LEZIONE 11

Premessa

Questa seconda parte tratterà due argomenti distinti. Il primo è la dinamica relativistica; nel secondo si parla di Universo, galassie, modelli cosmologici ... in una parola, cosmologia.

Nelle lezioni di due anni fa avevamo fatto un'introduzione a quella parte della relatività che si chiama (secondo una tradizione da cui preferisco discostarmi) "relatività generale"; come dissi allora, io preferisco non fare distinzione fra RR e RG. In particolare non approvo che si consideri la RR come cosa di cui si può parlare con una certa facilità, mentre la RG sarebbe cosa inaccessibile, complessa. Cerco di dimostrare che questo non è vero, che tutta la relatività è accessibile anche nella s.s.s.

Abbiamo parlato del PE, di come viene reinterpretato nella fisica einsteiniana; abbiamo visto cosa significa curvatura dello spazio-tempo. Dopo tutto questo la cosmologia ci sta bene, anzi è un'applicazione necessaria.

Il corso ha un doppio ruolo: serve a dare un approfondimento delle vostre conoscenze su un importante settore della fisica; ma ha anche una funzione didattica. L'approfondimento della cultura fisica sta bene, ma ci si deve anche domandare come utilizzare e presentare questi argomenti. D'altra parte, trattare questioni che non sono da affrontare in classe serve per capire cosa c'è dietro.

Mi capiterà di fare riferimento a un libretto che ho scritto anni fa, o di riprenderne per intero qualche pagina (titolo: *Per un insegnamento moderno della relatività*). È un libro per insegnanti, non per studenti, per più ragioni: non ci sono esercizi né esempi, i pochi problemi sono piuttosto difficili; per renderlo alla portata degli studenti occorrerebbe un lavoro addizionale. In realtà la linea del discorso è alla portata degli studenti, ma ci sono anche molte discussioni a carattere metodologico e didattico, che agli studenti non servono e non interessano. Con ciò non sto dicendo che sia sconsigliato farlo leggere; lo si potrebbe fare magari indicando quali pagine saltare. Va anche detto che il libro risente di essere la rielaborazione di lezioni ormai vecchie di 10 anni: in questo tempo ho sviluppato meglio alcune idee, e forse anche l'equilibrio dei diversi argomenti è un po' cambiato.

I principi della dinamica relativistica

Cominciamo indicando le preconoscenze che gli studenti devono avere:

- l'invarianza della velocità della luce nei RI
- il suo carattere di velocità limite
- alcune questioni relative al tempo proprio e alla geometria dello spazio-tempo
- che la legge di "composizione" galileiana delle velocità non può essere mantenuta, proprio per l'invarianza della velocità della luce.

Ovviamente gli studenti conosceranno i principi della meccanica newtoniana. Ci si pone ora il problema se questi principi vanno d'accordo con le conoscenze di relatività che abbiamo, oppure se bisogna cambiare qualche cosa.

Prima affermazione: *i principi restano gli stessi*, pur di enunciarli adeguatamente. Allora cosa cambia? In primo luogo saranno da cambiare le relazioni newtoniane tra p, E, v. Ma ciò che caratterizza la meccanica relativistica non è il cambiamento delle formule! Troppo banale! Assumo che nel lavoro già fatto sulla fisica sia già successo di scrivere formule un po' più generali per comprendere fatti nuovi. Quindi non sarebbe niente di rivoluzionario, come invece la relatività è, rispetto alla meccanica newtoniana, e non solo per le ragioni che abbiamo già visto.

Il cuore della dinamica relativistica sta nella nuova interpretazione di massa ed energia. Su questo dobbiamo ragionare e pensare; anche perché si tratta di un argomento su cui si dicono molte cose, a volte semplicemente sbagliate, altre volte che non aiutano a capire, ma portano fuori strada. Perciò la discussione su massa ed energia sarà il tema centrale della parte sulla dinamica relativistica. Oggi però ci occuperemo dei principi, e fin qui non ci sono particolari difficoltà.

Il primo principio non si modifica in alcun modo: abbiamo discusso di questo parlando di rif. inerziali (RI). Tutto ciò che sappiamo dalla meccanica newtoniana rimane vero, salvo per la novità importante che nel quadro della RG il concetto di RI cambia, e ha significato soltanto locale: non ci si può aspettare che esista un RI esteso nello spazio e nel tempo. Il cambiamento nella definizione di RI consiste nel considerare tale un rif. in caduta libera in un campo gravitazionale; abbiamo ampiamente discusso che ciò implica l'abolizione della forza di gravità. Newton direbbe (questa è un'inesattezza storica: dovrei dire "la meccanica newtoniana dell'800 direbbe") che la gravità scompare perché bilanciata da una forza apparente; Einstein dice invece che quella è la sostanza del RI. Per es. la stanza in cui siamo non è un RI, perché c'è la forza di gravità; è un rif. spinto verso l'alto per contrastare la caduta libera.

