LEZIONE 12

L'impulso relativistico

Il nostro obbiettivo in questa lezione è di arrivare alla relazione relativistica fra impulso e velocità, che sostituirà la $p = mv$ newtoniana. Per arrivarci, adotteremo due criteri:

1) deve trattarsi di una grandezza che si conserva negli urti
2) per piccole velocità deve ridursi alla forma newtoniana.

Il secondo criterio non è che il *principio di corrispondenza* adattato alla relatività. La storia del principio di corrispondenza nasce con la meccanica quantistica: si richiedeva che la nuova meccanica dovesse riprodurre quella classica al limite in cui la costante di Planck diventava trascurabile (sistemi meccanici con azione $\gg h$).

Ma il principio di corrispondenza è un criterio metodologico generale: una nuova teoria, che si presenta come generalizzazione di una vecchia a casi in cui la vecchia non funziona, deve includere questa come caso limite. Nel nostro caso il parametro che definisce il caso limite è la velocità del corpo: se questa è molto piccola rispetto a c gli effetti relativistici sono trascurabili e la nuova meccanica deve riportarsi a quella newtoniana.

Si può dimostrare (ma la dimostrazione non è banale) che i due criteri determinano p, e si trova

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau}. \tag{12–1}$$

Non sembra consigliabile dimostrare questa formula, ma è giusto far sapere che si tratta di un teorema. (Solo per vostra informazione, ne trovate una dimostrazione alla fine di questa lezione.) Da un punto di vista pratico, possiamo appoggiarci su una quantità ormai sterminata di prove sperimentali (v. dopo) per cui è del tutto lecito presentarla come una formula ampiamente verificata su base sperimentale, oltre che come teorema.

È ovvio che la (12–1) si riduce alla forma newtoniana quando v è piccola, perché allora $d\tau$ si riduce a dt. È altrettanto ovvio che per qualsiasi velocità non nulla $p \neq mv$: è a questo punto che nasce la famigerata "massa relativistica."

A dire il vero, qualunque formula io possa inventare per $p(v)$, e non solo la (12–1), la potrò sempre scrivere $p = mv$. Basterà dare un'opportuna definizione di m, che sarà funzione di v, invece di essere costante come nel caso newtoniano. Non c'è in questo niente di men che lecito: se ho cambiato la definizione dell'impulso, perché non potrei cambiare quella della massa? Ma io non la voglio cambiare, e ne discuteremo in seguito le ragioni.

Però nella (12–1) compare m e occorre quindi sapere che cosa intendo per m. La risposta è semplice: continuo a chiamare massa quella newtoniana. Che cosa si fa per conoscere la massa? Per pesare un corpo occorre la forza di gravità, che non è sempre presente (anzi non c'è per definizione in un RI). L'alternativa è di usare $F = ma$, mantenendo piccola la velocità. Questo è sempre possibile: parto dal corpo in quiete, gli applico una forza nota, e misuro l'accelerazione. So che fino a quando la velocità non cresce troppo la meccanica newtoniana va bene, e me ne servo per definire la massa.

Dunque *quando parlo di massa intendo quella misurata con la meccanica newtoniana, a piccole velocità*. Anche per misurare la massa dell'elettrone si utilizzano esperimenti dove la velocità dell'elettrone è piccola: esistono esperimenti classici (probabilmente ne conoscete la versione didattica) in cui si fa percorrere agli elettroni una traiettoria circolare in campo magnetico e se ne ricava il rapporto e/m dalla misura del raggio. Se la carica è nota per altra via (Millikan) si ottiene la massa. Quanto più voglio essere preciso tanto più la velocità dovrà essere piccola, ma questa non è una difficoltà teorica, anche se porrà qualche problema dal punto di vista sperimentale.

Per mettere in evidenza che la massa è misurata su corpi fermi o quasi, qualcuno dice "massa a riposo" o "massa di quiete"; io preferisco non usare questi termini, perché se parlo di massa a riposo lascio intendere che esista anche qualche altro tipo di massa, e invece *di massa ce n'è una sola.*

È invece importante rilevare che *la massa è invariante*: la sua definizione non dipende dal rif. Infatti, quale che sia il rif. nel quale stiamo operando, per misurare la massa dobbiamo sempre trasferirci a quel particolare rif. in cui la particella è ferma. Ne segue che il risultato sarà sempre lo stesso, indipendentemente dal rif. in cui vorremo calcolare o misurare l'impulso (e l'energia, v. dopo).

Converrà per il seguito riscrivere la (12–1) in altri modi equivalenti. Il primo è banale: se introduco le componenti cartesiane del vettore posizione $\vec{r}$, ossia le coordinate (x, y, z), posso scrivere:

$$p_x = m\,\frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = m\,\frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = m\,\frac{dz}{d\tau}\,.$$

Questa forma è utile per es. quando il moto si svolge su una retta: infatti una sola componente (ad es. la prima) è sufficiente.

