LEZIONE 8

L'esperimento di Hafele e Keating

Il primo dei "nuovi esperimenti," che come ho già detto rendono oggi molto più facile insegnare la relatività evidenziandone fin dall'inizio gli aspetti fisici essenziali, è quello realizzato nel 1971 da Hafele e Keating.

Per i nostri scopi l'esperimento H–K si presenta in poche parole: consiste nel montare due orologi atomici su due aerei che fanno il giro del mondo, l'uno in senso orario, l'altro in senso antiorario (uno verso Est, l'altro verso Ovest). Gli orologi sono stati regolati alla partenza in modo da segnare lo stesso tempo; quando atterrano di nuovo all'aeroporto dal quale sono partiti, si trova che segnano tempi diversi. Più esattamente, alla fine del viaggio, durato un po' più di due giorni, l'orologio che aveva viaggiato verso Ovest era avanti rispetto all'altro di 332 ns.

Per discutere e interpretare l'esperimento ci conviene schematizzarlo. In primo luogo supporremo che tutto il viaggio degli aerei si svolga lungo l'equatore, cosa che nell'esperimento reale non era: gli aerei erano normali aerei di linea, e quindi percorrevano le rotte usuali; inoltre partenza e arrivo avvennero a Washington. Un'altra semplificazione consiste nel supporre che il moto degli aerei sia uniforme (con la stessa velocità per entrambi) e la quota costante; in particolare trascureremo le variazioni di quota al decollo e all'atterraggio. La cosa non è priva d'influenza, e per confrontare i risultati trovati con la teoria occorre tenerne conto; ma ora sarebbe troppo complicato pensarci. Mi limito a ricordare che quando più avanti parleremo di accordo fra teoria ed esperimento, il confronto andrà inteso tenendo conto di tutto: variazioni del percorso, della velocità, della quota... È complicato, ma è possibile.

Dunque gli orologi partono dall'aeroporto A posto all'equatore (fig. 8–1); l'orologio 1 gira in senso antiorario, l'orologio 2 in senso orario. Quando ritornano in A, si confronta l'intervallo di tempo $\Delta\tau_1$ segnato dall'orologio 1 con quello $\Delta\tau_2$ segnato dall'orologio 2. L'esperimento mostra che $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$: questo dobbiamo discutere e interpretare.

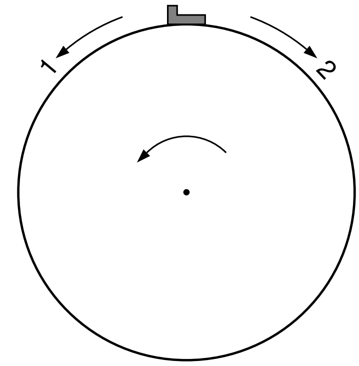

fig. 8–1

Ma prima non posso evitare una piccola divagazione sulla fig. 8–1 e sul linguaggio che ho usato. Ho detto "l'orologio 1 gira in senso antiorario" e voi non ci avrete trovato niente da ridire. Eppure qualcosa da dire c'è: avrei dovuto dire "gira in senso antiorario guardando da Nord." Allo stesso modo, sebbene sia corretto dire che la Terra ruota da Ovest a Est, non è altrettanto corretto dire che la rotazione è antioraria. Lo è solo se vista da Nord, mentre per chi la guardi da Sud è oraria. È solo il fatto che noi viviamo nell'emisfero settentrionale, unito alla priorità storica che l'area mediterranea e l'Europa hanno avuto nello sviluppo scientifico, a farci vedere come naturale un punto di vista che è solo uno di due possibili e ugualmente leciti.

Discussione dell'esperimento

Prima di tutto: contro le apparenze, i due orologi non sono in condizioni simmetriche, causa la rotazione terrestre. In un RI che si muove insieme alla Terra ma senza ruotare, e che chiamerò K, l'orologio 1 ha velocità maggiore di 2. Anzi: rispetto a K ambedue gli orologi viaggiano verso Est: questo perché la velocità di un aereo normale è minore della velocità periferica della Terra. Infatti quest'ultima all'equatore vale circa 460 m/s, ben superiore alla velocità del suono; ma gli aerei di linea non sono supersonici! Del resto, una prova diretta si ha osservando che chi viaggi su un aereo che attraversa l'Atlantico verso Ovest non vede il Sole spostarsi verso Est.

Dunque la differenza fra i due aerei è che (sempre rispetto a K) uno viaggia più velocemente dell'altro, perché 1 somma la sua velocità a quella della Terra, mentre 2 la sottrae.

Il condizionamento dovuto alla tradizione spinge a leggere il risultato dell'esperimento H–K in un certo modo, che non è il migliore. Questo è un punto centrale, che occorre esaminare attentamente: è molto facile credere che l'esperimento dimostri che *il tempo segnato da un orologio dipende dal suo moto.* Perciò il centro della nostra discussione sarà proprio su questo specifico punto, e voglio dedicargli lo spazio che merita. Però prima è meglio sgomberare il terreno da possibili dubbi, posti in certo senso a monte, e relativi alla stessa affidabilità dell'esperimento.

Ma il ritardo è genuino?

Il primo dubbio che può venire in mente è: come possiamo sapere che durante il viaggio sugli aerei gli orologi non siano stati disturbati in qualche modo? Si tratta di un dubbio niente affatto diverso da quelli che ci si pone in qualunque esperimento di fisica. Quando si fa un esperimento di questo genere ci si deve assicurare che i campi magnetici, la temperatura, la pressione atmosferica, ecc., non lo disturbino, introducendo errori sistematici. Tutto ciò si può verificare, perché per esempio si può simulare un viaggio in aereo, si possono riscaldare o raffreddare gli strumenti, sottoporli a variazioni di pressione ecc. È chiaro che prove del genere vanno fatte; però tale esigenza non solleva alcuna questione di principio.