Occorre anche ricordare che un RI ha significato solo locale, cioè limitato a regioni dello spazio-tempo piccole. Se l'intervallo di tempo delle misure non è piccolo, o se si opera su una regione spaziale estesa, ci si accorge della presenza della Terra, attraverso la forza di marea.

Passiamo al secondo principio. Questo si salva benissimo, a condizione che al posto di $\vec{F} = m\vec{a}$ si scriva $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. La correzione non è irrilevante, dal momento che in meccanica relativistica non vale $\vec{p} = m\vec{v}$; quindi $d\vec{p}/dt$ non è uguale a $m\vec{a}$. Va detto che in un certo senso questo è un ritorno a Newton: infatti il suo enunciato del secondo principio è: "*mutatio motus = vis impressa*" dove "motus" è la nostra quantità di moto.

Non è la prima volta che faccio notare come in Einstein non tutto sia nuovo: in più punti si ha invece un ritorno al passato (Galileo, Newton). Bisogna poi osservare che se anche ora sappiamo che le leggi "corrette" sono un po' diverse da quelle comunemente in uso, noi non buttiamo via la vecchia dinamica per usare la relatività nella pratica quotidiana! La meccanica classica newtoniana va bene per un numero considerevole di fatti e situazioni della pratica, della tecnica, e anche della fisica di laboratorio; già questa è un'ottima ragione per continuare a studiarla. La seconda ragione è che le due teorie non sono indipendenti: la relatività utilizza concetti e grandezze che sono state definite nella meccanica newtoniana, delle quali abbiamo studiato le proprietà e ci siamo formati un'idea. Perciò anche da un punto di vista epistemologico la relatività si appoggia sulla meccanica newtoniana.

Il terzo principio

Il terzo principio ci richiederà un po' più di lavoro. Vedremo che non lo possiamo conservare nella forma di "principio di azione e reazione," ma solo come "conservazione della quantità di moto."

Un piccolo commento didattico. Molti studenti fanno confusione sul terzo principio: spesso lo confondono con una condizione di equilibrio. Non è sempre chiara la differenza fondamentale fra i due casi: una condizione di equilibrio si verifica se la risultante di due forze applicate *sullo stesso corpo* è nulla; invece il terzo principio asserisce l'uguaglianza (a parte il verso) di forze applicate *su corpi diversi.* E per di più il terzo principio vale sempre, anche quando l'equilibrio non c'è (pensate ad es. a Terra e Luna).

Ancora una nota: io userò "q. di moto" e "impulso" come sinonimi. Sapete bene che c'è anche una tradizione che li tiene distinti, riservando il termine "q. di moto" per $m\vec{v}$, e il termine "impulso" per $\vec{F}t$. Sarebbe interessante seguire l'evoluzione nel tempo di questa terminologia, e confrontare i diversi usi in diverse lingue... Ma non abbiamo il tempo.

Per un sistema isolato il principio di azione e reazione (PAR) implica la conservazione della q. di moto, ma *il viceversa non è vero.* I motivi sono essenzialmente due:

1) perché il PAR non dice solo che le forze sono opposte come vettori, ma anche che sono sulla stessa retta
2) perché se il sistema consiste di più di due punti materiali, il PAR vale per tutte le coppie azione-reazione, e questo non si può ricavare dalla sola conservazione della q. di moto totale.

L'osservazione 1) fa sì che dal PAR segua anche la conservazione del momento della q. di moto. Se invece le forze sono opposte ma non allineate, la loro risultante è nulla, la q. di moto si conserva, ma il sistema si mette a ruotare. Dovremmo quindi aggiungere anche la conservazione del momento angolare, ma questa è una complicazione che è bene evitare. Qui abbiamo un problema didattico di tutt'altra natura, che esce dalla relatività: è il caso di trattare nella s.s.s. argomenti relativi a moti rotatori e momento angolare? Al massimo i casi più semplici: altrimenti si cade subito in complicazioni matematiche...

Però debbo ancora spiegare perché il PAR non vale in relatività. Supponiamo che il PAR sia vero istante per istante in un certo RI che chiamo K. Si abbiano due particelle che si muovono su date traiettorie, e tra loro vi sia un'interazione (fig. 11–1). In generale le forze dipendono dal tempo, se non altro perché dipendono dalla distanza, che cambia nel tempo. Gli eventi $\mathrm{A}_1 = (P_1, t_1)$ e $\mathrm{B}_1 = (Q_1, t_1)$ sono simultanei in K, gli eventi $\mathrm{A}_2 = (P_2, t_2)$ e $\mathrm{B}_2 = (Q_2, t_2)$ sono anch'essi simultanei in K, e le forze d'interazione sono sempre tra loro opposte, ma diverse in A_1 e A_2 per intensità e direzione.

