anche in assenza di resistenza, le oscillazioni saranno smorzate a causa dell'irraggiamento: in altre parole, usando il gergo della teoria delle antenne, sarà sempre presente una *resistenza di radiazione* che ha lo stesso effetto di un “vero” resistore inserito nel circuito. Vedremo in seguito (sez. 11) come calcolarla.

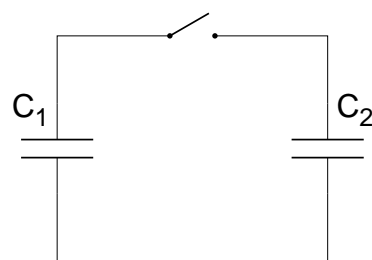


Fig. 1: Quando C_1 si scarica su C_2 va perduta dell'energia.

⁽¹⁾ In [3] rivede il suo criterio, ma il cambiamento non influisce su quanto sto dicendo ora.

3. L'energia si trasforma in calore?

Prima di affrontare le numerose questioni da discutere, vorrei sbrigarne una collaterale rispetto al tema dell'articolo di Fera e anche di questo, ma che tuttavia mi sembra importante esaminare perché appare di frequente. Mi riferisco alla frase che ho messo come titolo: è corretto dire che nella scarica di un condensatore su una resistenza *l'energia elettrostatica si trasforma in calore?*

In termini generali, la mia risposta è “no”: per la semplice ragione che il calore *non è energia*, ma (come il lavoro) è una *modalità di trasferimento di energia* tra corpi diversi. Andando più al concreto, che cosa accade quando il condensatore si scarica sulla resistenza? O meglio, in questo caso è opportuno essere precisi, e distinguere “resistenza” da “resistore”: il secondo è l'oggetto fisico che viene inserito in un circuito elettrico per ottenere un certo comportamento; la prima è la grandezza fisica che descrive il comportamento elettrico di quell'oggetto. Dovremmo dunque dire “un resistore avente una resistenza di $47\ \Omega$,” così come diciamo “un blocco di ferro avente una massa di 13 kg.” Dato che esprimersi così riesce piuttosto pesante, è perdonabile usare una forma ellittica e dire semplicemente “una resistenza di $47\ \Omega$.” Ma ora abbiamo bisogno di distinguere il corpo, in quanto sistema termodinamico, da una delle sue proprietà, che è la resistenza elettrica. . .

Dunque ci stiamo chiedendo che cosa accade quando il condensatore si scarica sul resistore. In prima battuta vediamo che questo *si scalda*, ossia la sua temperatura aumenta. Dato che lo stesso risultato si ottiene più naturalmente mettendo il corpo (il resistore) in contatto termico con un corpo a temperatura maggiore, ecco perché può sembrare naturale dire che il resistore *ha acquistato calore*. Ma dopo Joule e dopo il primo principio, sappiamo che il calore *non è una funzione di stato*, ma una grandezza che misura un certo tipo di scambio di energia in una certa trasformazione (in termini matematici, è un *funzionale della trasformazione*). Quindi non può essere aumentato né diminuito, non può essere acquistato né ceduto.

Quello che si può dire, osservando l'aumento di temperatura, è che lo stato termodinamico del resistore è cambiato; andando un po' più a fondo, che *è aumentata la sua energia interna*. Quindi l'espressione corretta è “l'energia elettrostatica del condensatore si trasforma in energia interna del resistore.” Però la storia non è finita, perché il resistore sarà in contatto termico più o meno buono con un *ambiente*, rispetto al quale dopo la scarica risulterà più caldo (temperatura maggiore). Ci sarà quindi un (lento) trasferimento di energia dal resistore all'ambiente, stavolta in forma di calore, finché il resistore non sarà sceso di nuovo alla temperatura dell'ambiente; col che la sua energia interna sarà tornata quella iniziale, e l'energia elettrostatica del condensatore la ritroveremo alla fine come energia interna (aumentata) dell'ambiente.

Con questo chiudo la parentesi termodinamica, anche se verrebbero in mente altre cose da dire, perché dell'eredità del “calore sostanza” non ci si libera facilmente parlando di fisica; ma la divagazione è già stata abbastanza lunga.

4. Irraggiamento o effetto Joule? È ancora presto per dirlo...

Fera sviluppa in tutto dettaglio il calcolo dell'energia dissipata per effetto Joule nel circuito di fig. 2 (che riproduce la sua fig. 1). Il calcolo non ha nulla di particolare, e fornisce un risultato per altro ben noto: l'energia elettrostatica mancante alla fine della scarica è stata tutta dissipata per effetto Joule. Il che implica, tra l'altro, che la detta energia dissipata sia *indipendente dal valore di R* .

Ed ecco il problema: se il valore di R non conta, si otterrebbe lo stesso risultato anche per $R = 0$? La questione è prima di tutto matematica: la risposta sarà affermativa se l'energia dissipata è *definita per ogni $R \geq 0$* , e se è *continua a destra in $R = 0$* . Ma lo è?

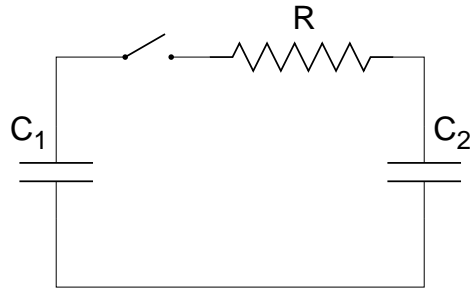


Fig. 2: La resistenza del circuito non è mai trascurabile.

Basta guardare i passaggi in [1], a partire dall'eq. (1), per accorgersi che il calcolo risulta viziato in partenza se ammettiamo il valore 0 per R : infatti in tal caso la (1) richiede $V_1 = V_2$ per ogni t , e questa condizione non è certo soddisfatta all'istante iniziale. Dal punto di vista fisico, l'apparente paradosso ci dice soltanto che la schematizzazione adottata non può essere valida per $R = 0$ (apparato superconduttore) e ci fa anche sospettare che possa fallire quando R è troppo piccola. Quanto piccola? Perché?

La risposta si trova già in [2]: *non è incondizionatamente lecito trascurare l'induttanza* del circuito. Ho scritto “incondizionatamente” perché potrebbe essere lecito trascurarla come approssimazione, se fosse abbastanza piccola. È vero che senza induttanza, come osserva Rinaudo, avremmo una discontinuità nella corrente, ma se il tempo di salita fosse molto breve rispetto ai tempi che interessano, tale discontinuità sembrerebbe un'approssimazione tollerabile.

Occorre dunque stimare questi tempi, altrimenti non potremo sapere su quale schematizzazione basarci. Il che dimostra già uno dei punti che mi ripromettevo di esaminare: scegliere la corretta schematizzazione di una situazione fisica può essere *molto difficile*, e a volte può perfino sembrare contraddittorio. Il nostro “semplice” problema già ce lo prova: per capire se una certa schematizzazione è lecita (niente resistenza? niente induttanza? E poi vedremo che c'è dell'altro ...) sembra che occorra prima trattare il problema in modo più accurato. Ma se sappiamo fare questo, a che serve la schematizzazione più semplice e più grossolana?

Spesso la risposta viene dal cosiddetto “senso fisico”: un fisico dotato di una certa esperienza possiede un repertorio di criteri semiintuitivi che lo guidano verso la schematizzazione adeguata, senza doversi immergere in calcoli complicati. Oso affermare che dovrebbe essere uno degli obiettivi didattici, anche nella scuola secondaria, far vedere che il problema esiste, e guidare i ragazzi (nei casi più semplici, non in questo nostro ...) verso la soluzione. Viceversa la tendenza prevalente, nei testi, nei problemi d’esame, forse anche nel lavoro quotidiano in classe, è tutt’altra: le situazioni fisiche vengono proposte già “distillate,” con le schematizzazioni perfino sottintese. Il campo elettrico in un condensatore, o quello magnetico in un solenoide, sono sempre uniformi e gli effetti di bordo sono sempre trascurabili; la resistenza dell’aria non ha mai importanza ... ecc. ⁽²⁾

Per il circuito di fig. 2, o meglio per quello più completo che si trova in [2] e che riproduco in fig. 3, è abbastanza facile precisare il criterio dei tempi. Ci sono infatti due grandezze con la dimensione di un tempo: la prima è quella indicata con τ da Fera, e che qui preferisco chiamare τ_C :

$$\tau_C = RC; \tag{1}$$

la seconda è la costante di tempo del circuito RL (senza capacità) che chiamerò τ_L :

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \tag{2}$$

In realtà le grandezze con le dimensioni di un tempo sono infinite, a causa della presenza della grandezza adimensionale

$$\gamma = \frac{R^2C}{L} = \frac{\tau_C}{\tau_L} \tag{3}$$

(questo parametro sarà importante per la discussione che sto per fare). È particolarmente interessante

$$\sqrt{\tau_L \tau_C} = \sqrt{LC}$$

che rappresenta, a meno di un fattore $\pi\sqrt{2}$, il periodo del circuito oscillante già citato, in assenza di resistenza. ⁽³⁾

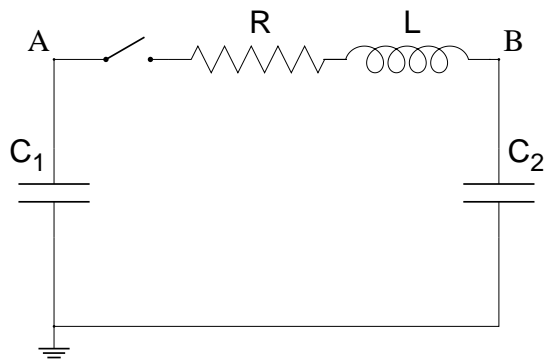


Fig. 3: E neppure l’induttanza.

⁽²⁾ Una discussione più approfondita di questo punto si trova in [4].

⁽³⁾ Si tenga presente che nel calcolo del periodo conta la serie dei due condensatori; quindi la capacità da considerare è $C/2$. Per lo stesso motivo, il valore critico di γ è 8, e non 4. Per comodità del lettore riporto i calcoli in Appendice 1.