Una seconda forma della (12–1) si trova ricordando che $d\tau = dt/\gamma$ (col solito significato di γ). Infatti

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = m\,\vec{v}\,\gamma = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (12\text{–}2)$$

Dalla (12–2) nasce la tentazione di ripristinare $\vec{p} = m'\vec{v}$, con $m' = m\gamma$ (la "massa relativistica," appunto). Non seguirò quest'usanza, anzi vi mostrerò la prossima volta quanto sia sconsigliabile.

L'impulso relativistico e il secondo principio

Notate che per arrivare alla forma relativistica dell'impulso non abbiamo fatto uso del secondo principio, ma solo della conservazione e del principio di corrispondenza. Dovremmo ora verificare che con l'espressione data di $\vec{p}$ vale realmente il secondo principio, nella forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Ma in molti casi qui si nasconde una difficoltà: come misurare $\vec{F}$?

Nei casi in cui ha davvero importanza la relatività (fisica delle particelle) non disponiamo di una misura indipendente di forza: non possiamo attaccare un dinamometro a un elettrone! Diventa quindi necessario interpretare la seconda legge come una *definizione dinamica di forza*: la forza diviene una misura del *tasso di trasferimento di q. di moto* fra due corpi. Quando due corpi interagiscono, si scambiano q. di moto (eventualmente attraverso l'intermediario di un campo). Il PAR newtoniano viene visto, nella fisica einsteiniana, come la manifestazione di un flusso di q. di moto fra due o più corpi (fig. 12–1): la q. di moto si conserva sempre, ma viene trasferita da un corpo all'altro. La misura di questo trasferimento (q. di moto trasferita per unità di tempo) è ciò che siamo abituati a chiamare *forza*.

C'è però un'importante eccezione alla difficoltà di misurare per via indipendente la forza, ed è l'interazione e.m. La ragione è che campi elettrici e magnetici possono essere generati in modo macroscopico e applicati anche a particelle relativistiche (v. l'esempio del moto in campo magnetico, dato sopra). È quindi possibile verificare che $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, con $\vec{F}$ data dalle espressioni classiche dell'elettromagnetismo, descrive correttamente le variazioni di q. di moto per una particella carica in un campo elettrico o magnetico.

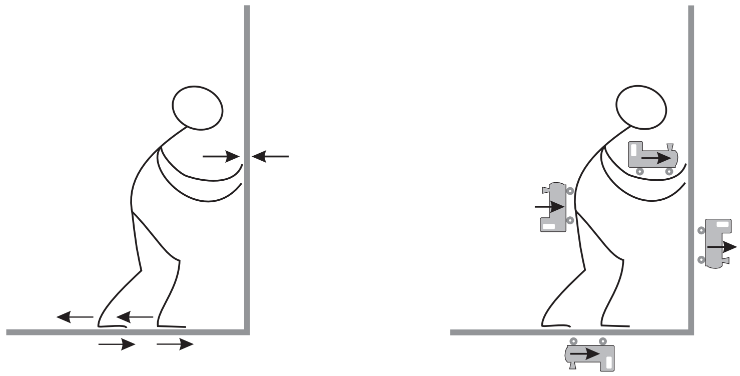

fig. 12–1

Anche qui le verifiche sono note e abbondanti; anzi, hanno costituito la prima indicazione che qualcosa non andava con la meccanica newtoniana applicata agli elettroni (esperimenti di Abraham e altri agli inizi del secolo).

L'energia

Sistemato l'impulso, passiamo ora a definire l'energia. La definizione è questa:

$$E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau}. \tag{12–3}$$

La definizione è per ora arbitraria, e non dovremmo neppure chiamarla "energia" finché non ne avremo studiate le proprietà. Si vede subito una certa analogia con la (12–1): a parte il fattore c^2, qui abbiamo t al posto di $\vec{r}$.

Per procedere, fissiamo un certo istante, e scegliamo le coordinate in modo che a quell'istante la velocità sia diretta lungo l'asse x: sarà quindi $v_y = v_z = 0$, $p_y = p_z = 0$. Scriviamo una accanto all'altra la (12–3) e la prima delle (12–2) moltiplicata per c:

$$E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau} \qquad c\,p_x = m\,c\,\frac{dx}{d\tau}.$$

Quadrando e sottraendo la seconda dalla prima:

$$E^2 - c^2 p_x^2 = m^2 c^4\,\frac{dt^2 - dx^2/c^2}{d\tau^2}. \tag{12–4}$$

Ma conosciamo la relazione

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2/c^2,$$

e con questa, ricordando che $p_y = p_z = 0$, per cui $p_x^2 = p^2$, la (12–4) diventa subito

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4. \tag{12–5}$$

Proprietà dell'energia relativistica

La (12–5) è forse la relazione più importante della dinamica relativistica (certo più importante delle formule che danno p o E in funzione di v). Discutiamola a fondo.