Se osservo lo stesso fenomeno da un altro RI, diciamo K′, grazie al PR mi aspetterei anche in K′ di vedere soddisfatto il PAR. Ma gli eventi A_1 e B_1, simultanei in K, non lo sono in K′ perché *la simultaneità dipende dal rif.* In K′ quando la particella A si trova in P_1 la particella B non si troverà in Q_1, ma in un altro punto. Perciò in K′ le forze d'interazione saranno diverse.

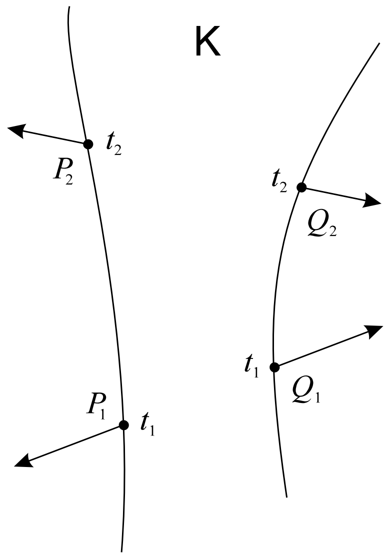

fig. 11–1

La simultaneità è relativa

Ho asserito poco sopra un fatto ben noto della RR, di cui finora non avevamo parlato. Vale la pena di una breve digressione per spiegarlo e dimostrarlo, anche perché posso approfittarne per mostrare ancora una volta come tutti i fatti fondamentali della RR possono essere spiegati senza ricorrere alle trasf. di Lorentz (com'è invece tradizionale fare, anche in questo caso).

Consideriamo dunque la seguente situazione: un treno percorre a velocità costante un binario rettilineo. A metà del treno si trova una sorgente luminosa, che invia un impulso in entrambe le direzioni: verso la testa $\mathcal{A}$ e verso la coda $\mathcal{B}$ del treno. Mettiamoci in un primo tempo nel RI che accompagna il treno, che indico con T: è ovvio che in questo rif. i due segnali arrivano simultaneamente alla testa e alla coda, dato che gli spazi da percorrere sono uguali e la velocità della luce è la stessa nei due versi.

La cosa può essere rappresentata in un diagramma orario (fig. 11–2) dove le due verticali sono le linee orarie di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$, e le rette a 45° sono quelle dei segnali luminosi.

Gli eventi rilevanti sono:
- P: partenza dei segnali
- $Q_{\mathcal{A}}$: arrivo del segnale in $\mathcal{A}$
- $Q_{\mathcal{B}}$: arrivo del segnale in $\mathcal{B}$.

La figura mostra chiaramente che $Q_{\mathcal{A}}$ e $Q_{\mathcal{B}}$ *sono simultanei*, dato che P è equidistante dalle due rette verticali.

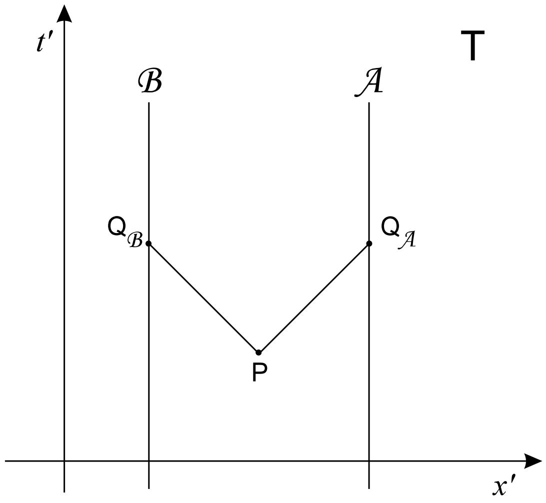

fig. 11–2

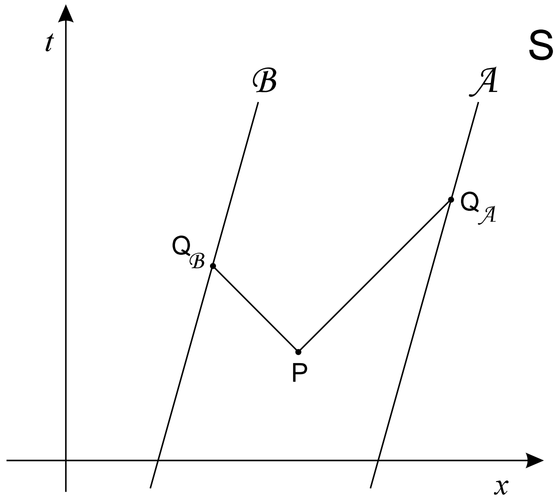

fig. 11–3

Passiamo ora al rif. S della stazione: la fig. 11–3 rappresenta ciò che si vede in questo rif. Il treno viaggia verso destra con velocità costante, quindi le linee orarie della testa e della coda sono ora rette inclinate, tra loro parallele. L'evento P ha ancora luogo a metà strada fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, come si vede in figura; i segnali luminosi hanno linee orarie a 45° come prima, perché *la luce viaggia a velocità c anche in* S. Ne segue che in questo rif. gli eventi $Q_{\mathcal{A}}$ e $Q_{\mathcal{B}}$ *non sono più simultanei.*