È giusto ricordare che agli esperimenti non si deve credere ciecamente: un esperimento può anche essere sbagliato, può essere stato fatto in condizioni scorrette. Ma occorre tener presente che gli esperimenti significativi vengono verificati, analizzati, vagliati sotto tutti i punti di vista: alcuni resistono, altri no. Dal momento che l'esperimento H–K ha retto alle critiche, conviene accettarne il risultato.

La marcia di un orologio non dipende dal suo moto

Ma allora, perché non si può dire che il tempo segnato dall'orologio dipende dalla velocità dell'aereo? In primo luogo, per il PR. Questo ci obbliga a dire che ogni orologio che sta in un RI è uguale a qualunque altro. Non ci può essere nessuna differenza tra i due: altrimenti l'esperimento ci permetterebbe di determinare lo stato di moto di un orologio. Parlare di un effetto dello stato di moto sul comportamento degli orologi, significa andare contro il PR.

Naturalmente ci si può salvare osservando che l'effetto non è "intrinseco" all'orologio, ma solo apparente; un tale modo di presentare la cosa ha però più di un difetto. Il primo è di natura didattica: sebbene questa via d'uscita — che poi è quella tradizionale — non sia erronea in sé, è però molto difficile presentarla correttamente, ossia in modo che non venga confusa con l'interpretazione "ingenua" vista sopra: quella che va contro il PR. Credo che un buon 99% degli oppositori della relatività (una specie ancora molto fiorente) sia appunto stata indotta in errore dalla confusione tra i due punti di vista; e quel che è peggio, credo — con qualche prova di fatto — che la gran parte degli studenti cada nello stesso equivoco.

La seconda controindicazione all'interpretazione "ortodossa" è che essa apre la strada a una serie di fraintendimenti filosofici (presunto ruolo dell'"osservatore," soggettività dei dati dell'esperienza, ecc.) che non hanno niente a che fare con la fisica, ed è bene tenere lontani il più possibile. Ne abbiamo già parlato, e non starò a ripetermi.

Ma soprattutto: qui non stiamo discutendo il classico caso di due orologi in moto relativo uniforme, osservati dal rif. in cui uno è fermo e l'altro è in moto. Qui ci sono sì due orologi, ma nel momento in cui li confrontiamo — alla partenza e all'arrivo — essi sono in quiete relativa: entrambi fermi all'aeroporto. Quest'osservazione apre però la porta a un'obiezione più fondamentale, che ora dobbiamo esaminare: visto che partono e arrivano insieme, i due orologi non possono trovarsi entrambi in RI, che per definizione sono in moto relativo TRU (traslatorio rettilineo uniforme).

A dire il vero, i RI di cui ho appena parlato sono quelli newtoniani: resterebbe aperta la possibilità che due RI in caduta libera possano effettivamente reincontrarsi. In casi speciali ciò accade (vi lascio di scoprire come e quando) ma non ce ne dobbiamo preoccupare: di sicuro i nostri aerei *non sono in caduta libera*!

Ma gli orologi non sono in riferimenti inerziali!

Ma se un aereo che viaggia intorno alla Terra non è un RI, il mio richiamo al PR è fuori luogo. Ecco un'obiezione che a prima vista sembra insormontabile...

È senz'altro vero che gli orologi sono accelerati, con accelerazione v^2/R (v essendo la velocità rispetto a K). A conti fatti, le accelerazioni sono risp. $0.07\,\mathrm{m/s^2}$ e $0.009\,\mathrm{m/s^2}$: in entrambi i casi piccole rispetto a g, oltre un fattore 100 (il che prova che non sono in caduta libera). Ma nemmeno un orologio fermo sulla Terra è in caduta libera; perciò la vera domanda diventa questa: che effetto ha sugli orologi atomici usati da Hafele e Keating, il fatto che gli aerei sono accelerati?

Qui ci torna utile in primo luogo il PE, che ci assicura che l'effetto di tali accelerazioni sarà equivalente a quello di una variazione di g: nel nostro caso, una variazione inferiore all'1% (non dimenticate che sugli aerei agisce anche la forza di gravità: l'accelerazione ha solo l'effetto di cambiarne un po' il valore).

È poi il momento di mettere a frutto la lunga discussione che abbiamo fatta, nelle prime due lezioni, sugli orologi come strumenti e sulla loro eventuale sensibilità a diverse perturbazioni, inclusa un'accelerazione. Abbiamo già detto genericamente che per gli orologi atomici l'effetto di un'accelerazione è trascurabile; ma ora da un lato capite perché ci serviva preoccuparcene, dall'altro abbiamo un criterio quantitativo: dato che l'effetto osservato è di $332\,\mathrm{ns}$ su 50 ore, ossia un po' meno di $2 \cdot 10^{-12}$, dobbiamo assicurarci che un orologio atomico non venga disturbato in questa misura da variazioni di g inferiori all'1%.

Per fortuna, sappiamo che la marcia un orologio atomico è influenzata in modo trascurabile da variazioni di g di quell'ordine. Questo però non si decide con sole considerazioni teoriche: occorre sapere come l'orologio atomico funziona, e meglio ancora chiedere a un esperto di orologi atomici se dobbiamo preoccuparci o no. La risposta è no: a questo livello gli effetti dell'accelerazione degli aerei sono irrilevanti.

Di passaggio, la discussione appena fatta mostra su un esempio concreto ma fondamentale che cosa vuol dire la mia insistenza sul fatto che la relatività è una. Abbiamo visto che non si può discutere un problema che tradizionalmente sarebbe considerato di RR, senza far uso del PE, ossia senza idee che appartengono alla RG.