1. Il secondo membro della (12–5) è per definizione un *invariante* (non dipende dal rif.). Infatti la massa è stata definita in modo invariante, come abbiamo già visto. Dunque

anche il primo membro della (12–5) è un invariante, mentre E e p certamente non lo sono. Ciò vuol dire che se studiamo la stessa particella in due diversi rif., in generale troveremo valori diversi (E, p), (E', p') per energia e impulso, ma sarà sempre

$$E^2 - c^2p^2 = {E'}^2 - c^2{p'}^2. \tag{12–6}$$

2. In particolare, nel *rif. di quiete* della particella, quando $p = 0$, la (12–5) ci dà $E = mc^2$: l'energia di una particella *ferma* è proporzionale alla sua massa. Se invece $p \neq 0$, la (12–5) mostra che

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$$

che è funzione crescente di p; se poi $p \ll mc$ lo sviluppo al primo ordine dà

$$E = mc^2 + p^2/2m,$$

che comincia a fornire qualche indizio sul significato di E...

3. La (12–5) può essere usata per misurare la massa di una particella anche quando questa non è ferma: basta conoscere E e p. In pratica è ciò che si fa quando non è facile fermare una particella, per es. perché è instabile.

4. Sempre dalla (12–5) si vede che non c'è niente di strano se la massa è nulla: ciò vuole solo dire che la (12–5) diventa $E = c\,p$. Viceversa, se la misura di E e di p mostra che $E = c\,p$, ne segue che la massa è nulla.

Dalle definizioni (12–1), (12–3) di p e di E:

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{d\vec{r}}{c^2dt} = \frac{\vec{v}}{c^2}. \tag{12–7}$$

Ne segue che se la massa è nulla ($E = c\,p$) necessariamente $v = c$, in ogni rif. Una particella di massa nulla *ha sempre velocità c*, e *non ha rif. di quiete*.

Non è irrilevante che le misure saranno in generale affette da incertezze, per cui non si potrà facilmente dire che la massa è proprio nulla, ma solo che lo è "entro gli errori." In casi estremi la misura può essere molto difficile: l'esempio canonico è quello dei neutrini, per i quali a tutt'oggi il problema della massa nulla o no è da considerarsi aperto.

Osservazione didattica: "massa" nel senso comune viene spesso associata a "sostanza," o a "materia," per cui dire "massa nulla" viene spesso inteso come se significasse "immateriale." Non a caso si dice spesso che i fotoni sono "pura energia"! È bene insistere che qui m è una grandezza fisica, con un preciso significato, ma senza le connotazioni filosofiche (metafisiche?) che sono abituali per il termine "massa."

5. La (12–5) vale istante per istante mentre la particella si muove, anche se p ed E cambiano (es. un elettrone accelerato da un campo elettrico). In questo senso posso dire che la massa è una *costante del moto*; e non bisogna confondere "costante del moto" con "invariante," sebbene la massa abbia entrambe le proprietà.

Fra due tempi diversi avrò

$$E_1^2 - c^2p_1^2 = E_2^2 - c^2p_2^2$$

e da questa:

$$(E_1 - E_2)\,(E_1 + E_2) = c^2(p_1 - p_2)\,(p_1 + p_2) \tag{12–8}$$

$$E\,\Delta E = c^2p\,\Delta p. \tag{12–9}$$

Si passa dalla (12–8) alla (12–9) supponendo piccolo l'intervallo di tempo, in modo che E_1 differisca poco da E_2 e p_1 differisca poco da p_2. Ovvero, si ottiene l'equivalente della (12–9) direttamente, differenziando la (12–5):

$$E\,dE = c^2 p\,dp.$$

Da questa con la (12–7), se per es. il moto è lungo x, si ha

$$dE = v\,dp = vF\,dt = F\,dx$$

(ho usato il secondo principio: $dp = F\,dt$). Ma $F\,dx$ è il lavoro dL, e arriviamo quindi a

$$dE = dL$$

che ricorda il teorema delle forze vive: la grandezza E (ricordate, per ora senza significato fisico!) varia durante il moto nella stessa misura del lavoro fatto dalla forza agente sul corpo.

Sembra dunque ragionevole associare E all'energia cinetica T, ma c'è un piccolo problema. Una definizione relativistica di T, per quanto arbitraria come tutte le definizioni, dovrà conservare, nella misura del possibile, le proprietà già note per T dalla meccanica newtoniana. Una è appunto il teorema delle forze vive; l'altra è che $T = 0$ per $v = 0$. Invece abbiamo visto sopra che quando $v = 0$, E vale $m\,c^2$.

Ma la soluzione è semplice: basta definire $T = E - m\,c^2$, ossia

$$E = m\,c^2 + T.$$

Abbiamo dunque l'interpretazione fisica di E: essa misura l'energia cinetica relativistica, più la costante additiva $m\,c^2$. Siamo abituati, dalla fisica newtoniana, che l'energia è spesso definita a meno di una costante additiva; ma vedremo poi che qui la costante è tutt'altro che arbitraria, anzi ha un profondo significato, ed è questo uno dei cambiamenti che la relatività produce nella dinamica.