Come salvare la conservazione della quantità di moto

Riprendendo il discorso: abbiamo visto che se il PAR vale in K non vale in K′, e questo crea una difficoltà. In base al PR, vorrei che se il terzo principio vale in un rif. allora valga anche nell'altro; ma questo "fa a pugni" col fatto che la simultaneità è relativa. Non riesco a salvare entrambe le cose: il PR e la validità del terzo principio.

Prendiamo atto, ma cosa c'è sotto? C'è la pretesa che ogni coppia azione-reazione sia istantanea. Nella fisica newtoniana è insita l'idea che le azioni a distanza sono istantanee: se il corpo B si muove, il corpo A sente istantaneamente l'effetto di questo spostamento, e anche il corpo B sente istantaneamente che il corpo A è in un'altra posizione. Quindi il PAR, nella sua formulazione classica, è intimamente sposato con l'istantaneità delle azioni a distanza.

Noi invece sappiamo che esiste una velocità limite, quindi ci aspettiamo che azioni istantanee non ce ne siano: è per questo che il PAR non è compatibile con la relatività. In ambito relativistico si deve assumere che *ogni azione è mediata da un campo*, il quale si propaga con velocità finita. Ma allora? La via d'uscita è che si può conservare la q. di moto, anche se non vale il PAR.

Come si dimostra di solito la conservazione della q. di moto? Si parte dal PAR e dal secondo principio:

$$\frac{d\vec{p}_{\rm A}}{dt} = \vec{F}_{\rm A}, \quad \frac{d\vec{p}_{\rm B}}{dt} = \vec{F}_{\rm B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\rm A} + \vec{p}_{\rm B}) = \vec{F}_{\rm A} + \vec{F}_{\rm B} = 0.$$

Ma se il PAR non vale, $\vec{F}_A + \vec{F}_B \neq 0$ e la q. di moto non si conserva! Soluzione: nel bilancio della q. di moto occorre considerare anche quella del campo che media l'interazione. Se la q. di moto del sistema A + B non si conserva, è perché varia in corrispondenza la q. di moto del campo, e la variazione dell'una compensa la variazione dell'altra.

La cosa non è banale, perché occorre definire una q. di moto del campo in modo tale che la conservazione valga in ogni caso. Però questo è possibile, e non è il caso ora d'insistere. (C'è appena bisogno di dire che queste cose le dico per voi, ma sconsiglio di portarle in classe: c'è rischio che il ragazzo medio ne ricavi un guazzabuglio da cui non riuscirà a districarsi.)

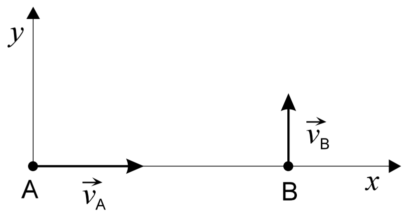

fig. 11–4

Un esempio ci aiuterà a capire meglio la situazione, ed è un esempio "non relativistico." In fig. 11–4 sono rappresentate due particelle cariche positive, che si muovono con le velocità indicate. Dato che sono cariche e si muovono, le particelle producono campi elettrici e campi magnetici. La particella A produce sicuramente nel punto B un campo elettrico, diretto lungo l'asse x; la particella B produce un campo elettrico in A, ancora diretto lungo l'asse x, nel verso negativo. Inoltre la particella A crea un campo magnetico a simmetria circolare, il cui asse coincide con l'asse x: il campo è nullo in B. La particella B invece crea un campo magnetico in A, diretto come l'asse z; quindi una forza (di Lorentz) diretta come $-y$ sulla particella A. Dunque le due forze, su A e su B, non sono opposte, visto che almeno le componenti y sono diverse: $\vec{F}_A + \vec{F}_B \neq 0$.

Come avete visto, non c'è stato bisogno di scomodare la relatività: nel caso di due particelle cariche in moto il PAR non vale e quindi la q. di moto delle particelle non si conserva. Per salvare la conservazione occorre tener conto della q. di moto (variabile) del campo e.m. Lascio a voi di pensare perché ho messo le virgolette a "non relativistico". Ci sono domande?

D: Lei ha detto che per la formulazione del secondo principio $\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ sono la stessa cosa. Ma anche in meccanica classica in questo modo ci sfuggono ad es. tutti i problemi che coinvolgono una massa variabile, come il classico problema del razzo.

F: Non è vero: in realtà un corpo a massa variabile è un sistema e non può essere trattato come un punto materiale. Occorre usare le equazioni cardinali della dinamica, ossia appunto $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

La legge dell'angolo retto ...

