10. Appendici

... ogni numero è il raggio di un cerchietto
o la lunghezza di una linea retta
o l'andamento di un'ellisse
o l'angolo di entrata o di uscita
o un indice del tempo ...

D. Del Giudice: *Atlante occidentale*

App. 1: Diffrazione nella camera oscura

Consideriamo una camera oscura di lunghezza l, con foro di diametro d. Se la sorgente di luce (puntiforme) è a distanza $D \gg d$, la macchia di luce sullo schermo ha diametro d (fig. 10–1).

Se invece di una sorgente puntiforme abbiamo una sorgente estesa, per es. circolare di diametro a, trascurando le dimensioni del foro si otterrà sullo schermo una macchia di diametro $a\,l/D$. Il diametro finito del foro causa una penombra al bordo della macchia, che è appunto trascurabile se $d \ll a\,l/D$. In queste condizioni l'intensità della luce che arriva sulla macchia (*illuminanza* E: v. App. 5) è proporzionale all'area del foro e inversamente al quadrato della lunghezza l: va quindi come $(d/l)^2$. Ricordiamo che d/l prende il nome di *apertura relativa*, e si usa di solito il simbolo $n = l/d$ (l'apertura relativa è $1/n$): dunque $E \propto 1/n^2$.

La "nitidezza" dell'immagine prodotta può essere espressa dal diametro d della macchia, oppure dalla *risoluzione angolare*. L'angolo minimo tra due sorgenti puntiformi perché queste producano macchie del tutto separate è $d/l = 1/n$, ma anche a distanza metà di questa ci si accorge di aver a che fare con due sorgenti. Prenderemo quindi come misura della risoluzione $\varepsilon = d/(2l) = 1/(2n)$. Si vede che risoluzione e luminosità vanno in senso opposto: alta risoluzione significa grande n, ossia bassa luminosità, e viceversa.

Tutto questo è vero finché vale l'ottica geometrica, ossia finché si può trascurare la *diffrazione*. Nelle condizioni in cui ci siamo posti (sorgente puntiforme lontana, foro circolare) la diffrazione produce sullo schermo una distribuzione di luce più complicata, con massimi e minimi che si alternano. È però importante la regione del massimo centrale, che è delimitata da una circonferenza dove l'irradianza si annulla. Se il foro è sufficientemente piccolo (v. dopo) il raggio di questa circonferenza vale $r = 1.22\,n\lambda$, ovviamente per luce monocromatica di lunghezza d'onda λ. Si assume di solito come limite di risoluzione in queste condizioni l'angolo $\varepsilon = r/l = 1.22\,\lambda/d$. Tutto ciò a condizione che sia $r \gg d$, ossia che la risoluzione sia *limitata dalla diffrazione*.

Supponiamo che nella nostra camera oscura l sia fissata, ma si possa variare a piacere d: quale sarà il valore migliore agli effetti della risoluzione? Se d

è grande la diffrazione è trascurabile, ma la risoluzione va come d; se invece d è piccolo la risoluzione va come $1/d$ (fig. 10–2). È ovvio che la condizione ottima si ha quando $r \simeq d/2$, ossia per $d \simeq \sqrt{2.44\, l\lambda}$; l'angolo di risoluzione ottimo vale allora $\sqrt{2.44\, \lambda/l}$.

Come si vede, la risoluzione ottenibile con una camera oscura migliora al crescere di l, ma richiede un'apertura relativa sempre più piccola, che si riflette in una sempre peggiore luminosità.

Vediamo un esempio numerico: $l = 10\,\mathrm{cm}$, $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. Allora il diametro ottimo del foro è $d = 0.35\,\mathrm{mm}$ e la risoluzione angolare è $3.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 12'$ (molto peggiore dell'occhio umano). Se si spinge l fino a 1 metro, d cresce a $1.1\,\mathrm{mm}$, e la risoluzione passa a $3.8'$.