6. La (12–3) si può scrivere $E = m\,c^2\gamma$, per cui

$$T = m\,c^2(\gamma - 1). \tag{12–10}$$

La (12–10) può essere sottoposta a verifica sperimentale. Un esempio si vede nel già citato film PSSC sulla velocità limite: si accelerano degli elettroni in un acceleratore lineare, e si misurano due cose (fig. 12–2):

a) la velocità, dal tempo di volo fra due traguardi

b) l'energia cinetica, dal riscaldamento di un bersaglio in cui gli elettroni vengono frenati.

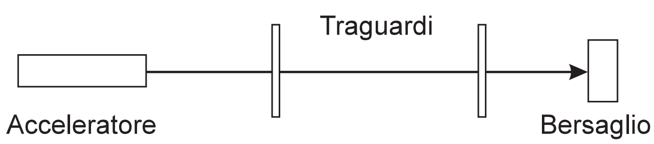

fig. 12–2

È così possibile constatare che l'energia cinetica, misurata per via calorimetrica, coincide con quella ricavata dalla velocità mediante la (12–10), mentre si scosta nettamente dalla formula newtoniana.

Se si studia un urto elastico fra particelle di ugual massa, già sappiamo che non varrà la legge dell'angolo retto. Però dalla misura degli angoli si può ugualmente verificare che energia e impulso si conservano. In modo più complicato, la stessa cosa si fa anche se le masse non sono uguali. Da quando esiste la fisica delle alte energie, si contano ormai a milioni le verifiche sperimentali così ottenute.

Considerazioni didattiche

Vorrei ora commentare le ragioni per la scelta fatta, d'introdurre l'energia per una strada piuttosto formale. Una motivazione che potrei definire "sotterranea" è quella di presentare parallelamente due grandezze che poi (detto *inter nos*) formano il quadrivettore impulso-energia. Con ciò non propongo d'introdurre i quadrivettori: cerco solamente di trasmettere l'idea sottintesa senza enunciarla apertamente. Scrivere sulla stessa riga le definizioni di $\vec{p}$ e di E

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau} \qquad E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau}$$

è un modo per far vedere che c'è una parentela, anche senza dirlo.

Si potrebbe pensare di partire dal risultato delle deduzioni, cioè $dE = dL$ (che è un requisito abbastanza ragionevole) e da $\vec{p} = m\,d\vec{r}/d\tau$, per arrivare all'espressione dell'energia. C'è tuttavia una difficoltà: come giustificare $E_0 = mc^2$? Se parto da $dE = dL$, per arrivare all'energia debbo aggiungere la costante mc^2; altrimenti ho solo l'energia cinetica, che è molto meno espressiva appunto perché non rappresenta la componente temporale del quadrivettore.

D'altra parte è importante che a questo mc^2 si arrivi nella maniera più naturale possibile; che non esca fuori dal cappello del prestigiatore. Si può obiettare che anche la definizione di E da cui siamo partiti esce fuori dal cappello: è vero, però si scopre immediatamente la relazione (12–5), che è interessante e si ricorda facilmente; e poi si va avanti.

In linea generale non trovo scandaloso introdurre una grandezza di cui non si conosce ancora il significato: probabilmente se ci pensassimo un po' scopriremmo che ci sono altri casi in cui si fa la stessa cosa. Oserei anzi dire che sarebbe opportuno che l'insegnamento scientifico prospettasse i diversi approcci, perché anche nel fare scienza le due strade si alternano: talvolta si usa un argomento formale, altre volte si segue la via dell'induzione dall'esperimento. Non mi sembra giusto asserire che la via corretta sia una sola, e insegnare solo quella; si tratta di essere equilibrati, di non esagerare in un verso o nell'altro. Occorre inoltre capire quando un approccio formale è possibile senza perdere di vista il significato di quello che si fa; e questo è certamente un problema didattico.

Un altro punto che vale la pena di discutere è quello dei prerequisiti, che forse per l'energia sono più pesanti che nel resto di questo progetto.

Cominciamo col dire che il problema dei prerequisiti si può anche capovolgere, trasformandolo in problema delle motivazioni. Intendo dire che l'avere in vista un obbiettivo significativo — e forse attraente — come la relatività, può dare sia all'insegnante, sia anche agli studenti, una motivazione maggiore per affrontare e cercare di capire alcune parti iniziali della fisica. Abbiamo già visto questo a proposito della caduta dei gravi. Se facciamo vedere che con la caduta dei gravi non solo si capisce Galileo, ma si dà anche la necessaria premessa per capire Einstein e l'idea fondamentale della RG, allora il suo studio acquista un ruolo un po' più alto che non quello tradizionale di un capitolo di meccanica, utile soprattutto per dare problemi accessibili...