Una volta chiarito come trattare le leggi di Newton in meccanica relativistica, rimane prima di tutto da vedere che effettivamente non possiamo mantenere $\vec{p} = m\vec{v}$, e poi capire come modificarla. Un modo assai istruttivo per arrivarci è ragionare sulla "legge dell'angolo retto." Il problema è semplice: l'urto elastico di due palline di massa uguale. La difficoltà nel discorso che sto per fare è che bisogna stare ben attenti alla logica: come vedrete, in partenza non scelgo esplicitamente se stare nell'ambito della meccanica classica o di quella relativistica.

Le fig. 11–5 e fig. 11–6 illustrano la situazione dell'urto. Cominciamo dalla fig. 11–5, che è tracciata nel rif. C del centro di massa. I vettori rappresentano le q. di moto; per il momento assumo di non conoscere la legge che lega q. di moto e velocità. Le sole ipotesi che faccio sono:

– $\vec{p}$ è un vettore parallelo (e concorde) a $\vec{v}$
– il suo modulo, per una particella di data massa, è funzione (crescente) solo del modulo della velocità, e si annulla per $v = 0$
– nell'urto la q. di moto totale si conserva

– l'energia cinetica T, sempre per una particella di data massa, è funzione crescente del modulo della velocità (e si annulla per $v = 0$)
– in un urto elastico l'energia cinetica totale si conserva.

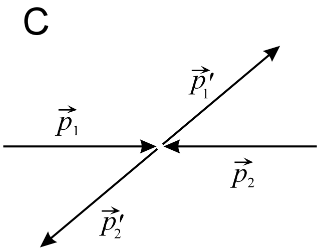

fig. 11–5

Per definizione la q. di moto totale nel rif. del centro di massa è nulla prima dell'urto: allora le velocità delle due palline sono necessariamente opposte (uguali in modulo). Dato che la q. di moto si conserva, sarà nulla anche dopo l'urto. Questo basta per dire che anche dopo l'urto le due velocità sono opposte e di ugual modulo; però potranno aver cambiato direzione, e fin qui non posso escludere che siano cambiati anche i moduli.

Ma il modulo delle velocità non può cambiare, altrimenti cambierebbe l'energia cinetica, che invece si deve conservare. Ne segue che non cambia neppure il modulo della q. di moto di ciascuna particella: cambia solo la direzione. È importante notare *che quanto detto fin qui è vero indipendentemente dalla relatività*: se Tizio è un fisico relativista e Caio è un fisico newtoniano, fin qui Tizio e Caio vanno d'accordo.

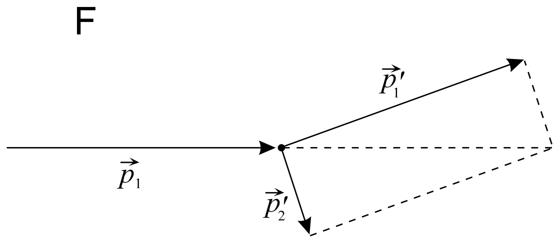

fig. 11–6

Finora stavamo nel rif. C del centro di massa. Ora analizziamo il sistema in un rif. F: quello in cui la particella 2 è inizialmente ferma. In questo caso la q. di moto totale è $\vec{p}_1$, perché $\vec{p}_2 = 0$. Dato che la q. di moto si conserva, sarà $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, dove ho indicato con $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ le q. di moto dopo l'urto.

Aggiungo ora l'ipotesi che valgano le formule newtoniane: allora $T = p^2/2m$ e la conservazione dell'energia cinetica ci dice

$$p_1^2 = {p_1'}^2 + {p_2'}^2 \tag{11–1}$$

(i fattori $2m$ a dividere si cancellano). Di conseguenza l'angolo fra $\vec{p}_1'$ e $\vec{p}_2'$ è retto.

Riassumendo: secondo la meccanica newtoniana, in un urto fra due particelle uguali, di cui una ferma, se l'urto è elastico *le velocità dopo l'urto sono tra loro ortogonali.*

In realtà posso dire “se e solo se,” perché il ragionamento fatto si può invertire: se l'angolo è retto vale il teorema di Pitagora e la (11–1), cioè si conserva l'energia cinetica. Si vede così che la legge dell'angolo retto è intimamente connessa con le leggi newtoniane del moto. Se in un esperimento dovessi trovare che in un urto elastico le particelle escono con un angolo non retto, dovrei concludere che la q. di moto non si conserva, oppure che la relazione fra q. di moto ed energia non è quella newtoniana.

. . . non vale in relatività

E questo è stato fatto: ci sono esperimenti famosi in camera di Wilson, dove si vede che l'urto di due elettroni, di cui uno fermo, produce in uscita traiettorie che formano un angolo acuto. Una considerazione didattica: noi abbiamo fatto disegni, ma si potrebbe fare un esperimento: sul tavolo da biliardo, o meglio su un tavolo a cuscino d'aria, le palle (i dischi) farebbero circa un angolo retto, mentre con gli elettroni questo non è più vero.