È ben noto che il circuito RLC ha due comportamenti qualitativamente diversi, a seconda del valore di γ : per $\gamma < 8$ si avranno oscillazioni smorzate, mentre per $\gamma > 8$ il circuito sarà aperiodico. Più esattamente, e considerando per semplicità solo i casi limite $\gamma \gg 8$ e $\gamma \ll 8$, abbiamo:

1) Se $\gamma \gg 8$ la corrente nel circuito sale inizialmente — con costante di tempo τ_L — verso il valore limite V_1/R , dove V_1 è la d.d.p. iniziale del condensatore carico; poi decresce verso zero con costante di tempo $\tau_C/2$. La discesa è molto più lenta della salita, per un fattore $\gamma/2$. In queste condizioni, almeno per l'andamento della corrente e dei potenziali, si potrà anche trascurare L , che determina solo la brevissima fase di salita della corrente.

2) Se $\gamma \ll 8$ abbiamo un andamento oscillante della corrente: il periodo di oscillazione è vicino a

$$\tau_{osc} = \pi \sqrt{2 \tau_L \tau_C} \quad (4)$$

e le oscillazioni sono smorzate con una costante di tempo

$$\tau_{sm} = 2 \tau_L. \quad (5)$$

Avremo $\tau_{sm} \gg \tau_{osc}$, visto che

$$\frac{\tau_{sm}}{\tau_{osc}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\gamma}};$$

le oscillazioni saranno lentamente smorzate.

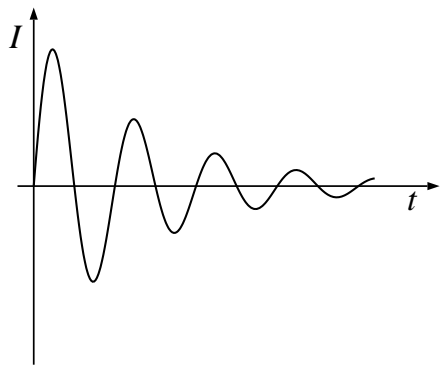


Fig. 4: Oscillazioni fortemente smorzate.

Bisogna però stare attenti a certi passaggi, come la radice quadrata in questo caso. Se per es. fosse $\gamma = 0.1$, avremmo $\tau_{sm} \simeq 1.4 \tau_{osc}$. Mentre $0.1 \ll 8$ e quindi le approssimazioni nelle formule precedenti sono giustificate, non si può dire che 1.4 sia grande. Le oscillazioni sarebbero certo smorzate, ma non proprio lentamente (fig. 4).

A questo punto si può capire perché nel titolo di questa sezione ho scritto “è ancora presto.” Infatti non siamo ancora in grado di rispondere alla domanda, ma abbiamo solo discusso l'andamento della corrente (e quindi del potenziale e della carica) a seconda dei valori delle tre costanti R, L, C . L'energia dissipata per effetto Joule sembra essere ben definita, e non dipendere — come già detto — da R e neppure da L ; per l'esattezza:

$$E_J = \frac{1}{4} C V_1^2. \quad (6)$$

Il “sembra” sta a indicare che le cose non stanno proprio così: la (6) rappresenta di certo la diminuzione dell'energia elettrostatica dei condensatori, ma non è

detto — come ormai sappiamo — che essa venga tutta dissipata in effetto Joule; ne riparleremo. Quanto all'energia irraggiata, dobbiamo ora occuparcene.

5. Come irraggia il nostro circuito?

La risposta non è per niente semplice, come ora voglio mostrare, e dipende da qualcosa di cui né Fera né Rinaudo hanno parlato.

Ricordo che in [1] si considera solo la radiazione di dipolo elettrico del condensatore 2 (quello inizialmente scarico). Mostrerò che trascurare l'altro condensatore può essere disastroso agli effetti del risultato, e in un modo che *dipende dall'esatta geometria* del sistema.

Qualcosa di simile si può anche obiettare a [2], dove al semplice filo del circuito iniziale viene sostituito un solenoide. È vero che in tal modo il momento di dipolo magnetico è facilmente calcolabile, ma al prezzo di alterare gravemente la natura del circuito, e in partenza non sappiamo se ciò non alteri anche il risultato (questa critica è già presente in [3]).

Riprendiamo la fig. 1, considerandola ora non un semplice schema elettrico, ma un disegno della disposizione geometrica dei componenti. Ricordo (è noto a tutti, ma non viene di solito spiegato con chiarezza nei libri) che uno schema elettrico è una forte *astrazione* di un oggetto fisico composto di pile, scatolette con due terminali chiamate “condensatori,” barrette terminate con due fili, chiamate “resistori,” e altri componenti, che nei circuiti elettronici possono includere diodi, transistori, amplificatori operazionali e altri circuiti integrati, magari microprocessori... E poi bobine, trasformatori, interruttori... e chi più ne ha più ne metta.

Ho scritto ed evidenziato sopra il termine “astrazione” perché appunto di questo si tratta e va fatto capire ai ragazzi: non solo si usano rappresentazioni convenzionali per tutti gli elementi di circuito che ho nominato, ma soprattutto viene del tutto trascurata la loro disposizione geometrica effettiva, indicando esclusivamente le *connessioni*, che sono linee rappresentative di *fili* a loro volta in realtà costituiti nei modi e dei materiali più diversi... E non mi dilungo oltre.

Faccio solo un brevissimo excursus storico: gli schemi come noi oggi li conosciamo non sono nati d'un colpo: se guardate i libri di un secolo fa ci troverete dei disegni che sono una via di mezzo tra una rappresentazione realistica dell'oggetto fisico, e la sua astrazione che ho descritta sopra. Le batterie sono disegnate coi loro bravi morsetti, dai quali partono dei fili, magari avvolti a elica per renderli più maneggevoli; i condensatori sono talvolta disegnati quasi come sono fatti davvero; ma anche in modo più astratto... Soprattutto, *non c'era una regola*, mentre oggi la standardizzazione degli schemi (soprattutto elettronici) è essenziale per assicurarne la comprensibilità universale. Un esempio è la fig. 5, dove è mostrato uno dei primi rioricevitori che impiegavano un tubo elettronico: l'*audion* (triode) di de Forest.

Torniamo alla fig. 1, e seguiamo la descrizione data in [1]. I condensatori sono esattamente i “condensatori piani” della tradizione: due piastre metalliche piane (le “armature”) di uguale forma, parallele tra loro a una distanza d piccola rispetto alla dimensione delle piastre. Verso la fine dell’articolo [1] sono dati, a titolo di esempio, $C = 1 \text{ nF}$, $d = 1 \text{ mm}$: se prendiamo le piastre circolari, per avere quella capacità (nel vuoto) occorrerà un raggio $a = 19 \text{ cm}$; teniamo a mente questo dato, che ci servirà più avanti.

Il calcolo del momento di dipolo elettrico del condensatore dovrà tener conto del fatto che non si tratta di cariche puntiformi; ma fortunatamente se supponiamo che in ogni istante le densità di carica in due punti affacciati delle due armature siano esattamente opposte, il risultato è semplice:

$$\mathbf{p} = q d \mathbf{u}$$

se q è la carica totale sull’armatura positiva ($-q$ sull’altra) e \mathbf{u} è il versore della normale alle armature, orientato da quella negativa a quella positiva.⁽⁴⁾ Non è neppure necessario assumere che la densità di carica sia uniforme su ciascuna armatura; cosa di cui potremmo dubitare quando la carica fluisce verso i fili, durante la scarica (ne riparleremo). Invece l’ipotesi di densità opposta in punti corrispondenti delle due armature segue da un argomento di simmetria.

Però i condensatori sono due, e ci saranno *due* momenti di dipolo; sempre secondo la figura, che ora interpretiamo come disegno, supponiamo che i due condensatori siano affiancati. Allora i due momenti di dipolo sono vettori paralleli, entrambi diretti secondo la normale alle armature, e la loro somma sarà

$$\mathbf{p} = (q_1 + q_2) d \mathbf{u}. \quad (7)$$

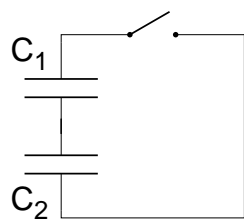


Fig. 6: Condensatori sovrapposti.

Ma $q_1 + q_2 = q$ (carica iniziale del condensatore 1) e *non varia nel tempo*. Dato che la potenza istantanea irraggiata dipende da $|\dot{\mathbf{p}}|^2$ (v. App. 2) essa risulta nulla a ogni istante, e nulla è quindi anche l’energia totale irraggiata!

Possiamo salvare il calcolo in [1], a patto di modificare la geometria del circuito: mettiamo i due condensatori uno sotto l’altro, anziché affiancati (fig. 6). In questo caso i due momenti di dipolo hanno versi opposti, e invece della (7) abbiamo

$$\mathbf{p} = (q_1 - q_2) d \mathbf{u} = (2q_1 - q) d \mathbf{u} = (q - 2q_2) d \mathbf{u}. \quad (8)$$

⁽⁴⁾ In [1] si trova per \mathbf{p} un valore metà; sicuramente un lapsus, poco importante per gli ordini di grandezza.

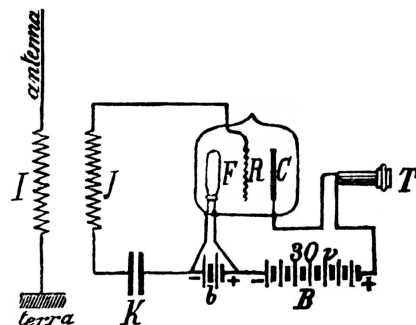


Fig. 5: Schema di un ricevitore a triodo: l’audion di de Forest

Dunque ora, a parte il segno, $\ddot{\mathbf{p}}$ risulta doppio di quello del condensatore 2, e $|\ddot{\mathbf{p}}|^2$ quadruplo; se ricordiamo il fattore 1/2 introdotto da Fera, che porta un altro fattore 4 nell'energia irraggiata, vediamo che l'energia è in realtà 16 volte maggiore.

6. Calcolo esatto della radiazione di dipolo

Anche se non è decisivo, può essere di qualche interesse tentare un calcolo un po' più accurato dell'energia irraggiata; in fin dei conti si tratta solo di un paio di derivate, un integrale, e qualche passaggio algebrico.