In un progetto che abbia un carattere integrato, nel quale si sappia fin da principio dove si vuole arrivare, alcune cose si possono anche anticipare: non è necessario trattare certi argomenti solo alla fine del corso, perché servono per la relatività. Una discussione del PR si farà all'inizio della meccanica; ma la si farà in tutt'altro modo se dovrà essere richiamata in queste occasioni, che non se resta un argomento staccato, che nel seguito del corso entra abbastanza poco. In fondo una ragione non secondaria per introdurre la relatività in un corso di fisica è che arricchisce di motivazioni la parte introduttiva della meccanica.

Dimostrazione della (12–2)

A titolo di esercizio ritengo utile presentare la dimostrazione cui ho accennato sopra, sebbene la si trovi in tutti i libri. Questo perché di solito la si fa appoggiandosi sulle trasf. di Lorentz; è perciò opportuno far vedere, anche su questo esempio, che delle trasf. di Lorentz si può fare completamente senza.

Vogliamo dimostrare che la (12–2) è l'unica espressione compatibile con le condizioni:

a) la conservazione dell'impulso vale in qualsiasi RI;

b) l'espressione dell'impulso si riduce a quella newtoniana a piccole velocità.

Stranamente, la dimostrazione è assai più semplice se si considerano moti in almeno due dimensioni, e perciò così faremo.

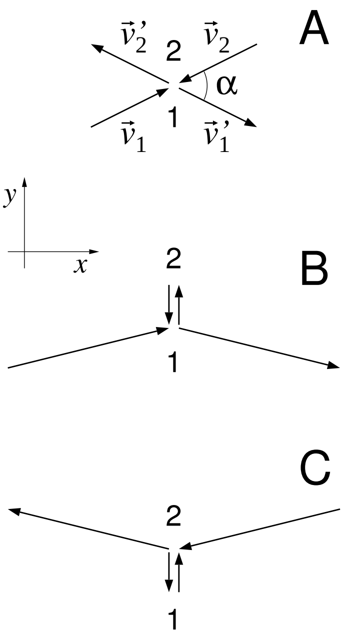

fig. 12–3

Prenderemo in esame un urto elastico tra due particelle di uguale massa, che indicherò con 1 e 2, e lo studieremo da tre rif. (fig. 12–3). Il primo, che chiamerò A, è quello del centro di massa, dove l'impulso totale è nullo, per cui le due particelle hanno velocità e impulsi opposti, sia prima sia dopo l'urto. Il carattere elastico dell'urto ci assicura inoltre che le velocità (e perciò gli impulsi) non cambiano modulo nell'urto, ma soltanto direzione. Supporremo inoltre che l'urto sia *radente*, cioè che anche il cambiamento di direzione (l'angolo α in figura) sia molto piccolo: vedremo poi lo scopo di questa ipotesi, e potremo anche precisarla meglio. Osservate che scelti gli assi cartesiani come in figura, le componenti x delle velocità non cambiano nell'urto, mentre quelle y s'invertono.

Il rif. B è quello in cui la particella 2 ha nulla la componente x della velocità: in altre parole B accompagna la particella 2 secondo l'asse x. Invece C è il rif. in cui si annulla la componente x della velocità di 1: è chiaro che B e C sono in situazione simmetrica rispetto alle due particelle, e questa simmetria sarà usata in modo essenziale nel seguito. L'ipotesi di urto radente comporta che nel rif. B la velocità di 2 sia molto piccola: la supporremo non relativistica, in modo da poter usare l'espressione newtoniana dell'impulso.

E ora precisiamo le notazioni: gli indici $_1$ e $_2$ in basso rappresentano le due particelle; le grandezze dopo l'urto saranno designate da apici, quelle prima dell'urto senza apice. Abbiamo dunque nel rif. B, se v_2 indica il modulo della velocità della particella 2:

$$p_{2y} = -mv_2, \quad p'_{2y} = mv_2,$$
$$p'_{2y} - p_{2y} = 2mv_2,$$
$$(p'_{2x} = p_{2x} = 0).$$

La conservazione dell'impulso impone perciò

$$p'_{1y} - p_{1y} = -2mv_2,$$
$$p'_{1x} = p_{1x};$$

ne segue

$$p_{1y} = mv_2, \quad p'_{1y} = -mv_2.$$

Seguiamo il moto della particella 1 per un intervallo di tempo Δt_1 dopo l'urto: se Δs_1 è il suo spostamento, avremo

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1} = \frac{p_{1y}}{p_1} = \frac{mv_2}{p_1}$$

da cui:

$$p_1 = mv_2 \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1} = m \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2} \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1}\,, \tag{12–11}$$

dove Δy_2 è lo spostamento di 2 (secondo l'asse y) in un intervallo qualsiasi Δt_2. Se scegliamo Δt_2 in modo che sia $\Delta y_2 = \Delta y_1$, l'espressione (12–11) si semplifica:

$$p_1 = m \frac{\Delta s_1}{\Delta t_2} = mv_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\,. \tag{12–12}$$

Ai due tempi Δt_1, Δt_2 corrisponderanno per le due particelle i tempi propri dati da:

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_1^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \tag{12–13}$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta t_2^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_2^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \simeq \Delta t_2^{\mathrm{B}} \tag{12–14}$$

dove l'indice $^{\mathrm{B}}$ in alto ricorda il riferimento, e ho fatto uso del fatto che $v_2^{\mathrm{B}} \ll c$ per ipotesi.