Si noti che nel secondo caso la diffrazione è importante con un foro di oltre 1 mm, ben 2000 volte la lunghezza d'onda della luce. Questo dovrebbe sfatare la leggenda, che si trova tanto spesso ripetuta anche sui libri, che la diffrazione entra in gioco solo quando si ha a che fare con oggetti che hanno dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda.

App. 2: La lente di Fresnel

La prima applicazione della lente di Fresnel è stata per generare i fasci di luce dei fari (1822). Quella che a noi interessa è assai più recente… Il modo più semplice per studiarla è di vedere una sezione meridiana della lente come formata di tanti prismi (fig. 10–3). Consideriamo uno di questi prismi (fig. 10–4) e cerchiamo la condizione perché un raggio entrante, che proviene dalla sorgente A, esca passando per B.

Tra gli angoli in figura esistono le relazioni

$$\gamma = \alpha' + \beta' \qquad \beta = \bar\beta + \gamma \tag{1}$$

mentre la legge della rifrazione richiede

$$\sin\alpha = n\,\sin\alpha' \qquad \sin\beta = n\,\sin\beta'. \tag{2}$$

Sostituendo le (1) nella seconda delle (2):

$$\sin(\bar\beta + \gamma) = n\,\sin(\gamma - \alpha')$$

$$\sin\bar\beta\cos\gamma + \cos\bar\beta\sin\gamma = n\,(\sin\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma\sin\alpha')$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\gamma &= \frac{n\,\sin\alpha' + \sin\bar\beta}{n\,\cos\alpha' - \cos\bar\beta} \\ &= \frac{\sin\alpha + \sin\bar\beta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\bar\beta} \end{aligned}$$

Se supponiamo che il prisma sia molto sottile possiamo identificare le distanze dall'asse dei punti P, Q. Allora $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\bar\beta$, $\cos\bar\beta$ si esprimono in termini di a, b, r e si trova infine

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r\left(\sqrt{a^2+r^2}+\sqrt{b^2+r^2}\right)}{\sqrt{b^2+r^2}\sqrt{n^2a^2+(n^2-1)r^2}-b\sqrt{a^2+r^2}}. \tag{3}$$

La (3) fornisce γ in funzione di r, e dice quindi come debbono essere sagomati i singoli prismi (che nella lente sono in realtà a forma di corone circolari), a seconda della distanza dall'asse, per avere la focalizzazione cercata. Si noti che γ dipende in modo complicato da a e da b: però se $r \ll a, b$ la (3) si approssima con

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

e questa mostra che vale la formula dei punti coniugati, ossia che una stessa lente funziona bene per tutte le coppie di punti A, B per le quali $1/a+1/b$ è costante.

A grande apertura ciò non accade, e la lente va progettata per la precisa geometria in cui sarà usata. Ciò significa che in generale la lente di Fresnel presenta *aberrazione sferica*, come ogni lente di grande apertura. Ci si può convincere di questo osservando che cosa accade se si capovolge la lente di una lavagna luminosa.

App. 3: Se la Luna fosse una sfera riflettente ...

Ragioniamo in termini energetici. Una sfera riflettente rimanda tutta la radiazione incidente, e la rimanda in modo isotropo (la dimostrazione sta in fondo a questa app.). Sia F_S la densità di flusso della radiazione solare che arriva alla Luna, r il raggio della Luna. Allora la potenza ricevuta e riflessa è $\pi r^2 F_\mathrm{S}$. Dato che la radiazione viene rinviata isotropicamente, la densità di flusso F_L ricevuta alla distanza d della Terra si ottiene dividendo per $4\pi d^2$:

$$F_\mathrm{L} = F_\mathrm{S}\left(\frac{r}{2d}\right)^2.$$

Si può calcolare da qui la *magnitudine apparente* della Luna speculare. La definizione generale è

$$m_\mathrm{L} - m_\mathrm{S} = 2.5\log_{10}\frac{F_\mathrm{S}}{F_\mathrm{L}} = 5\log_{10}\frac{2d}{r}.$$

Sostituendo per r il raggio della Luna, per d la distanza media Terra–Luna si trova

$$m_\mathrm{L} = m_\mathrm{S} + 13.23 = -13.51.$$

Il risultato va confrontato con la magnitudine visuale della Luna piena, che è -12.73: ciò significa che se la Luna fosse speculare ci manderebbe una luce d'intensità doppia di quella della luna piena reale.