Ma perché ho mostrato due figure in due rif. differenti? Per arrivare all'angolo retto il rif. C non mi è servito! Vedremo subito a che cosa serve... Domandiamoci: come si passa dal rif. C a F? Come si trova la velocità nel rif. F a partire da quella nel rif. C? In F la particella 2 è ferma, in C si muove; quindi la velocità di F rispetto a C è $\vec{v}_2$, quella di C rispetto a F è $-\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Ma se voglio conoscere le velocità in F a partire da quelle in C, devo sapere come trasformare le velocità da un rif. all'altro. Tengo a sottolineare che è improprio parlare di "composizione" delle velocità: è improprio perché le parole si tirano dietro sottintesi, significati che non hanno e poi si finisce per non capire più niente. "Composizione" suggerisce naturalmente la somma di due vettori, e così si trasmette l'idea che l'operazione da fare sia appunto una somma di vettori, cosa che a priori non possiamo dire (e a posteriori risulterà falso in relatività ...).

In effetti noi abbiamo un problema più generale: come si trasforma una grandezza fisica nel passare da un rif. a un altro? In genere le grandezze relative a una stessa situazione, ma misurate in rif. diversi, sono diverse. Il vantaggio di usare la parola *trasformazione* invece di composizione, è che non viene più naturale pensare alla somma delle velocità. Nella fisica newtoniana, grazie al tempo assoluto, si dimostra che la velocità di un corpo nel secondo rif. è la somma della velocità del corpo nel primo rif. più la velocità del primo rif. rispetto al secondo. Ma questa è la meccanica newtoniana: se il tempo non è più assoluto, la dimostrazione non vale più, ma una legge di trasf. (anche se al momento sconosciuta) esiste sempre. Insisto che siamo di fronte a un problema psicologico: usare la parola "composizione" suggerisce la somma. Ma la legge di trasf. può non essere una somma: e infatti si scopre che *non è* una somma!

A parte questo, se assumiamo la legge di trasf. galileiana, allora per passare da C a F dovremo sommare $\vec{v}_1$ a tutte le velocità. L'ho fatto nella fig. 11–7, dove appunto si vede come ricavare le velocità finali in F a partire da quelle in C. Nella figura si vedono i due parallelogrammi che danno le somme vettoriali, e che sono in realtà due rombi, perché i lati sono tutti uguali. Ma in un rombo le diagonali sono perpendicolari, e si ritrova così, per altra via, la legge dell'angolo retto.

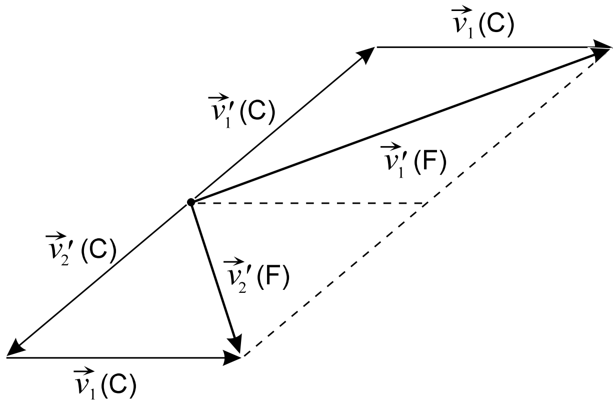

fig. 11–7

Riassumendo: nella meccanica newtoniana la legge di trasf. delle velocità è la somma, e ne segue la legge dell'angolo retto. Se in relatività la legge di trasf. è diversa, dobbiamo essere preparati ad accettare anche una legge diversa per l'angolo dopo l'urto...

La situazione ora è la seguente: in un primo tempo abbiamo dedotto la legge dell'angolo retto dalla conservazione dell'energia cinetica, usando per questa l'espressione

$$T = p^2/2m. \tag{11–2}$$

Successivamente abbiamo visto che la legge dell'angolo retto vale se e solo se accettiamo la trasf. galileiana delle velocità. Allora, se la (11–2) non è giusta non vale la legge dell'angolo retto e non vale neppure la trasf. galileiana delle velocità; viceversa, se non vale la legge galileiana allora l'angolo non sarà retto e non varrà la (11–2) per l'energia.

Ma abbiamo visto che la legge dell'angolo retto non è vera sperimentalmente: quindi non vale la trasf. galileiana delle velocità e $p_1^2 \neq {p_1'}^2 + {p_2'}^2$ anche se l'energia cinetica si conserva. Perciò non può essere $T = p^2/2m$ e ne segue $p \neq mv$. Io non so quale sarà la nuova relazione fra p e v, ma non sarà $p = mv$. Se sapessi come ricavare una delle leggi (ad es. la trasf. delle velocità) allora potrei dedurre le altre, in particolare quella per l'energia. E viceversa: se conosco la relazione per l'energia posso dedurre la trasf. delle velocità.