Il tempo assoluto non esiste

Riepilogando: il moto, nel senso di moto uniforme dell'aereo, non ha effetto grazie al PR. Quanto all'accelerazione centripeta del rif., possiamo ritenerla equivalente alla forza di gravità: l'effetto di questa sull'orologio possiamo studiarlo in laboratorio e mostrare che è trascurabile.

Insisto che siamo a un punto cruciale, perché il modo più comune di trattare l'argomento è opposto: si parla di effetto del campo gravitazionale e del moto degli orologi. Abbiamo qui una discriminante riguardo a quanto detto all'inizio del corso, circa la tendenza a creare complicazioni inutili. Se si fanno discorsi sull'influenza del campo di gravità e del moto degli orologi, si è sulla strada di creare una nebbia di "influenze" misteriose, dalla quale l'allievo forse non potrà più uscire.

Torniamo ora all'esperimento. Sappiamo che gli orologi vanno bene, che non ci sono ragioni fisiche perché non debbano segnare il tempo giusto; quindi se nell'esperimento H–K essi, partiti d'accordo, ritornano segnando tempi diversi, *non si può più parlare di tempo assoluto*: ciascun orologio segna il *suo* tempo, che dipende dal modo come esso percorre lo spazio-tempo. È una conclusione difficile da accettare, ma ancor più difficile da sfuggire.

Per quello che vale (ma vale molto di più di quanto può sembrare a prima vista) propongo un'analogia con i percorsi stradali. È fin troppo ovvio che non c'è *una* distanza fra due città: dipende dalla strada. E non ci verrà certo in mente di dire che il contachilometri della nostra macchina cambia modo di funzionare a seconda della strada che facciamo: è la lunghezza del percorso che non è assoluta. Le due città stanno dove stanno sulla superficie della Terra; ma dall'una all'altra si può andare per più strade (concettualmente infinite) e ciascun percorso ha una sua lunghezza. Nessuno ci trova niente di strano, solo perché ci siamo abituati per lunga esperienza.

Quello che ora stiamo scoprendo è che con lo spazio-tempo succede la stessa cosa: fissati due punti dello spazio-tempo, esistono infiniti percorsi (ossia moti di corpi) che li uniscono, e ciascuno ha una sua "lunghezza" (leggi: tempo segnato dall'orologio). È questo quadro concettuale che in relatività sostituisce il tempo assoluto newtoniano. Il seguito del nostro discorso sarà ora dedicato a precisare e mettere in forma quantitativa, matematica, quest'idea.

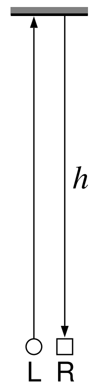

fig. 8–2

L'orologio a luce

Abbiamo ormai capito che per risolvere i problemi che abbiamo incontrato dobbiamo rivedere le nostre idee sul tempo. La maniera più semplice di arrivarci è di presentare l'*orologio a luce*.

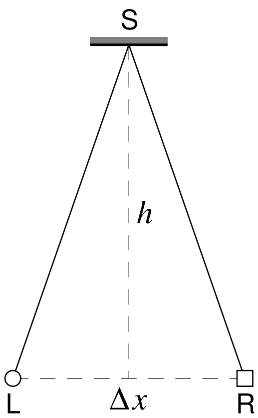

fig. 8–3

Questo consiste di una sorgente L (fig. 8–2) che manda un segnale luminoso verso l'alto, dove a distanza h c'è uno specchio S, che riflette la luce verso il basso. Proprio accanto a L c'è un rivelatore R che vede il segnale riflesso, lo conta, e trasmette a L il comando di emettere istantaneamente un nuovo segnale. Naturalmente l'intervallo di tempo tra due scatti successivi del contatore sarà il tempo impiegato dalla luce ad andare e tornare, cioè $2h/c$: questo tempo lo chiamiamo $\Delta\tau$. La più importante proprietà di un tale orologio è che il suo periodo dipende esclusivamente dalla distanza fra sorgente-rivelatore e specchio.

Supponiamo ora che l'orologio a luce sia in moto rispetto al nostro laboratorio, e vediamo come appariranno le cose nel rif. del laboratorio (fig. 8–3). Mentre la luce sale, lo specchio si sposta verso destra, e lo stesso fa anche il rivelatore: perciò la luce che arriverà a R viaggia obliquamente.

Chiamiamo Δx lo spostamento dell'orologio nel tempo di andata e ritorno, e indichiamo con h, come prima, la distanza verticale tra la sorgente e lo specchio. Vogliamo calcolare il tempo Δt che la luce ha impiegato a fare il percorso LSR.

Lo spazio percorso è

$$c\,\Delta t = 2\sqrt{h^2 + (\Delta x/2)^2} = \sqrt{c^2\Delta\tau^2 + \Delta x^2} \qquad (8\text{–}1)$$

da cui

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2/c^2}. \qquad (8\text{–}2)$$

È importante notare che qui abbiamo usato l'invarianza della velocità della luce, perché abbiamo sottinteso che la luce viaggia con la stessa velocità c in entrambi i rif.[1]

Il tempo proprio

Occorre subito chiarire il significato dei due intervalli di tempo Δt e $\Delta\tau$. Il primo è il tempo segnato da un orologio che sta fermo nel rif. del laboratorio, mentre $\Delta\tau$ è il tempo segnato dall'orologio a luce, che si muove rispetto al laboratorio. Teniamo presente che l'orologio a luce si porta dietro il suo contatore; anche se l'orologio si sposta noi possiamo leggere il contatore, e così conoscere il tempo segnato dall'orologio. Il tempo dell'orologio a luce è dunque *obbiettivo*, nel senso che può essere osservato da chiunque, leggendolo sul quadrante, o essere trasmesso via radio. Lo chiamiamo perciò *tempo proprio*.