Isotropia della luce riflessa

Consideriamo un fascio di raggi paralleli incidente sulla Luna, e seguiamo la riflessione di quelli che si trovano a distanza dall'asse fra s e $s+ds$ (fig. 10–5). L'area della sezione trasversale (corona circolare) è $2\pi\, s\, ds$, e la corrispondente potenza incidente è quindi

$$dW = 2\pi\, s\, F_\mathrm{S}\, ds.$$

I raggi vengono riflessi ad angoli compresi fra β e $\beta + d\beta$, dove

$$\beta = 2\alpha \qquad s = r\, \sin\alpha \qquad ds = r\, \cos\alpha\, d\alpha.$$

Dunque

$$dW = 2\pi\, r^2 \sin\alpha\, \cos\alpha\, F_\mathrm{S}\, d\alpha.$$

L'angolo solido descritto da questi raggi è

$$d\Omega = 2\pi\, \sin\beta\, d\beta = 8\pi\, \sin\alpha\, \cos\alpha\, d\alpha$$

e ne segue

$$\frac{dW}{d\Omega} = \tfrac{1}{4}\, r^2 F_\mathrm{S}$$

che è costante, e ciò prova l'isotropia.

La potenza totale riflessa si ottiene moltiplicando per 4π, e risulta $\pi r^2 F_\mathrm{S}$, che coincide con la potenza totale incidente sulla Luna.

App. 4: Riflessi sul mare

Perché, quando il Sole è al tramonto, sul mare si vede una striscia di luce? Se la superficie del mare fosse piana, ci sarebbe un solo punto di riflessione (fig. 10–6); oppure, considerato che il Sole è esteso, si vedrebbe un'immagine virtuale del Sole.

Supponiamo che ci siano onde, e che siano dirette proprio nella direzione del Sole: allora per la riflessione (sempre supponendo il Sole puntiforme) ci sono diversi angoli possibili, in un intervallo $(-\beta, +\beta)$ che dipende dall'altezza delle onde (fig. 10–7). Ne segue che ogni tratto della superficie del mare rimanda luce in un angolo tra $\alpha - 2\beta$ e $\alpha + 2\beta$, se α è l'altezza del Sole. Perciò noi riceveremo luce da tutti i punti della superficie che vediamo sotto un angolo (rispetto all'orizzontale) compreso tra quei valori (fig. 10–8). La distanza di quei punti è $h \operatorname{cotg}\gamma$, con $\alpha - 2\beta \le \gamma \le \alpha + 2\beta$.

Esempio: Se siamo ad $h = 10\,\mathrm{m}$ sul mare, e se $\alpha = 5°$, $\beta = 2°$, le distanze minima e massima sono $63\,\mathrm{m}$, $573\,\mathrm{m}$. Se $2\beta \geq \alpha$ si arriva all'infinito.

Perché di solito si vede una striscia più larga del Sole? Perché le onde non hanno tutte la stessa direzione, per cui le riflessioni sono possibili anche fuori dal piano verticale che contiene Sole e occhio. Quanto più il mare è mosso, tanto più la striscia è larga.

App. 5: Grandezze e unità di misura per la radiazione e.m.

Parlando di luce, o più in generale di radiazione elettromagnetica, è necessario introdurre un certo numero di grandezze fisiche legate al trasporto di energia associato alle onde e.m.