Partiamo dalla (A2.1) dell'App. 2, con l'espressione (8) per il momento di dipolo elettrico, e troviamo

$$E_d = \frac{2 Z_0 d^2}{3 \pi c^2} \int_0^{+\infty} (\ddot{q}_1)^2 dt. \quad (9)$$

Prendendo $q_1(t)$ dalla (A1.6) con le espressioni (A1.7), (A1.8) per k_1, k_2, c_1, c_2 , derivando due volte e inserendo nella (9) arriviamo, con passaggi elementari che non riporto, a

$$E_d = \frac{Z_0 d^2 q^2 \gamma}{3 \pi c^2 \tau_C^3} = \frac{Z_0 d^2 q^2}{3 \pi c^2 R C^2 L}. \quad (10)$$

È interessante osservare che la (10) *vale per qualunque* γ , anche molto grande o molto piccolo: quindi l'energia irraggiata, fissate R e C , risulta *inversamente proporzionale a* L .

Una spiegazione intuitiva di questo fatto può essere la seguente. Come è mostrato in App. 1, quando L è piccola ($\gamma \gg 8$) la corrente di scarica sale con costante di tempo τ_L (molto breve), poi torna a zero con costante di tempo $\tau_C/2$ (relativamente lunga). A prima vista, come avevamo già detto, sembra che si possa trascurare la fase di salita, ma non è così per l'irraggiamento. Infatti nella salita \ddot{q}_1 dura un tempo dell'ordine di τ_L , ma raggiunge un'ampiezza che va come $1/L$. Di conseguenza l'integrale di $(\ddot{q}_1)^2$ va come $1/L$. Scopriamo così un fatto non intuitivo: *l'induttanza non può mai essere trascurata*, tanto meno quando è piccolissima!

Possiamo ora confrontare la (10) con l'espressione (7) che si trova in [1] e che trascrivo nelle notazioni del presente articolo:

$$U_* = \frac{\pi^3 Z_0 d^2 q^2}{3 c^2 \tau_C^3}. \quad (11)$$

La (11) non è data in [1] come espressione esatta, ma solo come una stima, che dovrebbe però fornire almeno l'ordine di grandezza. Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{U_*}{E_d} = \frac{\pi^4}{\gamma}.$$

Il fattore π^4 non è certo piccolo (vale circa 100) ma non è la cosa importante; lo è invece il fattore γ , che in casi pratici — come vedremo — può differire dall'unità per diversi ordini di grandezza. Ma ciò che veramente occorre spiegare è il fatto che nel rapporto U_*/E_d compaia γ , che *dipende dai parametri del circuito*.

La spiegazione è semplice, grazie alla discussione fatta sopra sull'importanza di L . Infatti in [1] è considerata solo la parte decrescente della corrente di scarica, che ha costante di tempo $\tau_C/2$; ma sappiamo che l'energia irraggiata nella fase di salita della corrente va come $1/L$, ossia come $1/\tau_L$. Per la stessa ragione, quella irraggiata durante la discesa andrà come $1/\tau_C$, e il rapporto andrà come $\tau_C/\tau_L = \gamma$.

7. Ordini di grandezza

Siamo ora in grado di affrontare, almeno in parte, il problema centrale: è più importante la dissipazione Joule o la radiazione? Abbiamo le formule necessarie, ma ci manca ancora qualcosa: una stima attendibile dei parametri del circuito: C , R , L .

Quanto a C avremmo una larghissima scelta, perché esistono in commercio condensatori dal pF a qualche kF (sì: migliaia di farad). Tuttavia capacità troppo piccole non sono adatte al nostro scopo, perché sono dello stesso ordine delle *capacità distribuite* dovute ai conduttori e a tutti gli altri componenti del circuito; di conseguenza diventa difficile un modello sufficientemente accurato. Più in generale, i condensatori commerciali, specialmente quelli di capacità elevata, hanno strutture fisiche complesse e di nuovo difficilmente modellizzabili; conviene quindi restare sulla proposta di Fera, ossia il classico condensatore piano da 1 nF, di cui abbiamo già visto le dimensioni: distanza fra le armature 1 mm, raggio di queste (circolari) 19 cm.

Per la resistenza vale un discorso analogo: se fossimo interessati a un valore elevato, avremmo disponibilità fino a parecchi M Ω ; se invece vogliamo tenere R più bassa possibile, allora le cose si complicano un po', perché la resistenza non è solo dovuta al filo che collega i due condensatori, ma anche alle saldature di questo sulle armature, e all'imprescindibile interruttore la cui chiusura fa partire la scarica. Inoltre la resistenza del filo non può essere calcolata dai soli dati geometrici (lunghezza, sezione) e dalla resistività del metallo, a causa dello "effetto pelle," che fa sì che una corrente ad alta frequenza non si distribuisca uniformemente nel conduttore, ma si concentri vicino alla superficie. Il risultato è un aumento della resistenza efficace, che dipende dalla frequenza come $\omega^{1/2}$. Si dovrà poi tener conto della resistenza di radiazione, che non sarà mai nulla se il circuito irraggia; vedremo in sez. 11 come stimarla. Per tutti questi motivi sembra difficile scendere sotto 0.1 Ω .

Infine, l'induttanza. Anche qui, nessuna difficoltà a realizzare induttanze di parecchi henry, ma noi saremmo piuttosto interessati a rendere L più piccola possibile. Non aggiungeremo quindi induttanze non necessarie, ma non potremo

ignorare l'induttanza dei fili di collegamento. Viste le dimensioni dei condensatori, è ragionevole schematizzare i fili come una circonferenza di raggio $b = 20$ cm; occorre poi specificare il raggio b' della sezione dei fili, che influisce, anche se poco, sull'induttanza. Prendiamo $b' = 0.5$ mm. Una formula approssimata per l'induttanza è ⁽⁵⁾

$$L = \mu_0 b \left(\log \frac{8b}{b'} - 2 + Y \right) \quad (12)$$

dove il parametro Y tiene conto dell'effetto pelle: $Y = 1/4$ per corrente distribuita uniformemente nel filo, $Y = 0$ per corrente concentrata alla superficie. Mettendo i numeri, si trova $L = 1.53 \mu\text{H}$ per il caso di corrente superficiale, che mi sembra più realistico (comunque sarebbe poco diversa nell'altro caso). Assumerò questo valore per i calcoli che seguono.

C'è però ancora qualcosa da dire sull'induttanza. La formula (12) si riferisce a una spira circolare, ma nel nostro caso la spira è interrotta dalla presenza dei condensatori. In che misura ciò influisce sull'induttanza?

Ripassiamo che cosa accade durante la scarica. La carica del condensatore 1 va diminuendo, quella del condensatore 2 aumenta. In entrambi, varia il campo elettrico fra le armature, ossia esiste una corrente di spostamento che chiude il circuito (ricordo che la corrente di spostamento si rende appunto necessaria nelle equazioni di Maxwell per garantire che il secondo membro in

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13)$$

abbia divergenza nulla). La (13) mostra che anche la corrente di spostamento contribuisce al campo magnetico, quindi è come se al posto dei condensatori vi fossero dei conduttori percorsi dalla stessa corrente. Però questi conduttori non sono filiformi: hanno invece l'estensione delle armature, e la corrente (di spostamento) è distribuita su tutta la loro sezione. Dobbiamo quindi aspettarci che il campo magnetico venga alterato e che la (12) non possa più essere corretta. Tuttavia lo spazio tra le armature è assai sottile rispetto alla lunghezza dei fili, ed è quindi plausibile che la modifica all'induttanza sia piccola: con questo argomento possiamo decidere di non preoccuparcene.

⁽⁵⁾ Questa formula si può trovare su diversi testi, ma è anche facilmente reperibile in internet. Nella (12) vengono trascurati termini dell'ordine di b'^2/b , molto piccoli nel nostro caso. La [5.158] di Jackson [5], citata in [3], è molto simile.

Riassumendo, i parametri del nostro circuito sono:

Condensatori:

distanza tra le armature $d = 1 \text{ mm}$
 raggio delle armature $a = 19 \text{ cm}$
 capacità $C = 1 \text{ nF}$

Conduttori:

raggio della spira $b = 20 \text{ cm}$
 raggio del filo $b' = 0.5 \text{ mm}$
 induttanza $L = 1.53 \mu\text{H}$

Resistenza (stimata): $R = 0.1 \Omega$.

Con questi dati possiamo calcolare le altre grandezze rilevanti per il calcolo dell'irraggiamento:

$$\tau_L = 15.3 \mu\text{s} \quad \tau_C = 0.1 \text{ ns} \quad \gamma = 6.6 \cdot 10^{-6}.$$

Come si vede, siamo largamente nel regime oscillatorio: il periodo delle oscillazioni e la costante di tempo di smorzamento valgono

$$\tau_{\text{osc}} = 0.17 \mu\text{s} \quad \tau_{\text{sm}} = 31 \mu\text{s}; \quad (14)$$

le oscillazioni sono debolmente smorzate.

Si vede anche che per uscire dal regime oscillatorio occorrerebbe modificare in modo importante i parametri: per es. portare R a oltre 100Ω . Aumentare C o diminuire L è fuori questione, per i motivi già visti.

Assumendo, a titolo di esempio, una carica iniziale $q = 1 \text{ nC}$, possiamo ora calcolare l'energia perduta dal condensatore, data dall'eq. (6); però in presenza d'irraggiamento questa non sarà tutta dissipata per effetto Joule, e converrà indicarla con un simbolo diverso: E_p . Calcoliamo anche quella E_d irraggiata per dipolo elettrico (10):

$$E_p = \frac{1}{4} C V_1^2 = \frac{q^2}{4C} = 2.5 \cdot 10^{-10} \text{ J} \quad E_d = 2.9 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

Come si vede, ci sono ben 5 ordini di grandezza fra E_p ed E_d . Possiamo capire meglio la situazione calcolando il rapporto:

$$\frac{E_d}{E_p} = \frac{4 Z_0}{3 \pi c^2} \frac{d^2}{R C L}.$$

Dunque per rendere confrontabili E_d ed E_p occorre diminuire il prodotto RCL di 5 ordini di grandezza, il che è del tutto impossibile, oppure aumentare d (col che diminuisce C). A conti fatti, si vede che per rendere E_d confrontabile con E_p

bisogna aumentare d di 50 volte, portando C a 20 pF e il periodo di oscillazione a circa 25 ns.