D'altra parte possiamo misurare Δt, e anche Δx, nel nostro laboratorio. Allora la formula (8–2) può essere interpretata dicendo che ci sono due modi di determinare il tempo $\Delta\tau$ segnato da un orologio in moto: uno è di leggerlo direttamente, l'altro è di ricavarlo a partire dal tempo Δt segnato da un orologio fermo e dallo spostamento Δx che ha fatto l'orologio in moto.

Questo discorso è importante perché ci fa capire che $\Delta\tau$ ha il carattere di un *invariante*. Se ci mettiamo in un RI diverso da quello del laboratorio, in cui l'orologio si muova a una diversa velocità, anche in questo rif. dovrà valere la (8–2), con lo stesso $\Delta\tau$. Ma lo spostamento $\Delta x'$ dell'orologio è certamente diverso da Δx, e allora anche $\Delta t'$ sarà diverso da Δt; però avremo sempre

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t'^2 - \Delta x'^2/c^2}. \tag{8–3}$$

La (8–3) ci dice che mentre $\Delta\tau$ — cioè il tempo segnato dall'orologio a luce — è sempre lo stesso, perché lo si legge direttamente sul quadrante, invece Δt e Δx cambiano da un rif. all'altro. Notate che la variazione dello spostamento è ovvia, trattandosi di rif. in moto relativo; ma la variazione del Δt non lo è affatto, e mostra appunto il carattere *relativo*, non più assoluto, del tempo. Ciò che resta sempre vero è che si può calcolare il tempo proprio dell'orologio dalla (8–2) (che nell'altro rif. si scrive (8–3)): il tempo proprio è *invariante*.

Tempo proprio e geometria dello spazio-tempo

Esiste un'importante analogia tra la situazione attuale e quella che si ha nella geometria analitica del piano euclideo. Consideriamo due punti A e B, uniti da un segmento di lunghezza Δl (fig. 8–4). Disegnati due assi cartesiani indichiamo con Δx, Δy le proiezioni del segmento sugli assi.

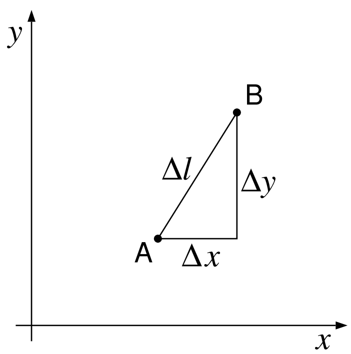

fig. 8–4

Per mettere in evidenza l'analogia, osserviamo che ci sono due modi per determinare la lunghezza di un segmento. Uno è di prendere un metro e misurare la lunghezza direttamente (l'equivalente di andare a leggere quanto segna il nostro orologio a luce). Da questo punto di vista, la lunghezza è una proprietà *intrinseca* del segmento: indipendentemente dal sistema di coordinate, se si prende un metro e si misura un segmento si otterrà sempre lo stesso risultato.

[1] Abbiamo anche supposto che la distanza h risulti la stessa nei due rif. Lo si può dimostrare senza difficoltà, ma in queste lezioni avevo preferito ignorare il problema. Anche questo è un punto dove sono incerto sulla scelta più opportuna: forse si potrebbe accennare che il problema esiste, senza insistere.

Però se ho scelto un SC, e se conosco Δx e Δy, allora posso fare a meno di misurare il segmento con il metro: posso calcolare la lunghezza Δl a partire da Δx e Δy con la formula ben nota:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{8–4}$$

La differenza è che questa seconda strada usa dei dati (Δx e Δy) che dipendono dal SC. Cambiando SC (fig. 8–5) troverò un altro $\Delta x'$ e un altro $\Delta y'$, ma usando la stessa formula (8–4) dovrò trovare lo stesso risultato di prima:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}. \tag{8–5}$$

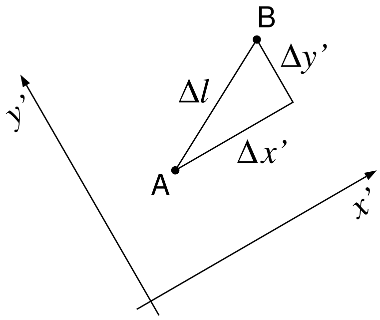

fig. 8–5

Il risultato che si ottiene con la (8–4) è lo stesso per tutti i SC, anche se i due termini Δx e Δy cambiano da un sistema all'altro: la formula esprime un *invariante*.

Tornando al caso che c'interessa, il tempo proprio dell'orologio non dipende dal rif. in cui si fa la misura. L'orologio a luce segna il suo tempo, che è una sua proprietà intrinseca; ma se si vuole collegare questo tempo proprio alle misure fatte in un altro rif., si dovrà usare la formula (8–2), in cui entra il tempo dell'orologio nel laboratorio nel quale si fa la misura, e lo spostamento dell'orologio a luce rispetto a quel rif. Queste sono grandezze che cambiano a seconda del rif.; però il $\Delta\tau$ risultante, che dà il tempo dell'orologio a luce, non cambia.

Le due situazioni che abbiamo esaminato sono molto diverse: in un caso abbiamo a che fare con proprietà geometriche del piano euclideo, che si esprimono con le formule della geometria analitica del piano; nell'altro entra in gioco il PR e l'invarianza della velocità della luce. Ma l'analogia è così stretta che suggerisce un'interpretazione *geometrica* del tempo proprio. La grandezza $\Delta\tau$ della (8–2), che appare come un invariante della situazione fisica, somiglia talmente al Δl della formula geometrica, che si è portati a interpretare $\Delta\tau$ come una "lunghezza" nello spazio-tempo. Quest'idea, di dare un significato geometrico al tempo proprio, e quindi introdurre una *metrica* nello spazio-tempo, è stata il fondamentale contributo di Minkowski alla relatività.