Due premesse:

a) In relazione al fatto che le quantità di energia sono sempre legate all'intervallo di tempo che si considera, è più significativo ragionare in termini di potenza (generalmente mediata su intervalli, anche piccoli, ma molto maggiori del periodo di oscillazione dei campi).

b) Con riferimento alla composizione spettrale della radiazione considerata, ognuna di quelle grandezze — per es. A — è una somma (o meglio un integrale) dei contributi relativi a ciascuna lunghezza d'onda presente nella radiazione (o a ciascun intervallo infinitesimo $d\lambda$; la corrispondente distribuzione spettrale della grandezza A si indica di solito con $A_\lambda(\lambda)$); la somma viene generalmente pesata con un'opportuna funzione $f(\lambda)$ che può assumere varie denominazioni ("curva di sensibilità spettrale," "risposta spettrale,"...):

$$A = \int_0^\infty A_\lambda(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda$$

Due scelte della funzione $f(\lambda)$ sono particolarmente usate:

– se la funzione è costante, in particolare $f(\lambda) = 1$, si hanno le cosiddette *grandezze radiometriche*, che quindi considerano globalmente l'energia in gioco, sommando i contributi su tutte le lunghezze d'onda presenti;

– se $f(\lambda)$ rappresenta la curva di sensibilità dell'occhio (medio) si hanno invece le *grandezze fotometriche*, per le quali si considerano solo le componenti visibili della radiazione, con un peso crescente dal rosso al giallo-verde e decrescente fino al violetto.

A ciascuna delle principali grandezze radiometriche elencate qui sotto potrà quindi essere associata la corrispondente grandezza fotometrica; si usa designare le grandezze radiometriche e le corrispondenti fotometriche con lo stesso simbolo, aggiungendo l'indice "e" per le prime e (talvolta) l'indice "v" per le seconde.

Le grandezze da 1 a 4 fanno riferimento alla sorgente che emette la radiazione, la 5 alla propagazione, la 6 alla superficie su cui la radiazione incide.

Le tabelle finali riportano la corrispondenza, con le rispettive unità di misura. Nel S.I. la grandezza fotometrica fondamentale è l'*intensità luminosa*, la cui unità di misura, la "candela" (cd), è definita in questo modo dal 1979 (16ª CGPM):

Intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica alla frequenza di $540 \cdot 10^{12}$ Hz *e che ha un'intensità radiante in quella direzione di* $(1/683)$ W/sr.

1. *Flusso radiante*: Potenza totale emessa da una sorgente.
2. *Emittanza radiante*: Potenza emessa per unità di area (da un elemento di superficie della sorgente), in ogni direzione.
3. *Intensità radiante*: Potenza emessa per unità di angolo solido (in una data direzione), da tutta la sorgente (si usa in particolare per sorgenti puntiformi, cioè a grande distanza).
4. *Radianza*: Potenza emessa per unità di area (da un elemento della superficie della sorgente) e per unità di angolo solido (in una data direzione) divisa per $\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo tra la normale alla superficie e la direzione data.
5. *Densità di Flusso radiante*: Potenza trasmessa per unità di superficie (disposta normalmente alla direzione di propagazione).
6. *Irradianza*: Potenza ricevuta per unità di superficie (dipende dall'angolo ϑ tra la direzione di propagazione e la normale alla superficie).

Tabelle di riepilogo

Grandezza radiometrica	Simbolo	Unità
Flusso radiante	Φ_e	W
Emittanza rad.	M_e	$\mathrm{W\,m^{-2}}$
Intensità rad.	I_e	$\mathrm{W\,sr^{-1}}$
Radianza	L_e	$\mathrm{W\,sr^{-1}\,m^{-2}}$
Dens. Flusso rad.		$\mathrm{W\,m^{-2}}$
Irradianza	E_e	$\mathrm{W\,m^{-2}}$

Grandezza fotometrica	Simbolo	Unità
Flusso luminoso	Φ	lumen (lm) = cd sr
Emittanza lum.	M	$\mathrm{lm\,m^{-2}}$
Intensità lum.	I	candela (cd)
Luminanza	L	nit = $\mathrm{cd\,m^{-2}}$
Dens. Flusso lum.		$\mathrm{lm\,m^{-2}}$
Illuminanza	E	lux (lx) = $\mathrm{lm\,m^{-2}}$