In questo modo siamo al limite del modello, perché abbiamo condensatori di raggio 19 cm e spessi 5 cm; inoltre la capacità è poco maggiore delle inevitabili capacità parassite del circuito. Ma l'idea di aumentare d può essere spinta all'estremo, sostituendo i condensatori con due grosse sfere metalliche, collegate al generatore di alta tensione (rocchetto di Ruhmkorff) mentre la scarica avviene grazie a una scintilla tra le sfere. Il condensatore è completato da due fili, l'uno collegato a terra e l'altro con funzione di *antenna*. E così siamo arrivati a una delle prime disposizioni di Marconi (fig. 7) dove le sfere sono indicate con E. ⁽⁶⁾

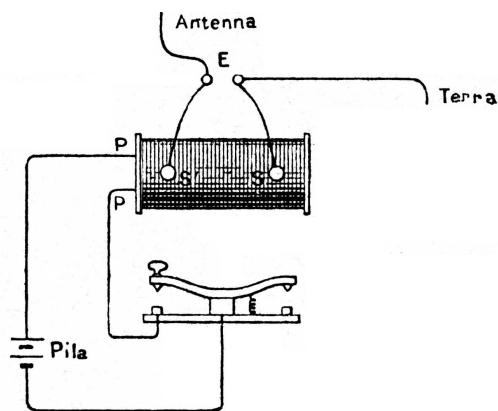


Fig. 7: Il trasmettitore di Marconi: il condensatore è sostituito dalla coppia di fili antenna/terra.

Se invece restiamo aderenti alla forma dei condensatori assunta fin qui, non c'è niente da fare: la radiazione di dipolo elettrico risulta sempre trascurabile rispetto alla dissipazione Joule. ⁽⁷⁾

8. Occorre considerare i multipoli?

La radiazione e.m. emessa da un sistema di cariche e correnti è in generale difficile da calcolare, a meno che non siano possibili delle semplificazioni grazie alla conformazione del circuito e all'andamento delle cariche e delle correnti. In termini generali, è pratica comune considerare lo *sviluppo in multipoli*, che non posso qui esporre in dettaglio. ⁽⁸⁾ È però necessario fissare il criterio dello sviluppo, e le condizioni in cui è lecito fermarsi ai primi termini.

Il discorso è (relativamente) semplice se cariche e correnti variano nel tempo in modo sinusoidale: allora il parametro di sviluppo è ks , dove $k = \omega/c$ e s è una dimensione caratteristica del sistema. Se $ks \ll 1$ i termini dello sviluppo nell'energia della radiazione emessa sono progressivamente decrescenti come le potenze pari di ks . Più esattamente, la radiazione di dipolo elettrico si esprime con una serie il cui termine di ordine più basso va come $(ks)^2$, e i successivi come $(ks)^4$, $(ks)^6$... Ci sono poi il *quadrupolo elettrico* e il *dipolo magnetico*, le cui serie iniziano all'ordine $(ks)^4$ e continuano con le successive potenze pari... Eccetera.

⁽⁶⁾ Le figure 5 e 7 sono tratte da [6].

⁽⁷⁾ Alla fine di [3] si legge la conclusione opposta, ma ciò dipende dalla grave sovrastima di E_d , di cui abbiamo già parlato.

⁽⁸⁾ La trattazione si trova in molti testi di elettromagnetismo avanzato: per es. in [5], capp. 9 e 14.

È bene notare che solo il primo termine della radiazione di dipolo elettrico si lascia esprimere per mezzo del momento di dipolo elettrico: formula (A2.1) in App. 2. È il solo contributo di cui ci siamo interessati fino a questo punto.⁽⁹⁾ Lo stesso accade per il dipolo magnetico, per il quadrupolo elettrico, e per tutti i multipoli superiori; quindi per es. il termine in $(ks)^4$ nella potenza irradiata è la somma di tre contributi: dipolo elettrico, dipolo magnetico, quadrupolo elettrico. Spesso le cose si semplificano, quando l'uno o l'altro dei contributi è nullo; ma in altri casi occorre considerarli tutti. Purtroppo non si può dire che questo punto emerga sempre con chiarezza, anche nei trattati più "classici."

Si noti che scrivere $ks \ll 1$ equivale a $\omega s \ll c$ o anche a $\lambda = cT \gg 2\pi s$, se T è il periodo del moto delle cariche e correnti. In parole: occorre che la lunghezza d'onda emessa sia grande rispetto alle dimensioni del sistema, oppure che il sistema sia piccolo rispetto allo spazio che la radiazione percorre in un periodo. O ancora: che nel calcolo si possa trascurare il diverso *ritardo* tra i campi emessi dalle cariche e correnti presenti in punti diversi del circuito.

C'è ancora un altro modo di descrivere l'approssimazione: se le cariche si muovono in uno spazio che non supera s , la loro velocità sarà al più ωs ; imponendo $\omega s \ll c$ stiamo dunque richiedendo che il moto delle cariche sia *non relativistico*.

Anche nell'applicazione di questi criteri bisogna però fare attenzione. Non si può dire in generale, come si legge in [1]: "l'energia irradiata in un processo elettromagnetico è trascurabile quando la variazione dello stato del sistema si svolge in tempi maggiori di quello che impiega la luce ad attraversarlo."⁽¹⁰⁾ Se così fosse, ad esempio la radiazione visibile emessa dagli atomi sarebbe sempre trascurabile, visto che le dimensioni degli atomi sono parecchio minori (per almeno 3 ordini di grandezza) della lunghezza d'onda della luce emessa. Prendendo un atomo grande 0.2 nm, la luce lo attraversa in circa $6 \cdot 10^{-19}$ s, mentre il periodo della radiazione visibile è attorno a 10^{-15} s.

Nel caso degli atomi di un gas, anche non rarefatto, la radiazione è importante semplicemente perché gli altri meccanismi di diseccitazione (tipicamente, gli urti) sono rari rispetto al tempo di emissione medio di un fotone. La radiazione emessa è quasi sempre di dipolo elettrico, tranne i casi in cui questa sia proibita (regole di selezione) a causa di particolari simmetrie degli stati. In tali casi può diventare importante l'emissione in dipolo magnetico o quadrupolo elettrico, sempre che altri meccanismi di diseccitazione non siano prevalenti.

Nel caso di un circuito macroscopico il discorso è simile: se $ks \ll 1$ il modo di radiazione dominante sarà il dipolo elettrico, e saranno quindi giustificati i calcoli

⁽⁹⁾ A rigore, quindi, il titolo dato alla sez. 6 è impreciso: non si tratta del calcolo esatto della radiazione di dipolo, ma solo del calcolo esatto del termine di ordine più basso.

⁽¹⁰⁾ La giustificazione proposta in [3] non posso commentarla perché mi riesce oscura. Non capisco chi sia il sistema di cui si parla: il condensatore? gli elettroni? In ogni caso, come sto per mostrare, il criterio non dà risultati corretti.

e le considerazioni fatte fin qui, a condizione che la conformazione del sistema non sia tale da rendere trascurabile o addirittura nullo il momento di dipolo elettrico (più esattamente la sua derivata seconda) sì che la radiazione avverrà prevalentemente nei modi superiori. Abbiamo già visto che questo accade ad es. per i condensatori affiancati.

Coi nostri dati, se prendiamo per s il diametro della spira (40 cm) o quello delle armature, circa uguale, abbiamo

$$ks = \frac{\omega s}{c} = \frac{2\pi s}{c\tau_{osc}} = 0.048 \quad (15)$$

e l'approssimazione di dipolo elettrico sembra adeguata. Ma vediamo più a fondo, calcolando l'energia irradiata nei modi successivi. A questo scopo faccio riferimento alle formule in App. 2.

9. La radiazione di dipolo magnetico

Non dobbiamo far altro che mettere insieme un po' di formule e calcolare un integrale. Sostituendo la (A2.5) nella (A2.3) abbiamo

$$W_m = \frac{\pi Z_0 b^4}{6 c^4} \ddot{I}^2. \quad (16)$$

Prendendo \ddot{I} dalla (A1.12) e integrando, dopo alcuni passaggi si trova l'energia totale irradiata:

$$E_m = \frac{\pi Z_0 b^4 q^2 \gamma^2 (\gamma + 2)}{12 c^4 \tau_C^5} \simeq \frac{\pi Z_0 b^4 q^2 \gamma^2}{6 c^4 \tau_C^5}. \quad (17)$$

Il confronto con l'energia irradiata per dipolo elettrico è facile:

$$\frac{E_m}{E_d} = \frac{\pi^2 b^4 \gamma}{2 c^2 \tau_C^2 d^2} = 57 \quad (18)$$

coi soliti valori dei parametri. Sorpresa: *la radiazione di dipolo elettrico è piccola rispetto a quella di dipolo magnetico*. Come mai accade questo, visto che la (15) ci dice che $ks \ll 1$?

La spiegazione appare chiara trasformando opportunamente la (18). Basta ricordare la definizione (3) di γ , la (4) di τ_{osc} , poi tener presente la (15) che ci dà ks , per ottenere

$$\frac{E_m}{E_d} = k^2 s^2 \left(\frac{\pi s}{8 d} \right)^2. \quad (19)$$

Nella (19) si vede l'atteso fattore $(ks)^2$, ma anche un altro fattore, che è $\gg 1$ (vale circa $2.5 \cdot 10^4$) perché il diametro della spira è grande rispetto allo spessore del condensatore.

Dobbiamo ora confrontare l'energia irradiata con quella perduta in totale. Troviamo:

$$\frac{E_m}{E_p} = 6.7 \cdot 10^{-4}. \quad (20)$$

Studiando la dipendenza dai diversi parametri, si scopre che questo rapporto va all'incirca come $1/(RC^2)$. Per rendere confrontabili le due energie basta dunque diminuire C : prendiamo ad es. $C = 25$ pF, e a conti fatti troviamo

$$\frac{E_m}{E_p} = 1.07$$

mentre il periodo di oscillazione passa a 27.5 ns.

È dunque facile rendere importante l'energia irradiata, se si tiene conto del dipolo magnetico. In realtà questo apre un altro problema, che però conviene rimandare, per completare prima l'argomento multipoli, passando al quadrupolo elettrico.

Sarebbe anche semplice ridurre la radiazione di dipolo magnetico: si vede dalla (17) che E_m va come b^4 , ossia come il quadrato dell'area della spira. Si può dimostrare che ciò è vero in generale, anche per spire non circolari. Dunque per ridurre la radiazione basta "schiacciare" la spira, avvicinando i due fili tra loro invece di disporli in forma di circonferenza. Questa è pratica corrente, quando si voglia evitare la radiazione: i fili vengono avvicinati e magari anche intrecciati.

10. La radiazione di quadrupolo elettrico

Seguendo il programma discusso nella sez. 8, dobbiamo ora occuparci del quadrupolo elettrico: sarà importante, come lo è il dipolo magnetico, o sarà trascurabile?