Diagrammi spazio-temporali

A questo punto è utile ragionare in un diagramma spazio-temporale, in cui di solito si mette la coordinata x in ascissa e il tempo (del rif.) in ordinata. Ai punti di questo diagramma è dunque associata una posizione spaziale e un istante temporale: si tratta di *punti nello spazio-tempo*, generalmente chiamati *eventi*.

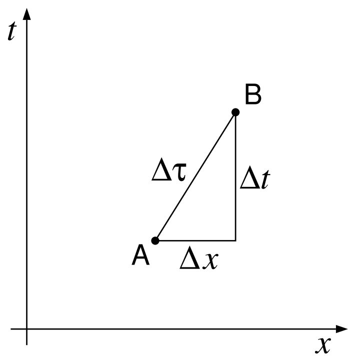

fig. 8–6

Notate che i punti hanno però un significato intrinseco, indipendente dal modo come li rappresentiamo in un diagramma spazio-tempo: fisicamente parlando, un evento non è che un fenomeno *ben localizzato nello spazio e nel tempo*. S'intende che "ben localizzato" va inteso rispetto alla scala spaziale e temporale che c'interessa, e che può cambiare anche di molti ordini di grandezza a seconda del contesto di fenomeni di cui ci stiamo occupando: per es. dal decadimento di una particella alla nascita di una persona, all'esplosione di una supernova.

Pensando all'orologio a luce, avremo un evento A (fig. 8–6), che è la partenza della luce dalla sorgente, e un evento B, che è il ritorno dell'impulso di luce al rivelatore.

I due eventi avvengono a tempi diversi e in generale anche in posti diversi: quindi le coordinate spazio-temporali di questi eventi sono diverse, sia la x, sia la t. È anche chiaro nella figura il significato di Δx e Δt. Abbiamo poi una "distanza" $\Delta\tau$, che è data dalla (8–2) e che, come nel caso della distanza geometrica tra due punti, non dipende dal rif.

E ora un punto che può dare qualche difficoltà. Vedendo una figura come quella appena descritta, si è portati naturalmente a pensare di doverci applicare la geometria euclidea del piano. Invece questo è sbagliato, perché quando io dico "distanza" non intendo una distanza nel senso della geometria euclidea, ma quella data dalla (8–2): ecco il motivo delle virgolette. Lo spazio-tempo ha una geometria che *somiglia* alla geometria euclidea, nel senso che, a partire dalle coordinate, si può trovare una distanza; la formula però è un po' diversa da quella abituale. La differenza più significativa è che mentre nel caso euclideo il quadrato della distanza è la *somma* dei quadrati delle due grandezze Δx e Δy, nel caso dello spazio-tempo compare una *differenza*. (Questa differenza ha una conseguenza importantissima, che discuteremo più avanti.) La più rilevante proprietà in comune è che entrambe le distanze sono *invarianti*.

In realtà tra le due formule c'è anche un'altra differenza: nella (8–3) c'è un c^2 a dividere, che non compare nella (8–4). Però questa differenza non è essenziale, e la si potrebbe eliminare facilmente: basterebbe ridefinire l'unità di lunghezza o quella di tempo in modo opportuno. Se ad es. convenissimo di misurare tutte le lunghezze in secondi-luce anziché in metri, in queste unità avremmo $c = 1$. La presenza del divisore è quindi un accidente storico: nasce dal fatto che le unità di misura sono state stabilite prima che si capisse l'intima relazione fra spazio e tempo (lo spazio-tempo). Purtroppo a quel punto era troppo tardi per cambiare, a parte il fatto che il secondo-luce come unità di lunghezza sarebbe poco pratico, visto che vale quasi la distanza Terra–Luna...

Parentesi sulle trasformazioni di Lorentz

Avrete notato che la mia esposizione presenta un'inversione rispetto a una trattazione di tipo tradizionale. Di solito la discussione sulla differenza fra Δt e $\Delta\tau$, la definizione di tempo proprio, il suo carattere d'invariante, vengono dopo aver introdotto le trasformazioni di Lorentz.

Ora a mio parere se le trasf. di Lorentz nella scuola secondaria non si nominano affatto, è meglio. Questo non vuol dire che un insegnante non le debba conoscere; ma dal punto di vista didattico sono una strada che crea più difficoltà di quante ne risolva. Arrivare all'invarianza del tempo proprio per via diretta è molto più sicuro, secondo me, che non arrivarci attraverso le trasformazioni di Lorentz. Io non mi preoccupo di spiegare come sono collegati tra loro i Δt, $\Delta t'$, Δx, $\Delta x'$ di due diversi rif., perché per le applicazioni che possiamo fare al livello che c'interessa quelle relazioni non servono. Vedrete che non ne avremo mai bisogno.

Analogamente, mentre non credo che nella fisica della s.s. sia necessario trattare esplicitamente di trasf. di coordinate (traslazioni e rotazioni di assi) penso però che l'idea che le equazioni della meccanica sono legate in qualche modo ai sistemi di coordinate (attraverso il carattere vettoriale di forze, velocità, ecc.) non andrebbe trascurata.

L'analogia che abbiamo vista funziona anche in questo senso: l'idea generale di una geometria dello spazio-tempo è più importante del dettaglio delle equazioni di trasformazione, cioè delle trasf. di Lorentz.

Tempo proprio in un moto qualunque

Prima di vedere perché quanto fatto fin qui spiega il risultato dell'esperimento H–K, occorre ancora un piccolo sforzo di generalizzazione. Finora abbiamo sempre usato la (8–2); ora conviene modificarla. Se v è la velocità dell'orologio a luce, sarà $\Delta x = v\Delta t$, per cui la (8–2) diventa

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{8–6}$$

e infine

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Questa non è che la formula descritta in tutti i libri come “dilatazione del tempo.” Ma anche di dilatazione del tempo e di contrazione delle lunghezze sarebbe bene non parlare. Vedremo infatti che si può andare avanti senza nominarle mai: servono solo a creare difficoltà non necessarie.