Nel riferimento C i ruoli di 1 e 2 si scambiano; avremo perciò $\Delta t_1^{\mathrm{C}} = \Delta t_2^{\mathrm{B}}$ mentre per la simmetrica della (12–14):

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{C}}.$$

Dunque è anche $\Delta\tau_1 = \Delta t_2^{\mathrm{B}}$. Confrontando con la (12–14)

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$$

e da (12–13), (12–14) si ottiene infine

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

(l'indice $^{\mathrm{B}}$ è ormai sottinteso). Sostituendo nella (12–12) si arriva al risultato finale:

$$p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}\,.$$

Abbiamo visto che la (12–2) è la sola forma possibile per l'impulso; occorrerebbe ancora dimostrare che in realtà l'impulso così definito si conserva in generale, e non solo nei casi particolari considerati; ma ciò va al di là dei nostri scopi attuali. Mi limito a ricordare che la dimostrazione diventa immediata appena s'introduce l'energia, e si scoprono le proprietà di trasf. d'impulso ed energia per cambiamenti di rif.

Problemi

1. Un fascio collimato di elettroni, emessi da un preparato radioattivo β, attraversa una regione in cui sono presenti un campo E e un campo B, uniformi, tra loro paralleli, e ortogonali alla velocità iniziale degli elettroni. Il fascio raggiunge poi uno schermo fluorescente.

Studiare il luogo delle tracce sullo schermo al variare di v

a) assumendo la meccanica newtoniana

b) usando la forma relativistica di $p(v)$.

2. Sembra che i neutrini abbiano masse dell'ordine di 0.01 eV. Se abbiamo neutrini di energia ~1 MeV, con che precisione occorre misurare E e p per conoscere m entro il 10%?

3. Un acceleratore lineare lungo 5 metri fornisce un fascio di elettroni di energia cinetica 2 MeV. La corrente è 1 μA. Gli elettroni colpiscono un blocchetto di rame di massa 100 grammi, per 10 secondi.

Calcolare:

a) la variazione di temperatura del blocchetto
b) la velocità degli elettroni
c) la distanza media, all'uscita dell'acceleratore
d) il campo elettrico medio nell'acceleratore (perché medio?)
e) il tempo di permanenza di un elettrone nell'acceleratore.

4. In un urto elastico fra due particelle uguali, di cui una ferma, si osserva che gli angoli dopo l'urto sono uguali (fig. 12–4). Calcolare la relazione fra p iniziale e ϑ (la massa è nota).

5. Riesaminare il paradosso del condensatore (lez. 4) e spiegare con le leggi della dinamica relativistica perché la velocità orizzontale dell'elettrone non è costante nel rif. K.

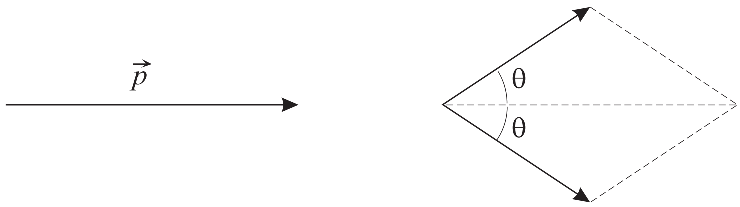

fig. 12–4

6. In un certo RI, che diremo K, un fotone ha energia ε. Si chiede che energia avrà il fotone in un secondo RI, diciamo K′, che si muove rispetto a K nella stessa direzione e verso del fotone, con velocità v.

Risposte

Problema 1. (Fascio di elettroni):

È importante tener presente in primo luogo che gli elettroni emessi nei decadimenti β hanno uno spettro continuo di energie, che va da 0 a un massimo. Lo stesso accade quindi per le velocità.

Prendiamo l'asse z nella direzione e verso della velocità iniziale degli elettroni, l'asse x secondo i campi, l'asse y di conseguenza. Sia a la lunghezza della regione dove sono presenti i campi, in direzione z; l la distanza tra la fine dei campi e lo schermo.

L'equazione del moto in forma vettoriale si scrive:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

(in questa forma è valida sia in meccanica newtoniana, sia in meccanica relativistica). In componenti:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \quad eE \\ \frac{dp_y}{dt} &= \quad eBv_z \\ \frac{dp_z}{dt} &= -eBv_x. \end{aligned} \tag{12–15}$$

Una soluzione esatta è complicata; limitiamoci quindi al caso in cui la deflessione è piccola, il che vuol dire che nella terza delle (12–15) si può trascurare il secondo membro e supporre quindi p_z costante (e così anche v_z).