Per rispondere è necessario separare i due casi, di diversa geometria, di cui abbiamo parlato nella sez. 5: condensatori affiancati (fig. 1) oppure sovrapposti (fig. 6). Come sappiamo, nel primo caso non c'è radiazione di dipolo, nel secondo sì; che cosa si può dire per il quadrupolo?

Conviene cominciare col secondo caso. Se prendiamo l'origine O delle coordinate nel punto centrale fra i due condensatori, e se indichiamo con $2h$ la distanza fra i loro centri (fig. 8) abbiamo per le grandezze indicate con x^0, y^0, z^0, \bar{q} in App. 3:

- per il condensatore superiore (quello inizialmente carico)

$$x^0 = y^0 = 0, \quad z^0 = h, \quad \bar{q} = q_1$$

- per il condensatore inferiore (inizialmente scarico)

$$x^0 = y^0 = 0, \quad z^0 = -h, \quad \bar{q} = -q_2.$$

Occorre ricordare che con q_1, q_2 abbiamo indicato le cariche sulle armature fra loro collegate: prima della chiusura dell'interruttore $q_1 = q, q_2 = 0$; dopo la chiusura è sempre $q_1 + q_2 = q$. Ma in App. 3 con \bar{q} abbiamo indicato la carica sull'armatura superiore (quella con z maggiore): ecco perché per il condensatore inferiore bisogna prendere $\bar{q} = -q_2$.

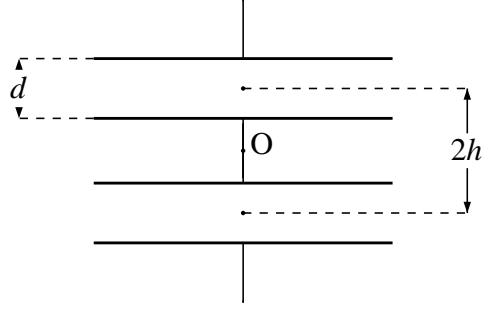


Fig. 8: Condensatori sovrapposti.

Usando la (A3.1), per il tensore di quadrupolo totale abbiamo

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= q_1 d \begin{pmatrix} -2h & 0 & 0 \\ 0 & -2h & 0 \\ 0 & 0 & 4h \end{pmatrix} - q_2 d \begin{pmatrix} 2h & 0 & 0 \\ 0 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & -4h \end{pmatrix} \\ &= (q_1 + q_2) d \begin{pmatrix} -2h & 0 & 0 \\ 0 & -2h & 0 \\ 0 & 0 & 4h \end{pmatrix} = q d \begin{pmatrix} -2h & 0 & 0 \\ 0 & -2h & 0 \\ 0 & 0 & 4h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Come si vede, Q_{ik} è costante, quindi non abbiamo radiazione di quadrupolo in questo caso, almeno all'ordine più basso.

Diversamente vanno le cose nel primo caso (condensatori affiancati). Se prendiamo l'origine nel centro della figura, le solite grandezze x^0, y^0, z^0, \bar{q} assumono ora i valori:

- per il condensatore di sinistra (quello inizialmente carico)

$$x^0 = -b, \quad y^0 = z^0 = 0, \quad \bar{q} = q_1$$

- per il condensatore di destra (inizialmente scarico)

$$x^0 = b, \quad y^0 = z^0 = 0, \quad \bar{q} = -q_2.$$

Qui b ha lo stesso significato che nella sez. 7: raggio della spira.

Usando di nuovo la (A3.1):

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= q_1 d \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 0 \\ -3b & 0 & 0 \end{pmatrix} + q_2 d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3bd (q_2 - q_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3bd (q - 2q_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque ora il momento di quadrupolo non è nullo, e non lo è neppure la sua derivata terza, che figura nella (A2.6) per la potenza irradiata. Facendo il calcolo:

$$W_q = \frac{Z_0}{10\pi c^4} b^2 d^2 (\ddot{q}_1)^2. \quad (21)$$

Prendendo \ddot{q}_1 dalla (A1.12) e integrando su t arriviamo infine, dopo qualche passaggio, a

$$E_q = \frac{Z_0 b^2 d^2 q^2 \gamma^2 (\gamma + 2)}{10 \pi c^4 \tau_C^5} \simeq \frac{Z_0 b^2 d^2 q^2 \gamma^2}{5 \pi c^4 \tau_C^5}$$

(si ricordi che $\gamma \ll 1$). Possiamo confrontare E_q con E_m dato dalla (17):

$$\frac{E_q}{E_m} = \frac{6 d^2}{5 \pi^2 b^2} = 3.0 \cdot 10^{-6}.$$

Risultato: la radiazione di quadrupolo è comunque trascurabile, e a maggior ragione potremo ignorare i multipoli superiori.

11. La resistenza di radiazione

Ora che abbiamo trattato a fondo le modalità d'irraggiamento del nostro (complicato) sistema, possiamo riprendere un'idea che era apparsa nella sez. 2 e di nuovo richiamata nella sez. 7.

A rigore una resistenza di radiazione può essere definita solo in regime sinusoidale: il caso pratico in cui interessa è quello delle antenne (trasmettenti o riceventi). Pensiamo a un'antenna trasmittente: in quel caso le oscillazioni della corrente, che sarebbero smorzate a causa dell'energia perduta come radiazione, sono mantenute stazionarie grazie all'intervento di un *generatore*, che ha appunto la funzione di rifornire l'energia dissipata, attingendola da una sorgente di energia diversa (pila, alimentatore).

Nel caso di un'antenna trasmittente si cerca quanto possibile di ridurre tutti gli effetti dissipativi diversi dall'irraggiamento, per cui la resistenza di radiazione diventa il componente resistivo principale del circuito d'antenna. Nel nostro caso non sarà così, visto che l'irraggiamento è comunque piccolo: coi valori assunti dei parametri del circuito, la radiazione dominante (dipolo magnetico) è meno di un millesimo di quella dissipata per effetto Joule (eq. (20)). Dobbiamo dunque aspettarci che anche la resistenza di radiazione sarà trascurabile rispetto a quella ohmica, che abbiamo stimato in 0.1Ω . Lo scopo di questa sezione è comunque di dare indicazioni su come la resistenza di radiazione possa essere stimata in generale.

Come detto sopra, una definizione corretta della resistenza di radiazione si può dare solo in regime sinusoidale. Nel nostro caso le oscillazioni sono smorzate, ma con tempo di smorzamento lungo rispetto al periodo delle oscillazioni

(eq. (14) in sez. 7). Possiamo quindi sperare che almeno come approssimazione una definizione di resistenza di radiazione sia possibile anche per il nostro sistema.

Ripartiamo dalla (16), che dà la potenza istantanea irraggiata per dipolo magnetico. In essa figura \ddot{I} , che ha — nelle nostre ipotesi — andamento praticamente sinusoidale (eq. (A1.16)). Possiamo quindi scrivere

$$\ddot{I} = -\frac{|\varrho|^2}{4 \tau_L^2} I = -\frac{4 \pi^2}{\tau_{\text{osc}}^2} I.$$

Inserendo nella (16) troviamo, dopo qualche semplificazione

$$W_m = \frac{\pi}{6} Z_0 \left(\frac{2 \pi b}{c \tau_{\text{osc}}} \right)^4 I^2$$

che può essere scritta

$$W_m = R_{\text{rad}} I^2$$

se poniamo

$$R_{\text{rad}} = \frac{\pi}{6} Z_0 \left(\frac{2 \pi b}{c \tau_{\text{osc}}} \right)^4. \quad (22)$$

È appunto questa la definizione della resistenza di radiazione: una resistenza che se fosse presente nel circuito provocherebbe una dissipazione per effetto Joule uguale alla potenza irraggiata. Coi soliti valori numerici si ha

$$R_{\text{rad}} = 6.7 \cdot 10^{-5} \Omega \quad (23)$$

e l'ipotesi fatta, che la resistenza di radiazione dovesse risultare molto piccola, è verificata.

L'interpretazione fisica è semplice: nella (22) figura l'impedenza caratteristica del vuoto (377Ω) moltiplicata per un numero puro, che è il rapporto fra la circonferenza della spira e la lunghezza d'onda irraggiata, alla quarta potenza. La circonferenza vale 1.26 m, mentre la lunghezza d'onda è 52 m. Il loro rapporto vale 0.024, e la quarta potenza fa il resto.

Alla (23) saremmo potuti arrivare molto più rapidamente per altra via. Visto che l'energia irraggiata è molto minore (meno di 1/1000) di quella perduta nella scarica, possiamo identificare l'energia perduta con quella dissipata per effetto Joule in R . Allora potremo scrivere la proporzione:

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{R_{\text{rad}}}{R}$$

e usando i valori numerici noti, si riottiene la (23).

12. Il problema delle costanti distribuite

Prima di concludere, è opportuno riprendere un problema che è apparso più volte, in modo più o meno esplicito, e che presenta diverse facce. Il titolo della sezione indica di che si tratta: quando possibile si cerca di schematizzare un circuito elettrico mediante componenti discreti (resistori, condensatori, induttori) e di ridurre il comportamento del circuito, radiazione inclusa, al comportamento di questi componenti. Ma non sempre questo è possibile, ed è appunto in tali casi che si parla di “costanti distribuite.”

Dato che il calcolo con le costanti concentrate è di gran lunga più semplice, lo si preferisce quando la schematizzazione è lecita; ma qui nascono le domande: come si fa a vedere se si può lavorare con sole costanti concentrate? E in caso di risposta negativa, quali sono gli effetti delle costanti distribuite?

Rispondere alla seconda domanda è molto più difficile, e qui non potrò occuparmene. Quanto alla prima, a parte qualche considerazione generale, discuterò in maggior dettaglio un solo caso particolare, che si presta a un calcolo abbastanza elementare.

Ma prima ricordiamo dove e come il problema delle costanti distribuite è già apparso nei nostri ragionamenti.

- 1) È stato citato (senza spiegazioni) nell'introduzione.
- 2) Nella sez. 5 è apparso di nascosto nel calcolo del momento di dipolo, quando ci siamo chiesti se la carica fosse distribuita uniformemente sulle armature.
- 3) Alla fine della sez. 7 abbiamo parlato di “capacità parassite,” che è un caso particolare, puramente elettrostatico.
- 4) Nella sez. 8 il problema è apparso sotto forma di “problema del ritardo”: i multipoli superiori sono trascurabili se il tempo di propagazione di un segnale e.m. entro il circuito è piccolo rispetto al periodo di oscillazione.
- 5) Alla fine della sez. 9 c'è un'oscura allusione che ora andrà chiarita.