Ho scritto la (8–2) nella forma (8–6) perché ho bisogno di generalizzarla al caso di moti non uniformi. Finora abbiamo supposto che il nostro orologio a luce si muovesse, rispetto a un RI, di moto rettilineo uniforme. E se si muove di moto non uniforme, che cosa occorre cambiare?

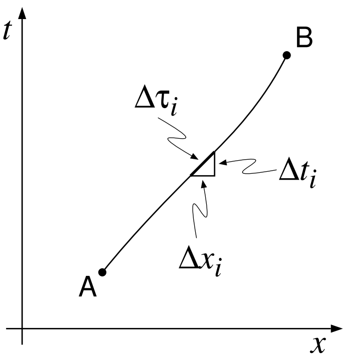

fig. 8–7

È chiaro che per un breve intervallo di tempo (fig. 8–7) si potrà ancora applicare la (8–6), usando naturalmente la velocità istantanea. Dopo di che, la sola cosa da fare è sommare tratto per tratto, ottenendo al limite un integrale. Avremo quindi

$$\Delta\tau = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} dt\,\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}. \tag{8–7}$$

Questo è il tempo proprio segnato da un orologio che si muove di moto qualsiasi.

Non vi sarà sfuggito che finora ho usato solo la coordinata spaziale x, perché consideravo un moto rettilineo e non c'era necessità d'introdurre altre coordinate. Se il moto non è rettilineo, che cosa cambia? Penso di poter arrivare subito al risultato: il cambiamento è solo che nella (8–8) v^2 va inteso come il quadrato del modulo della velocità istantanea, cioè la somma dei quadrati delle componenti.

A dire il vero, quando si passa dal moto uniforme al moto qualsiasi c'è una differenza che non bisogna dimenticare: il moto qualsiasi può essere *accelerato* (di regola lo sarà) e perciò non possiamo essere sicuri che l'orologio si comporti come se l'accelerazione non ci fosse. Ma per fortuna la questione è stata già discussa, in parte poco sopra e in parte nella seconda lezione.

Per un orologio atomico, sappiamo che un'accelerazione avrà effetto trascurabile a meno che non sia veramente grande; d'altra parte un orologio atomico è solo una buona approssimazione di un orologio ideale, che caratterizzeremo in generale come quello che è *del tutto indipendente* dall'accelerazione. In concreto, se qualche esperimento comportasse un'accelerazione così grande da disturbare in modo sensibile anche gli orologi atomici, vuol dire che per quell'esperimento dovremmo usare qualcosa di meglio. Se un orologio migliore non fosse disponibile, dovremmo solo aspettare che venga inventato. . .

Ma l'importante è la nostra ipotesi teorica: in linea di principio non c'è un effetto dell'accelerazione su un orologio, che non sia eliminabile con soli accorgimenti sperimentali. E quindi senza influire sulla teoria.

Possiamo enunciare quest'idea in altro modo, introducendo il concetto di “RI tangente.” Abbiamo un corpo in moto qualsiasi. Considerato un particolare istante t_0 del moto, il corpo ha una certa velocità istantanea $\vec{v}(t_0)$. Chiamo RI tangente a quel moto all'istante t_0 un RI che abbia la velocità *costante* $\vec{v}(t_0)$. Per definizione, il RI tangente a un moto non uniforme cambia da istante a istante; ma è ben definito a ciascun istante.

Ciò posto, l'ipotesi sul comportamento degli orologi è che l'orologio in moto qualsiasi ha lo stesso tempo proprio, intorno all'istante t_0, di un orologio fermo nel RI tangente al moto in t_0. Penso sia anche ovvio che questa definizione è solo per voi: non propongo certo di portarla in classe!

Il tempo proprio come "lunghezza" nello spazio-tempo

Ricordiamo ora che la lunghezza di una curva piana di equazione $y = y(x)$ è data dall'espressione

$$\Delta l = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} dx\,\sqrt{1 + y'(x)^2}. \tag{8–8}$$

Si può arrivare a questo risultato pensando di suddividere la curva in tanti trattini che potremo approssimare con segmenti. Per la lunghezza Δl_i di uno di questi (fig. 8–8) vale

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + {y'_i}^2}$$

per cui la lunghezza totale della spezzata è data da

$$\Delta l = \sum \Delta x_i \sqrt{1 + {y'_i}^2}$$

e al limite si avrà la (8–8).

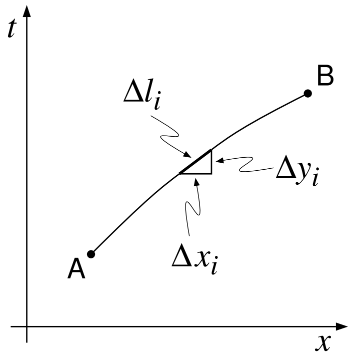

fig. 8–8

Abbiamo a questo punto due espressioni che presentano, dal punto di vista formale, molte analogie: (8–7) e (8–8). La seconda permette il calcolo di un'invariante, che è la lunghezza di una curva, e che avrà dunque lo stesso valore quale che sia il sistema di coordinate. La prima permette il calcolo di un altro invariante: l'intervallo di tempo proprio, cioè l'intervallo di tempo segnato dall'orologio a luce. Anche $\Delta\tau$ deve risultare sempre lo stesso, qualunque sia il rif. in cui lo si calcola.

E ora un chiarimento importante. Noi abbiamo usato l'orologio a luce come esperimento ideale per definire il tempo proprio e per farne vedere l'invarianza, seguendo in questo una strada del tutto tradizionale. Il fatto che si sia usata la luce potrebbe indurre a credere che con ciò abbiamo dimostrato qualche proprietà dello spazio-tempo relativa però solo alla propagazione della luce: ma questo non è affatto vero, come ora vedremo meglio.