Attenzione: costante per il singolo elettrone, ma diversa dall'uno all'altro.

Allora le prime due ci danno

$$\begin{aligned} p_x &= eE\Delta t = \frac{eEa}{v_z} \\ p_y &= eBv_z\Delta t = eBa \end{aligned} \tag{12–16}$$

se $\Delta t = a/v_z$ è il tempo che l'elettrone trascorre nel campo.

Dopo attraversato il campo, la traiettoria degli elettroni è rettilinea e obliqua rispetto all'asse z. Se $a \ll l$, possiamo trascurare la deviazione del fascio dentro il campo; allora gli spostamenti nelle due direzioni x, y valgono:

$$x = l\,\frac{v_x}{v_z} \qquad y = l\,\frac{v_y}{v_z}. \tag{12–17}$$

A questo punto bisogna cominciare a distinguere. Nel caso newtoniano $\vec{p} = m\vec{v}$, quindi

$$x = l\,\frac{eEa}{mv_z^2} \qquad y = l\,\frac{eBa}{mv_z}.$$

Eliminando v_z si trova

$$x = \frac{m}{e\,a\,l}\,\frac{E}{B^2}\,y^2 \tag{12–18}$$

ossia una parabola.

Per trattare il caso relativistico dovremo usare per p_x, p_y le espressioni

$$p_x = m\gamma v_x \qquad p_y = m\gamma v_y$$

dove a rigore γ va espresso usando il modulo della velocità. Però nell'approssimazione che abbiamo fatto (piccola deflessione) sarà anche $v_x, v_y \ll v_z$ e quindi potremo assumere

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}}.$$

Le (12–16) si scrivono

$$m\gamma v_x = \frac{eEa}{v_z} \qquad m\gamma v_y = eBa$$

e usando le (12–17) per eliminare v_x, v_y:

$$\gamma v_z^2 = \frac{eEa\,l}{mx} \qquad \gamma v_z = \frac{eBa\,l}{my}.$$

Eliminando v_z si arriva infine a

$$x^2 = \left(\frac{E}{cB}\right)^2 y^2 + \left(\frac{mE}{e\,a\,lB^2}\right)^2 y^4 \tag{12–19}$$

(a essere precisi, bisognerebbe scrivere $x =$ la radice quadrata positiva del secondo membro). Si vede che la (12–19) si riduce alla (12–18) se $y \gg (eBa\,l)/(mc)$, ossia se gli elettroni sono abbastanza lenti.

La differenza geometrica tra la (12–18) e la (12–19) è che mentre la prima è una curva tangente nell'origine all'asse y, le tangenti alla seconda sono invece le rette $x = \pm ey/cB$. Gli esperimenti di Abraham e altri misero appunto in luce questa differenza.

Problema 2. (Neutrini):

Basta partire dalla solita $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$ e differenziare:

$$E\,dE - c^2p\,dp = mc^4dm.$$

Data l'energia dei neutrini, praticamente $E = cp$, quindi

$$mc^4dm = E\,(dE - c\,dp)$$

da cui, dividendo per m^2c^4:

$$\frac{dm}{m} = \frac{E}{m^2c^4}\,(dE - c\,dp) = \frac{E^2}{m^2c^4}\left(\frac{dE}{E} - \frac{dp}{p}\right).$$

Coi dati del problema $E^2/(m^2c^4) = 10^{16}$, e si vede che per avere $\delta m/m = 0.1$ sarebbero necessari $\delta E/E$ e $\delta p/p$ dell'ordine di 10^{-17}.

Problema 3. (Acceleratore lineare):

In un acceleratore lineare le particelle non vengono accelerate da un campo elettrico uniforme: in realtà il campo è presente solo in piccole sezioni del tubo. Essendo data l'energia cinetica finale degli elettroni, conosciamo il lavoro $L = 2\,\mathrm{MeV}$ fatto dal campo, che sarà

$$L = e\int_0^l E(x)\,dx = el\bar{E} \qquad (12\text{–}20)$$

dove $l = 5\,\mathrm{m}$ è la lunghezza del tubo, $\bar{E}$ la media del campo lungo il tubo.

a) Abbiamo $I = ne$, con $I = 1\,\mu\mathrm{A}$, n numero di elettroni per unità di tempo. Dato che ogni elettrone cede al blocchetto l'energia L, la potenza ceduta è

$$W = nL = IL/e = 2\,\mathrm{watt}.$$

Nel tempo $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ viene ceduta un'energia $Q = W\Delta t = 20\,\mathrm{joule}$.