Lascio da parte il punto 2), che voglio trattare più a fondo. Quanto al punto 3), in termini generali è abbastanza semplice, anche se poi un calcolo sufficientemente accurato può essere assai complicato. Se i condensatori sono carichi (anche parzialmente) i due conduttori che li collegano non sono allo stesso potenziale, quindi fra loro sarà presente un campo elettrico. Di conseguenza i conduttori non potranno essere neutri, ma porteranno delle cariche non nulle, il che equivale a dire che sarà presente anche una capacità del “condensatore” formato dai due fili. Sono queste che nel gergo elettronico vengono chiamate “capacità parassite.”

Si sa dalla pratica che nei circuiti di dimensioni ordinarie le capacità parassite possono ammontare a qualche pF, e questo indica in quali casi possano diventare importanti. Esistono tecniche per ridurle, o comunque per cancellarne l'effetto; ma qui non serve andare oltre questo breve cenno.

Il problema del ritardo (punto 4) è assai più complicato già nella sua natura. Se il tempo di propagazione dei segnali e.m. tra parti diverse del circuito non è trascurabile, non è ammesso trattare come equipotenziali conduttori anche di resistenza trascurabile; non si può supporre che la corrente lungo un filo sia la stessa in ogni sezione; in generale non si possono usare le leggi di Kirchhoff, ma bisogna ricorrere all'apparato completo delle equazioni di Maxwell.

Il campo per eccellenza dove tutto ciò è importante sono le antenne, e infatti la teoria delle antenne è il campo più complesso dell'ingegneria radio ed elettronica. Sono possibili e usate in pratica certe schematizzazioni parziali, che stanno a metà strada tra la teoria dei circuiti alla Kirchhoff e le equazioni di Maxwell. Di più ora non è il caso di dire.

In realtà il problema si presenta anche in casi in cui non sono presenti oscillazioni né radiazione: basta tener conto della resistenza dei conduttori che uniscono i due condensatori. Infatti se la carica sui condensatori non è la stessa, anche i loro potenziali sono diversi, e i due conduttori collegano punti a potenziale diverso. Niente di strano, si dirà: a causa della resistenza del filo, lungo questo ci sarà una "caduta di tensione." Vero, ma questo, insieme con la conducibilità finita, fa sì che dentro il filo il campo elettrico non sia nullo, e alla superficie non sia esattamente ortogonale, come sarebbe in condizioni statiche.

Quanto influisce tutto ciò sulle proprietà del nostro circuito? Possiamo sperare che l'effetto sia trascurabile, in questo come in molti altri casi; ma bisognerebbe provarlo con qualche valutazione, con qualche calcolo...

Infine il punto 5). Se riduciamo la capacità dei condensatori, non solo diventano importanti le capacità parassite, ma questo ha la conseguenza che la corrente non è la stessa lungo i fili che collegano i condensatori, come già detto poco sopra. Ne segue che il calcolo del momento di dipolo magnetico va rivisto e così pure quello dell'energia irraggiata. Il nostro circuito non è un'antenna, nel senso che come radiatore è pochissimo efficiente; ma con le antenne condivide il problema teorico detto sopra. Anche qui, mi limito ad aver chiarito la natura del problema.

13. Il caso della carica sul condensatore

Torniamo al punto 2), su cui è possibile un ragionamento abbastanza semplice. Ricordo il problema: avevamo detto che per il calcolo del momento di dipolo elettrico non è necessario supporre che la carica abbia una densità superficiale costante su tutta l'armatura, ed è vero. Ma non abbiamo esaminato se l'uniformità sussista o no, e soprattutto quale possa esserne l'effetto. Non bisogna confondere questo problema con l'"effetto di bordo," che può essere trascurabile (i nostri condensatori hanno raggio 10 cm e distanza fra le armature 1 mm) mentre il fenomeno che ora discuteremo ha un'origine non elettrostatica, ma dinamica, e coinvolge anche l'interno del condensatore, non solo il bordo.

Pensiamo al condensatore che si carica o si scarica: se la carica sulle armature cambia, cambia pure il campo elettrico interno, ed è quindi presente una corrente di spostamento. Ci sarà allora un campo magnetico, che fra poco vedremo come calcolare. Anche il campo magnetico sarà variabile, e quindi — per induzione e.m. — produrrà un campo elettrico, che modificherà quello puramente elettrostatico. Ma un diverso campo elettrico richiede anche una diversa carica sulle armature, e vedremo che questa carica non è distribuita uniformemente: si tratta di calcolarla.

Come dati del problema, a parte la geometria del condensatore, supponiamo noto l'andamento nel tempo della carica totale su ciascuna armatura. Il ricorso necessario alle eq. di Maxwell si semplifica grazie alla simmetria del sistema, che ci garantisce circa le direzioni di \mathbf{E} e di \mathbf{H} dentro il condensatore, e dà anche alcune informazioni sulle loro intensità. Precisamente:

- possiamo assumere che \mathbf{E} sia sempre diretto come z ⁽¹¹⁾ (con verso eventualmente variabile nel tempo); quindi basta la sola componente z
- E_z dipenderà solo da r , non da φ o da z
- quanto a \mathbf{H} , le sue linee di campo saranno circolari, con lo stesso asse di simmetria del condensatore; quindi solo la componente H_φ sarà diversa da 0
- H_φ dipenderà anch'essa solo da r e non dalle altre coordinate.

Per brevità, da qui in poi scriverò E al posto di E_z e H al posto di H_φ (si ricordi però che E , H non sono i moduli dei campi, ma certe componenti; quindi possono anche essere negative).

Tutto ciò posto, le eq. di Maxwell ci dicono:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH) = \varepsilon_0 r \frac{\partial E}{\partial t} \quad (24)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (25)$$

$$\varepsilon_0 E = -\sigma \quad (26)$$

dove con σ indico la densità di carica superficiale sull'armatura superiore (funzione di r). Per comodità del lettore, ho riportato in App. 4 la derivazione delle (24)–(26).

La soluzione esatta di queste equazioni richiede strumenti matematici non elementari (funzioni di Bessel) ma per fortuna possiamo accontentarci di un'approssimazione. Supporremo quindi, per cominciare, che la distribuzione di carica

⁽¹¹⁾ In realtà dire che \mathbf{E} è diretto come z significa assumere che le armature siano equipotenziali, il che non è certo in condizioni variabili. Se la carica varia, le armature sono percorse da una corrente radiale; saranno equipotenziali solo se possiamo trascurarne la resistività. Occorrerebbe quindi stimare anche questo effetto, ma una stima accettabile appare assai complicata. Mi limito a dire che una stima assai grossolana mi ha dato una caduta di tensione per molti ordini di grandezza inferiore alla d.d.p. tra le armature, e perciò ritengo lecito non andare più a fondo.

sulle armature sia istante per istante poco diversa da quella statica relativa al valore istantaneo della carica totale. Ciò significa porre

$$\sigma = \frac{q_1}{\pi a^2}$$

e dalla (26)

$$E = \frac{q_1}{\pi \varepsilon_0 a^2}. \quad (27)$$

Inserendo questo valore di E nella (24) e integrando, con l'ovvia condizione $H(0) = 0$, troviamo $H(r)$:

$$H(r) = \frac{\dot{q}_1 r}{2\pi a^2}.$$

Sostituendo nella (25) e integrando ancora:

$$E(r) = E(0) + \mu_0 \frac{\ddot{q}_1 r^2}{4\pi a^2}. \quad (28)$$

La (28) è incompatibile con la (27), che dava E indipendente da r ; in realtà ne costituisce una correzione di prima approssimazione. La correzione sarà accettabile se il secondo membro a destra nella (28) è piccolo rispetto a $E(0)$.

Possiamo trasformare la (28) se assumiamo che q_1 abbia un andamento nel tempo poco diverso da quello sinusoidale (cosa giustificata coi nostri dati numerici grazie al piccolo valore di γ , come già sappiamo). Allora $\ddot{q}_1 = -\omega^2 q_1$ e quindi

$$E(r) = E(0) - \mu_0 \frac{\omega^2 q_1 r^2}{4\pi a^2} = E(0) - \frac{\omega^2 q_1 r^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2 a^2} = E(0) - \frac{k^2 q_1 r^2}{4\pi \varepsilon_0 a^2}. \quad (29)$$

Dato che il secondo termine è massimo in valore assoluto al bordo del condensatore ($r = a$) chiedere che sia piccolo rispetto al primo significa

$$\frac{k^2 |q_1|}{4\pi \varepsilon_0} \ll |E(0)|$$

$$k^2 |q_1| \ll 4\pi \varepsilon_0 |E(0)|.$$

Se per E usiamo l'espressione (27) arriviamo a

$$k^2 a^2 \ll 4, \quad (30)$$

condizione che ci è già familiare per altri motivi. Coi nostri dati $k^2 a^2 = 5.2 \cdot 10^{-4}$, quindi possiamo stare tranquilli.

Abbiamo incontrato la condizione (30) in forma leggermente diversa nella sez. 8 (eq. (15)) dove in realtà compare ks . Ma per s abbiamo preso $2b$ (diametro della spira) che è poco diverso da $2a$ (diametro delle armature). La (15) serviva ad assicurare che la radiazione di dipolo elettrico fosse dominante (a meno di sorprese, come abbiamo visto nel nostro caso) e anche che nelle espressioni della potenza emessa nei vari multipoli i termini in potenze successive di ks fossero trascurabili. Avevamo anche visto che la condizione (15) poteva essere letta come condizione per trascurare il tempo di propagazione delle azioni e.m. rispetto al periodo delle oscillazioni. Ora vediamo che la stessa condizione ci assicura che non occorre pensare a costanti distribuite.

Alla fine della sez. 9 si parlava della possibilità di rendere importante la radiazione di dipolo magnetico in confronto a quella dissipata per effetto Joule, e si accennava a un altro problema, che nasce se si riduce C e quindi si riduce il periodo di oscillazione. È ora facile capire di che si tratta: con un periodo di 27.5 ns la lunghezza d'onda si riduce a poco più di 8 m, e ks sale a 0.3. Quindi non si può trascurare il tempo di propagazione e tutto il castello delle nostre approssimazioni perde di consistenza.