Riepiloghiamo sommariamente il ragionamento. Tenendo presente la solita fig. 8–2, e considerando la situazione nel riferimento in cui lo specchio cammina, abbiamo fatto partire la luce da L, riflettersi in S, arrivare in R; poi abbiamo ragionato sul Δx (lo spostamento dello specchio nel tempo che impiega la luce ad andare e tornare) e sul Δt (misurato con un orologio che è fermo in questo riferimento). Così siamo arrivati alla formula fondamentale (8–2).

Occorre mettere bene in evidenza che la (8–2) non si riferisce alla propagazione della luce: è la relazione che lega l'evento "emissione della luce in L" (chiamiamolo "evento L" per brevità) con l'evento R, che è il ritorno della luce. È vero che in questo caso i due eventi significano partenza e arrivo della luce, ma potrebbero riferirsi anche ad altre cose. Niente impedisce di concepire un esperimento nel quale una particella va da L a R in linea retta, nello stesso tempo che impiega la luce riflettendosi sullo specchio. In questo caso gli eventi L e R sarebbero partenza e arrivo della particella.

Quindi sebbene si usi la luce per arrivare alla relazione che c'interessa, ciò non significa che essa vale solo per la propagazione della luce. Quella che abbiamo trovato è una relazione tra la separazione spaziale dei due eventi L e R, la loro separazione temporale, e la loro "distanza," nel senso in cui il tempo proprio è una distanza nello spazio-tempo. Che poi quei due eventi siano l'emissione di un lampo di luce e la sua ricezione, oppure riguardino il moto di una particella che va da un posto all'altro dello spazio, o che si riferiscano ad altre cose ancora, a questo punto non ha più importanza. Siamo perfettamente autorizzati a usare la relazione dimenticando tutto il resto, cancellando lo specchio e ragionando soltanto sull'evento iniziale e sull'evento finale di un qualche fenomeno, che può essere — per esempio — il moto di una particella da L a R.

Del resto abbiamo già fatto uso, in maniera automatica, di questa universalità del nostro risultato, quando abbiamo generalizzato la (8–2) a un moto non uniforme, estendendo la definizione del tempo proprio al caso di un moto vario. Aggiungo che la validità universale del risultato (8–2) si ricava anche dal PR. Detto in modo un po' sbrigativo: se la relazione fra Δt e $\Delta\tau$ vale per un certo esperimento, deve valere per tutti gli esperimenti che connettono gli stessi eventi; altrimenti due fenomeni che hanno la stessa durata Δt in un certo rif. avrebbero durate $\Delta\tau$ diverse in un altro riferimento, e questo renderebbe i rif. non equivalenti.

È anche importante che alla (8–2) si arriva "giocando" solo con un raggio di luce e uno specchio, perché in tal modo ci si serve solo del fatto che la velocità della luce è la stessa in tutti i rif.: è l'unica informazione di cui disponiamo in partenza, e sfruttiamo quella; però una volta arrivati in fondo abbiamo un risultato la cui validità è indipendente dal particolare espediente adoperato per arrivarci.

Il paradosso dei gemelli

È ben noto che nella geometria euclidea tra tutte le curve che uniscono gli stessi due punti, il segmento di retta porta al minimo valore di Δl, che misura la distanza tra i due punti. Quando abbiamo a che fare con un diagramma spazio-tempo, l'arco di curva che unisce i due eventi A e B rappresenta la linea oraria di un moto per il quale A è l'evento *partenza* e B l'evento *arrivo*. Il segmento AB corrisponde a un moto uniforme. Si può dimostrare che (a causa del segno meno sotto radice) $\Delta\tau$ calcolato lungo il moto uniforme non è il minimo, bensì il *massimo* rispetto a quelli calcolati su tutte le altre curve (cioè su tutti gli altri moti possibili) fra gli stessi eventi A e B. Non darò la dimostrazione; come avvio suggerisco di verificare che fra tre punti la disuguaglianza triangolare vale al rovescio che nell'ordinaria geometria di uno spazio euclideo.

Questo risultato c'introduce al famoso *paradosso dei gemelli*. La retta tra A e B (fig. 8–9) rappresenta la linea oraria del gemello fermo a terra, mentre la curva è la linea oraria del secondo gemello. Per quanto detto sopra, $\Delta\tau_1$ ha il valore massimo; $\Delta\tau_2$, sempre minore di $\Delta\tau_1$, ha valori diversi a seconda della legge di moto del secondo gemello. Ciò risolve il paradosso, limitatamente al tempo segnato da un orologio a luce: effettivamente l'orologio in moto segnerà un tempo più breve. Tuttavia parlando d'invecchiamento dei gemelli noi pensiamo a qualcosa di diverso da un orologio; se si vuole, a un "orologio biologico." Sorge allora la domanda: possiamo essere certi che ciò che è vero per un orologio a luce sarà vero per tutti gli orologi, sia meccanici, sia biologici?

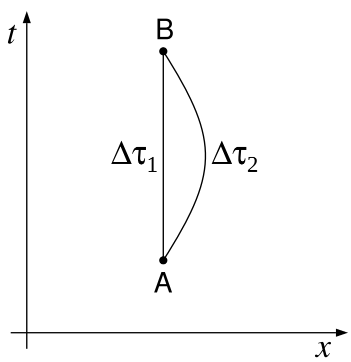

fig. 8–9

Se così non fosse, significherebbe che un orologio a luce e uno di tipo diverso — ad esempio biologico — regolati per andare d'accordo in un certo rif., segnerebbero tempi diversi in un rif. che si muove rispetto al primo. Questo permetterebbe d'identificare un rif. privilegiato, contro il PR. Supponiamo ad esempio che sulla Terra un orologio a luce, un orologio meccanico e uno biologico segnino lo stesso tempo; e che invece, posti su di un'astronave che viaggia a una certa velocità rispetto alla Terra, l'orologio meccanico o quello biologico non presentino, a differenza dell'orologio a luce, l'effetto "gemelli". Allora l'orologio a luce sull'astronave non andrebbe d'accordo con gli altri, e il loro confronto permetterebbe il calcolo della velocità dell'astronave rispetto al rif. terrestre.