Quantità di moto e velocità limite

C'è un altro modo assai più semplice per capire che non possiamo mantenere la formula newtoniana $p = mv$. Consideriamo una particella soggetta a una forza costante:

allora da $p = mv$ e $F = dp/dt$ segue $F = ma$, e se F è costante sarà costante anche l'accelerazione. Ma in tal caso la velocità crescerebbe indefinitamente (proporzionale al tempo) e non ci sarebbe nessuna velocità limite.

Se pensiamo per es. a un elettrone, basterebbe una d.d.p. di 250 kV per fargli raggiungere la velocità della luce. Infatti, se E è il campo elettrico uniforme, avremo:

$$F = eE \qquad a = \frac{e}{m}\,E \qquad v = \frac{e}{m}\,Et$$
$$v = c \quad \Rightarrow \quad t = \frac{mc}{eE} \qquad s = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{mc^2}{2eE}$$
$$V = Es = \frac{mc^2}{2\,e}.$$

Dato che per un elettrone $mc^2 \simeq 0.5\,\mathrm{MeV}$, si ottiene appunto $V = 250\,\mathrm{kV}$.

Ma 250 kV non è una differenza di potenziale alta! Tecnicamente si raggiunge senza problemi, quindi sarebbe facile accelerare un elettrone fino a fargli raggiungere velocità superiori a quella della luce. L'esperimento è descritto in uno degli ormai famosi film del PSSC, intitolato appunto *La velocità limite*. Nell'esperimento si ricava il grafico della velocità in funzione della d.d.p. V. Portando V in ascisse e v in ordinate, se valessero le leggi newtoniane avremmo $v \propto \sqrt{V}$; quindi il grafico verrebbe una parabola (con asse coincidente con quello delle ascisse): la velocità crescerebbe sempre, senza limiti.

L'esperimento mostra invece che il grafico ha un asintoto orizzontale per $v = c$: in effetti viene usato un acceleratore lineare, che dà agli elettroni un'energia cinetica di diversi MeV, quindi molto superiore a quella critica che abbiamo calcolata (fig. 11–8).

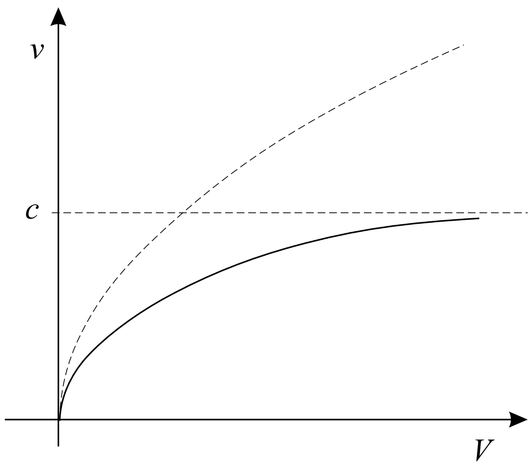

fig. 11–8

Problemi

1. Perché l'esempio delle cariche è "non relativistico"?

2. Una particella si muove di moto circolare uniforme. Note F e p calcolare il periodo.

Attenzione: in meccanica newtoniana è facile, ma qui siamo in meccanica relativistica, e le formule non le abbiamo. Dovete rispondere a questa domanda senza usare le formule della meccanica newtoniana, perché non valgono, né quelle della meccanica relativistica, perché non le sappiamo. Solo utilizzando quello che abbiamo detto oggi. È un ragionamento abbastanza sottile.

3. Quiz a risposta multipla: un elettrone inizialmente fermo viene accelerato per $1\,\mu\mathrm{s}$ in un campo $E = 10^4\,\mathrm{V/m}$. Cosa sappiamo delle condizioni finali?

a) la velocità *b*) lo spazio percorso
c) l'energia *d*) l'impulso
e) nessuna di queste.

N.B. Anche qui è permesso utilizzare solo quanto visto fino ad ora: i tre principi, nella forma che abbiamo detto.

Risposte

Problema 1. (Esempio non relativistico):

Si tratta dell'esempio con cui abbiamo mostrato che il PAR non vale nell'interazione tra due cariche in moto. La domanda è un po' un gioco di parole, ma vale la pena di ragionarci sopra.

Dicendo che l'esempio è non relativistico, ho pensato prima di tutto al punto di vista storico: il problema del campo (elettrico e magnetico) prodotto da una carica in moto non solo può essere trattato senza conoscere la relatività, ma di fatto è stato affrontato e risolto prima della nascita della relatività.

Si potrebbe però assumere un punto di vista diverso, osservando che le equazioni di Maxwell sono *intrinsecamente relativistiche* (infatti sono invarianti per trasf. di Lorentz, non di Galileo) e quindi l'accidente storico è irrilevante: nella sostanza il problema *è* relativistico, anche se i fisici della fine dell'800 non se n'erano ancora accorti...