Per completezza osserviamo che anche se la (30) non riuscisse ben soddisfatta, potremmo sempre considerare la (29) come una prima approssimazione per $E(r)$, e iterare; ossia sostituire la (29) nella (24), ricavare $H(r)$, sostituire nella (25), integrare di nuovo, ottenendo così un'approssimazione migliore. Procedendo ancora otterremmo per $E(r)$ una serie di potenze in r , che si potrebbe dimostrare essere convergente e fornire quindi la soluzione esatta.

Ma tutto ciò esula dai nostri scopi.

14. Riepilogo e conclusioni

Dato che il discorso è stato parecchio lungo e complesso, un riassunto s'impone. Ci siamo posto il problema della radiazione emessa da un semplice circuito, formato da un condensatore carico che a un certo istante viene collegato a un altro uguale, su cui si scarica parzialmente (fig. 1).

Abbiamo in primo luogo discusso le varie schematizzazioni possibili: trascurare o no la resistenza dei collegamenti? idem per la loro induttanza? Abbiamo cercato di dare una stima dei vari parametri in gioco, in quanto la legittimità o meno di una certa schematizzazione dipende in modo essenziale dai valori numerici di certe grandezze: dimensioni fisiche del sistema, grandezza di capacità, resistenze, induttanze.

Un primo passo è stato lo studio della radiazione emessa nel modo di dipolo elettrico: abbiamo visto che la stima data in [1] è grossolanamente errata, per almeno tre ordini di grandezza in eccesso, coi valori assunti dei parametri. Ciò deriva dall'aver preso un andamento esponenziale decrescente per la corrente di scarica, mentre invece il transitorio iniziale (determinato in modo essenziale dall'induttanza) è quello in cui si ha la maggior emissione di radiazione.

Si è poi visto che nelle condizioni che si possono ragionevolmente assumere per il circuito, in particolare trattando i fili di collegamento come un'unica spirale, l'induttanza per quanto piccola non è affatto trascurabile: la scarica ha un andamento oscillante e poco smorzato.

Altro punto trascurato in [1] e in [2] è la geometria del circuito: la radiazione di dipolo risulta nulla se i condensatori sono affiancati (fig. 1) mentre non lo è se sono sovrapposti (fig. 5).

Siamo poi passati a studiare l'eventuale importanza dei multipoli superiori, e abbiamo trovato che la radiazione di dipolo magnetico è in realtà quella dominante, per quasi due ordini di grandezza. In ogni caso però prevale la dissipazione di energia per effetto Joule nella resistenza, per almeno tre ordini di grandezza. Si potrebbe aumentare l'energia irraggiata modificando ampiamente la geometria del circuito, fino a trasformarlo in un'antenna; ma il calcolo sarebbe tutt'altro che semplice.

Per completezza abbiamo anche indagato l'importanza del modo di quadrupolo elettrico, e abbiamo visto che è largamente trascurabile rispetto al dipolo magnetico (circa 6 ordini di grandezza).

Ci siamo poi chiesti in che misura sia lecita la schematizzazione a costanti concentrate, e abbiamo concluso che gli effetti delle costanti distribuite sono (fortunatamente) sempre trascurabili nelle condizioni del nostro circuito.

Un commento finale appare opportuno: un risultato generale di questo lavoro è che bisogna stare molto attenti con le schematizzazioni e le approssimazioni. A volte si possono commettere errori anche importanti. Un'implicazione didattica ci sembra di poter proporre: è bene abituare gli allievi, in situazioni più semplici di quella qui discussa, all'esame critico delle schematizzazioni, che sono sempre necessarie, ma non sempre ovvie. E comunque debbono essere assunte consapevolmente, e non solo perché "si fa sempre così."

Ringrazio vivamente Umberto Penco, per una lettura critica che ha scovato alcuni errori e suggerito miglioramenti nell'esposizione.

Appendice 1: il circuito RLC

Con riferimento alla fig. 3, indico con V la d.d.p. tra i due punti A e B: $V = V(A) - V(B)$; con q_1, q_2 le cariche sulle armature dei condensatori non connesse a massa; con I la corrente nel circuito, presa positiva nel verso da A a B attraverso R, L .

Ciò posto, abbiamo

$$I = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \quad (\text{A1.1})$$

$$V = \frac{q_1 - q_2}{C} \quad (\text{A1.2})$$

$$V = RI + L \frac{dI}{dt}. \quad (\text{A1.3})$$

Dalla (A1.1) si vede che $q_1 + q_2$ è costante: indico con q il suo valore, che coincide con la carica su C_1 all'inizio della scarica ($t = 0$). Perciò la (A1.2) si può scrivere

$$V = \frac{2q_1 - q}{C}. \quad (\text{A1.2}')$$

Sostituendo nella (A1.3) l'espressione (A1.1) di I , e quella (A1.2') di V , abbiamo l'equazione differenziale per q_1 :

$$L \ddot{q}_1 + R \dot{q}_1 + \frac{2}{C} q_1 = \frac{1}{C} q \quad (\text{A1.4})$$

con le condizioni iniziali

$$q_1(0) = q \quad \dot{q}_1(0) = 0 \quad (\text{A1.5})$$

(la seconda si ottiene da $I(0) = 0$).

L'integrale generale della (A1.4) è

$$q_1(t) = \frac{1}{2} q + c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \quad (\text{A1.6})$$

dove

$$k_1 = -\frac{1}{2\tau_L} (1 + \varrho) \quad k_2 = -\frac{1}{2\tau_L} (1 - \varrho) \quad (\text{A1.7})$$

e

$$\varrho = \sqrt{1 - \frac{8}{\gamma}}.$$

Si noti che ϱ può essere reale o immaginario puro, a seconda del valore di γ . Se $\gamma > 8$ scelgo ϱ reale positivo; se $\gamma < 8$ lo scelgo immaginario positivo. Ma per il momento non occorre distinguere i due casi. Osserviamo solo che se ϱ è reale, k_1 e k_2 sono entrambi reali negativi; se invece ϱ è immaginario k_1 e k_2

sono complessi, entrambi con parte reale negativa. Per i calcoli riescono utili le seguenti relazioni:

$$k_1 + k_2 = -\frac{1}{\tau_L} \quad k_1 - k_2 = -\frac{\varrho}{\tau_L} \quad k_1 k_2 = \frac{1}{4\tau_L^2} (1 - \varrho^2) = \frac{2}{\gamma \tau_L^2}.$$

Le condizioni iniziali (A1.5) determinano c_1, c_2 :

$$c_1 = \frac{k_2 q}{2(k_2 - k_1)} \quad c_2 = \frac{k_1 q}{2(k_1 - k_2)}. \quad (\text{A1.8})$$

Sostituendo in (A1.6) si ha:

$$q_1 = \frac{1}{2} q \left(1 + \frac{k_2 e^{k_1 t} - k_1 e^{k_2 t}}{k_2 - k_1} \right). \quad (\text{A1.9})$$

Ci serviranno le prime tre derivate di q_1 :

$$I = -\dot{q}_1 = -\frac{1}{2} q k_1 k_2 \frac{e^{k_1 t} - e^{k_2 t}}{k_2 - k_1} \quad (\text{A1.10})$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2} q k_1 k_2 \frac{k_1 e^{k_1 t} - k_2 e^{k_2 t}}{k_2 - k_1} \quad (\text{A1.11})$$

$$\ddot{I} = -\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2} q k_1 k_2 \frac{k_1^2 e^{k_1 t} - k_2^2 e^{k_2 t}}{k_2 - k_1} \quad (\text{A1.12})$$

Distinguiamo ora i due casi $\gamma < 8$ (oscillazioni smorzate) e $\gamma > 8$ (scarica aperiodica) per esaminare l'andamento qualitativo di $q_1(t)$.

A) $\gamma < 8$, *oscillazioni smorzate*:

Sostituendo in (A1.9) le espressioni (A1.8) di c_1, c_2 e le (A1.7) di k_1, k_2 ; sviluppando, e trasformando gli esponenziali complessi in esponenziali reali e funzioni trigonometriche, si ottiene (va ricordato che ϱ è immaginario positivo: $\varrho = i|\varrho|$)

$$q_1(t) = \frac{1}{2} q + \frac{1}{2|\varrho|} q e^{-t/(2\tau_L)} \left(|\varrho| \cos \frac{|\varrho| t}{2\tau_L} + \sin \frac{|\varrho| t}{2\tau_L} \right) \quad (\text{A1.13})$$

dalla quale si vede che il periodo di oscillazione è

$$\tau_{\text{osc}} = \frac{4\pi\tau_L}{|\varrho|} \quad (\text{A1.14})$$

mentre la costante di tempo di smorzamento vale

$$\tau_{\text{sm}} = 2\tau_L \quad (\text{A1.15})$$

Nel caso limite $\gamma \ll 8$ (induttanza grande) la (A1.14) diventa

$$\tau_{\text{osc}} = \pi \sqrt{2LC}. \quad (\text{A1.14}')$$

Nello stesso limite, essendo anche $|\varrho| \gg 1$, nella (A1.13) possiamo trascurare il fattore esponenziale e il termine in seno rispetto al coseno. Si ottiene così un semplice andamento sinusoidale:

$$q_1(t) = \frac{1}{2} q \left(1 + \cos \frac{|\varrho|t}{2\tau_L} \right) \quad (\text{A1.13}')$$

e per la corrente:

$$I(t) = \frac{q|\varrho|}{4\tau_L} \sin \frac{|\varrho|t}{2\tau_L} \quad (\text{A1.16})$$

B) $\gamma > 8$, *scarica aperiodica*:

In questo caso conviene porre

$$k_1 = -\frac{1}{\tau_a} \quad k_2 = -\frac{1}{\tau_b} \quad (\text{A1.17})$$

e la (A1.9) diventa

$$q_1 = \frac{q}{4\varrho} \left(2\varrho - (1 - \varrho) e^{-t/\tau_a} + (1 + \varrho) e^{-t/\tau_b} \right).$$

Il significato di τ_a , τ_b si coglie meglio osservando $I = -\dot{q}_1$:

$$I(t) = \frac{q}{4\varrho\tau_C} \left(e^{-t/\tau_b} - e^{-t/\tau_a} \right). \quad (\text{A1.18})$$

Si vede che la corrente sale con costante di tempo τ_a e poi (infatti $\tau_a < \tau_b$) scende con costante di tempo τ_b .