Il calore specifico del rame è $C = 3.8 \cdot 10^2\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ e quindi la variazione di temperatura è

$$\Delta T = \frac{Q}{mC} = 0.53\,\mathrm{K}.$$

b) Il calcolo della velocità è immediato, partendo da $L = mc^2(\gamma - 1)$ e risolvendo rispetto a v. Conviene ricordare che per un elettrone $mc^2 = 0.51\,\mathrm{MeV}$. Risultato:

$$v = 0.979\,c = 2.94 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

c) Sul perché "medio" si è già detto. Dalla (12–20) si ottiene subito

$$\bar{E} = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m}.$$

d) Se potessimo assumere uniforme il campo, la soluzione sarebbe semplice: accanto alla (12–20) varrebbe anche

$$p = e\bar{E}t$$

e usando la relazione $v = c^2p/(mc^2 + L)$ avremmo

$$t = \frac{vl}{c^2}\left(1 + \frac{mc^2}{L}\right) = 20\,\mathrm{ns}.$$

Se invece supponiamo che il campo sia presente solo all'inizio del tubo, questo verrà percorso quasi tutto con la velocità finale, e il tempo sarà 17 ns. Nel caso reale avremo chiaramente un valore intermedio tra i due.

Problema 4. (Urto elastico):

Indichiamo con E l'energia della particella urtante, con E', p' energia e impulso (modulo) di ciascuna delle due particelle dopo l'urto. La conservazione dell'energia e dell'impulso dicono

$$E + mc^2 = 2E' \qquad p = 2\,p'\cos\vartheta.$$

Possiamo eliminare E', p' per mezzo della (12–5) se dividiamo la seconda per $\cos\vartheta$, quadriamo e sottraiamo:

$$\left(E + mc^2\right)^2 - \frac{p^2}{\cos^2\vartheta} = 4\,m^2c^4.$$

Eliminiamo E ancora con la (12–5), e arriviamo a

$$\cos^2\vartheta = \frac{p^2}{p^2 - 2\,m^2c^2 + 2\,mc\,\sqrt{p^2 + m^2c^4}}.$$

Si verifica che $\vartheta \to \pi/4$ quando $p \to 0$ (legge dell'angolo retto) mentre $\vartheta \to 0$ se $p \to \infty$.

Problema 5. (Paradosso del condensatore):

Abbiamo un elettrone che parte con velocità iniziale orizzontale in un campo elettrico uniforme, di direzione verticale (fig. 4–4). Prendiamo l'asse x orizzontale, nel verso di $\vec{v}_0$, e l'asse y verticale, nel verso del campo elettrico $\vec{E}$.

Allora p_x è costante, mentre per p_y si ha

$$\frac{dp_y}{dt} = -eE \qquad \text{da cui} \qquad p_y = -eE\,t.$$

Per l'energia $\mathcal{E}$ dell'elettrone vale

$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p^2 = m^2c^4 + c^2p_x^2 + e^2E^2t^2.$$

La componente x della velocità si può ricavare da

$$v_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2p_x}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + e^2E^2t^2}}$$

da cui si vede la diminuzione nel tempo.

Spiegazione verbale: la componente p_x di $\vec{p}$ si conserva, ma essendo $p_x = m\gamma\,v_x$, v_x decresce perché γ aumenta. Infatti γ dipende dal *modulo* della velocità, e questo cresce a causa dell'aumento di v_y.

O meglio: γ aumenta perché aumenta l'energia cinetica, a spese dell'energia potenziale.

Problema 6. (Fotone in due RI):

Osserviamo anzitutto che chiedere come cambia l'energia del fotone equivale a chiedere come cambia la frequenza: stiamo quindi cercando la formula dell'*effetto Doppler relativistico*. Di solito a questa formula si arriva con le trasformazioni di Lorentz: lo scopo di questo problema è di mostrare come si può arrivare al risultato senza conoscerle.

Occorre però un artificio (lecito, ma non naturale): aggiungere al fotone una particella di massa non nulla, che si muove con velocità v nel rif. K ed è quindi ferma in K$'$. Fotone e particella non interagiscono, ma le pensiamo come un unico sistema.

Dobbiamo poi tener presente che la (12–6), che esprime l'invarianza di $E^2 - c^2p^2$, non vale solo per una particella, ma per qualsiasi sistema fisico; per es. nel nostro caso per il sistema composto del fotone e della particella ausiliaria che abbiamo aggiunto.

Indichiamo dunque con ε, ε' le energie del fotone nei due rif.; sappiamo che i rispettivi impulsi sono ε/c, ε'/c. Siano poi E, p energia e q. di moto della particella in K; in K$'$ l'energia della particella si ridurrà a mc^2, e la sua q. di moto sarà nulla. Quindi dalla (12–6):

$$(\varepsilon + E)^2 - (\varepsilon + cp)^2 = \left(\varepsilon' + mc^2\right)^2 - \varepsilon'^2.$$

Semplificando e facendo uso della (12–5) si arriva a

$$\varepsilon' = \varepsilon\,\frac{E - cp}{mc^2}.$$

Ma $E = mc^2\gamma$, $p = mv\gamma$, e quindi

$$\varepsilon' = \varepsilon\gamma\Bigl(1 - \frac{v}{c}\Bigr) = \varepsilon\,\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \tag{12–21}$$