Un altro argomento che si potrebbe portare è il seguente: nella situazione descritta dal problema non occorre l'ipotesi che le velocità delle cariche siano dell'ordine di c; le cose vanno allo stesso modo per qualunque velocità.

Questo è vero, però occorre anche tener presente che la violazione del PAR è dovuta alla forza di Lorentz che il campo magnetico prodotto da B esercita su A. Tale forza è proporzionaale alla velocità di A, ma anche alla velocità di B perché il campo magnetico è esso stesso proporzionale a quella velocità. Dunque l'effetto va col prodotto delle due velocità, e facendo i calcoli in dettaglio si vede che la forza responsabile della non validità del PAR sta alla forza dovuta al campo elettrico nel rapporto v^2/c^2.

In questo senso l'effetto è relativistico, perché è di secondo ordine in v/c, come tutti gli altri effetti relativistici: dilatazione del tempo, deviazioni da $F = ma$, ecc.

Problema 2. (Moto circolare uniforme):

Cominciamo con l'osservare che $\vec{p}$ sarà certamente parallelo a $\vec{v}$, e che nel moto circolare uniforme per definizione anche il modulo di $\vec{p}$, come quello di $\vec{v}$, resta costante. È quindi facile calcolare il modulo di $d\vec{p}/dt$, con una proporzione dedotta dai triangoli simili in fig. 11–9:

$$|d\vec{p}/dt| : |\vec{p}| = |d\vec{v}/dt| : |\vec{v}|.$$

Noi conosciamo $|d\vec{v}/dt|$, che vale v^2/r (notate che questa legge è tanto newtoniana quanto relativistica, o meglio non è né newtoniana né relativistica, ma solo cinematica!). Pertanto

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \frac{vp}{r} = \omega p.$$

Ma $|d\vec{p}/dt| = F$, e arriviamo a

$$F = \omega p, \quad \omega = F/p, \quad T = \frac{2\pi p}{F}$$

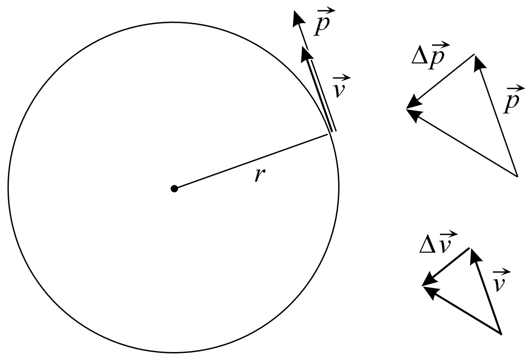

fig. 11–9

che risolve il problema (ora T è il periodo).

Per una particella carica in un campo magnetico ortogonale alla traiettoria avremo $F = evB$, da cui

$$eBr = p \tag{11–3}$$

che è interessante perché mostra che se non sappiamo realizzare campi oltre un certo B, per accrescere p siamo costretti ad aumentare r in proporzione: ecco una ragione per cui gli acceleratori sono sempre più grandi (ce n'è anche un'altra: l'aumento di r serve a ridurre la potenza perduta per irraggiamento dalla carica accelerata, che a parità di p va come $1/r^2$).

È anche interessante una conseguenza dell'esistenza di una velocità limite: per un acceleratore di raggio assegnato, al crescere di p (e anche dell'energia) la velocità tende a c, e quindi il periodo tende anch'esso a un limite $2\pi r/c$. Perciò gli impulsi che danno energia alle particelle (non possiamo più dire che le "accelerano"!) andranno dati a una frequenza crescente, che tende a un limite costante. È per questa ragione che si parla di "sincrotroni." Però la (11–3) mostra che se cresce p deve crescere B; d'altra parte è necessario tenere le particelle in un'orbita fissata, perché debbono viaggiare in un tubo vuoto: ne segue che occorre aumentare il campo magnetico che le fa girare in tondo, man mano che l'impulso aumenta.

Problema 3. (Quiz a risposta multipla):

È dato il campo elettrico, quindi la forza, e il tempo per cui agisce. Il secondo principio ci dice che è noto l'impulso finale, che vale $p = eEt$. Non possiamo ricavare da qui la velocità, anche conoscendo la massa dell'elettrone, perché non ci è (ancora) nota la relazione tra p e v. Per la stessa ragione non possiamo dire quanto vale l'energia, non avendo ancora trovato la relazione tra energia e impulso.

Neppure lo spazio ci è noto: lo potremmo ricavare integrando la velocità, che però non conosciamo. Oppure potremmo trovarlo dal teorema delle forze vive, dato che il lavoro della forza sarà $L = eEs$, se ci fosse nota la variazione di energia.

Dunque la risposta corretta è la d).