Scriviamo anche \ddot{q}_1 :

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{q}{4\varrho\tau_C} \left(\frac{1}{\tau_b} e^{-t/\tau_b} - \frac{1}{\tau_a} e^{-t/\tau_a} \right). \quad (\text{A1.19})$$

Nel caso limite $\gamma \gg 8$ (induttanza piccola) dalle (A1.16) si ottiene

$$\tau_a = -\frac{1}{k_1} = \tau_L \quad \tau_b = -\frac{1}{k_2} = \frac{1}{2} \tau_C \quad \varrho = 1$$

quindi $\tau_a \ll \tau_b$. Nella (A1.19) domina il secondo termine e \ddot{q}_1 va come $1/L$.

Appendice 2: formule per la potenza irraggiata

Qui di seguito presento le formule rilevanti per il calcolo della radiazione di dipolo elettrico, dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Su molti testi e anche in internet si possono trovare le formule relative a sistemi di cariche e correnti che variano sinusoidalmente nel tempo. Tuttavia noi abbiamo bisogno di espressioni più generali, valide per cariche e correnti variabili nel tempo in modo qualsiasi: queste sono meno facili da trovare. Qui farò riferimento a Landau e Lifschitz [7], sez. 71.5. Ho trasformato le formule nel SI e usato

$$Z_0 = c \mu_0 \simeq 377 \Omega$$

(la cosiddetta “impedenza caratteristica del vuoto”).

Nei tre casi scrivo in primo luogo la potenza irraggiata, dalla quale si calcola l’energia totale usando la legge di variazione temporale di cariche e correnti e integrando. Fornisco poi le espressioni dei diversi momenti, nella forma più pratica per il nostro problema.

Dipolo elettrico:

$$W_d = \frac{Z_0}{6 \pi c^2} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (\text{A2.1})$$

dove \mathbf{p} è il vettore momento di dipolo elettrico:

$$\mathbf{p} = \sum_a q^{(a)} \mathbf{r}^{(a)} = \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{r} dS. \quad (\text{A2.2})$$

L’integrale di superficie qui e nella (A2.4) è la forma più utile per i condensatori, se si suppone nota la densità superficiale di carica.

Dipolo magnetico:

$$W_m = \frac{Z_0}{6 \pi c^4} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 \quad (\text{A2.3})$$

dove \mathbf{m} è il vettore momento di dipolo magnetico:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_a q^{(a)} \mathbf{r}^{(a)} \times \mathbf{v}^{(a)} = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}. \quad (\text{A2.4})$$

Nella (A2.4) l’integrale di linea è l’espressione utile quando non ci sono cariche in moto se non le correnti di conduzione lungo un circuito chiuso, come nel nostro caso (trascurando la corrente di spostamento nei condensatori). Per una spira circolare di raggio b la (A2.4) si semplifica ancora:

$$\mathbf{m} = \pi b^2 I \mathbf{n} \quad (\text{A2.5})$$

con \mathbf{n} versore della normale alla spira.

Quadrupolo elettrico:

$$W_q = \frac{Z_0}{720 \pi c^4} \ddot{Q}_{ik} \ddot{Q}_{ik} \quad (\text{A2.6})$$

dove il tensore Q_{ik} del momento di quadrupolo elettrico è definito come

$$Q_{ik} = \sum_a q^{(a)} \left(3 r_i^{(a)} r_k^{(a)} - \delta_{ik} r^{(a)2} \right) = \int_S \sigma(\mathbf{r}) (3 r_i r_k - \delta_{ik} r^2) dS. \quad (\text{A2.7})$$

Appendice 3: momento di quadrupolo di un condensatore

Riporto qui il calcolo del tensore di quadrupolo per un condensatore piano.⁽¹²⁾ Assumo che il condensatore abbia armature circolari di raggio a , distanti d tra loro, e che il centro del condensatore abbia coordinate (x_0, y_0, z_0) . Le armature stanno in piani paralleli a (x, y) ; la carica totale sull'armatura superiore (quella con z più grande) è \bar{q} , uniformemente distribuita, con densità $\sigma = \bar{q}/(4\pi a^2)$.

Nel seguito indicherò con S_+ , S_- le due armature, risp. superiore e inferiore (non è detto che la superiore sia positiva: questo è determinato dal segno di \bar{q}). La definizione del tensore di quadrupolo è la (A2.7), dove vanno inserite le coordinate del punto generico di ciascuna armatura. Usando coordinate cilindriche (ϱ, φ, z) si ha

$$\begin{aligned} \text{per } S_+: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ d/2 \end{pmatrix} \\ \text{per } S_-: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ -d/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Occorre un'espressione preliminare per $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$r^2 = r_0^2 + 2 x_0 \varrho \cos \varphi + 2 y_0 \varrho \sin \varphi \pm z_0 d + \varrho^2 + \frac{1}{4} d^2$$

dove ho posto $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ e i due segni valgono rispettivamente per S_+ e per S_- . Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3 (x_0 + \varrho \cos \varphi)^2 - (r_0^2 + z_0 d + \varrho^2 + \frac{1}{4} d^2) \right] - \\ &\quad \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3 (x_0 + \varrho \cos \varphi)^2 - (r_0^2 - z_0 d + \varrho^2 + \frac{1}{4} d^2) \right] \\ &= -2\pi a^2 \sigma z_0 d = -2 \bar{q} z_0 d. \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Per comodità, scriverò x, y, z invece di r_1, r_2, r_3 .

È ovvio che $Q_{22} = Q_{11}$. Ancora:

$$\begin{aligned}
Q_{33} &= \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3\left(z_0 + \frac{1}{2}d\right)^2 - \left(r_0^2 + z_0d + r^2 + \frac{1}{4}d^2\right) \right] - \\
&\quad \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3\left(z_0 - \frac{1}{2}d\right)^2 - \left(r_0^2 - z_0d + r^2 + \frac{1}{4}d^2\right) \right] \\
&= \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi (6z_0d - 2z_0d) = 4\bar{q}z_0d.
\end{aligned}$$

Q_{12} è nulla, in quanto le due armature danno contributi opposti. Poi

$$\begin{aligned}
Q_{13} &= \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3(x_0 + \varrho \cos \varphi) \left(z_0 + \frac{1}{2}d\right) \right] - \\
&\quad \sigma \int_0^a \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left[3(x_0 + \varrho \cos \varphi) \left(z_0 - \frac{1}{2}d\right) \right] \\
&= 3\bar{q}x_0d.
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo

$$Q_{23} = 3\bar{q}y_0d.$$

Possiamo riassumere tutto questo in

$$Q_{ik} = \bar{q}d \begin{pmatrix} -2z_0 & 0 & 3x_0 \\ 0 & -2z_0 & 3y_0 \\ 3x_0 & 3y_0 & 4z_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3.1})$$

Appendice 4: i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} dentro un condensatore

L'eq. (13) scritta in forma integrale, tenendo conto che dentro il condensatore $\mathbf{j} = 0$, dice che la circuitazione di \mathbf{H} lungo una curva chiusa C uguaglia (a parte il fattore ε_0) la derivata rispetto al tempo del flusso di \mathbf{E} attraverso una superficie S di cui C sia il bordo.

Prendiamo per C il cammino in fig. 9, situato in un piano parallelo alle armature, fra i

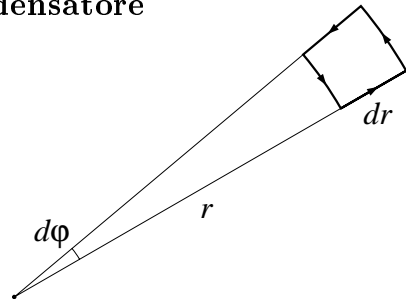


Fig. 9: La circuitazione di \mathbf{H} .

raggi r e $r + dr$ per un angolo $d\varphi$. Il flusso di \mathbf{E} è pertanto $E r dr d\varphi$. Quanto alla circuitazione di \mathbf{H} , si scrive

$$H(r + dr)(r + dr) d\varphi - H(r)r d\varphi = \left(H + r \frac{\partial H}{\partial r}\right) dr d\varphi = \frac{\partial}{\partial r}(rH) dr d\varphi.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{\partial}{\partial r}(rH) = \varepsilon_0 r \frac{\partial E}{\partial t}$$

che è la (24).

Per la (25) si parte dalla legge dell'induzione e.m.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

che in forma integrale dice: la circuitazione di \mathbf{E} lungo una curva chiusa C uguaglia (a parte il fattore $-\mu_0$) la derivata rispetto al tempo del flusso di \mathbf{H} attraverso una superficie S di cui C sia il bordo. Prendiamo per C il cammino in fig. 10, situato in un piano passante per l'asse del condensatore, fra i raggi r , $r + dr$ e con altezza dz . Il flusso di \mathbf{H} è pertanto $H dr dz$. Quanto alla circuitazione di \mathbf{E} , si scrive

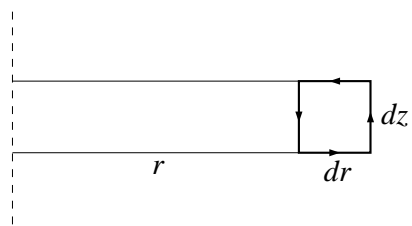


Fig. 10: La circuitazione di \mathbf{E} .

$$E(r + dr) dz - E(r) dz = \frac{\partial E}{\partial r} dr dz.$$

Dunque

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

che è la (25).

La (26) non è che la consueta relazione fra \mathbf{E} e σ in un condensatore; c'è solo da tener presente, per il segno, la definizione di $E = E_z$ e quella di σ .

Bibliografia

- [1] G. Fera: “Quanta energia è irradiata scaricando un condensatore?” *La Fisica nella Scuola* **45** (2012), 7.
- [2] G. Rinaudo: *La Fisica nella Scuola* **45** (2012), 93.
- [3] G. Fera: *La Fisica nella Scuola* **45** (2012), 140.
- [4] E. Fabri, U. Penco: “Gli obbiettivi del problema e i modi per raggiungerli”; *La Fisica nella Scuola* **27** (1994), suppl. al n. 4, 6.
- [5] J.D. Jackson: *Elettrodinamica classica*, Zanichelli 2001.
- [6] F. Grassi: *Magnetismo e elettricità*, (Hoepli 1911).
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifschitz; *Fisica Teorica*, vol. 2 (Editori Riuniti 2010).