Da Newton ad Einstein: breve commento

A questo punto cominciamo ad avere un'idea di che cosa si sia sostituito, nella concezione di Einstein, allo spazio e al tempo assoluti di Newton; è forse il momento d'introdurre qualche commento.

In primo luogo credo si possa dire che mentre per il tempo la rivoluzione è stata prodotta da Einstein, per quanto riguarda lo spazio è avvenuta in modo più graduale: man mano che si sviluppava la meccanica, si chiariva anche il significato della relatività galileiana. Infatti anche nella fisica newtoniana il moto relativo è il solo che conta; perciò, almeno nell'ambito della meccanica, lo spazio assoluto non significa più molto.

Però il problema è ritornato acuto alla fine del secolo scorso, con l'elettromagnetismo: lo spazio assoluto rinasceva quando si parlava di propagazione delle onde e.m. Quando si dice che la velocità delle onde e.m. è c, rispetto a che cosa va misurata questa velocità? Da qui nasce l'idea dell'etere, col che lo spazio assoluto viene concretizzato in un mezzo fisico: quel mezzo che vibra al passaggio delle onde e.m. In un tale ordine d'idee aveva senso dire che un oggetto è fermo rispetto all'etere.

A quel punto la situazione era un po' complessa: finché si parlava di meccanica, dello spazio assoluto si poteva farne a meno; però per le equazioni di Maxwell dello spazio assoluto c'era bisogno, perché occorreva precisare in quale sistema di riferimento erano valide.

Anche prima di Einstein cominciarono a nascere tentativi di soluzione, ad es. da parte di Lorentz: non a caso le trasf. di Lorentz si chiamano così. L'idea che almeno formalmente si potessero salvare le equazioni di Maxwell anche in altri RI era già nata prima di Einstein. Poincaré fa vedere che le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasf. di Lorentz: in questo senso non è più tanto chiaro se l'etere c'è o no. Credo però che a quel tempo si pensasse ancora che quelle trasf. erano solo formali, una proprietà matematica dello spazio assoluto e dell'etere, che restava il mezzo per la trasmissione delle onde. Sono stati poi i diversi esperimenti volti a verificare il moto della Terra rispetto all'etere, che hanno dato il colpo di grazia a questa concezione.

Perciò è difficile cercare un momento preciso in cui lo spazio assoluto cessa di esistere: certamente oggi la sola cosa di cui possiamo parlare è lo spazio-tempo. La questione ha avuto però una ripresa recente, quando sono cominciati gli esperimenti circa l'eventuale anisotropia della radiazione cosmica di fondo, la cui esistenza sembra ripristinare un sistema di riferimento privilegiato. Riprenderemo l'argomento quando avremo i mezzi per discuterlo adeguatamente.

Abbiamo ora tutto quanto occorre per spiegare quantitativamente l'esperimento H–K: ce ne occuperemo nella prossima lezione.

Problemi

1. Sono andato in autostrada da Pisa a Firenze, e ho fatto 50 sorpassi. Di quanto ho allungato il percorso?

2. Calcolare la lunghezza di 1° di parallelo a Siracusa e a Bolzano e valutarne la differenza.

3. Quale sarebbe il risultato di un esperimento di redshift gravitazionale in un satellite in orbita?

4. Stimare l'effetto gemelli in un viaggio di andata e ritorno da Pisa a Firenze in autostrada.

5. Dimostrare che nello spazio-tempo la disuguaglianza triangolare vale in senso opposto che nella geometria euclidea.

Discussione dei problemi

Problema 1. (Sorpassi in autostrada):

I: Il problema si può schematizzare come in fig. 8–10 (ovviamente il rientro in corsia di marcia è simmetrico). Indico con a la larghezza di una corsia, con l il tratto realmente percorso dall'automobile, con d il tratto di autostrada percorso.

Dal teorema di Pitagora:

$$d = \sqrt{l^2 - a^2} = l\,\sqrt{1 - a^2/l^2} = l\,\sqrt{1 - v_\mathrm{t}^2/v^2}$$

dove v_t è la velocità trasversale e v la velocità dell'automobile. Se v fosse la velocità della luce si avrebbe qualcosa di simile alla contrazione di Lorentz.

F: Perché volere per forza far venire una formula analoga a quelle della relatività? Non era questo lo scopo del problema: si chiede un risultato numerico concreto... Inoltre non torna bene, perché questa è geometria euclidea. Io avrei scritto $l = d\sqrt{1 + a^2/d^2}$.

I: Venendo ai numeri, vediamo la stima di l. Si può supporre che tutti i sorpassi vengano fatti con la stessa velocità trasversale, anche se la schematizzazione è grossolana. Si può pensare che sia costante il rapporto, cioè anche variando la velocità dell'auto io faccio sempre lo stesso angolo nell'iniziare il sorpasso (e nel rientro). Per la valutazione di d, penso si debba tener conto della distanza di sicurezza fra i veicoli, e quindi conta la velocità relativa dei due mezzi (chi sorpassa e chi è sorpassato) ed eventualmente anche i tempi di reazione.

F: Non sono molto convinto di tutto questo. Ciò che conta è v_t e quindi lo stile di guida: se io esco bruscamente dalla mia corsia oppure lentamente. Se uno davanti a me va piano io uscirò prima, non più rapidamente. Perché devo cambiare il mio stile di guida?

Per arrivare a un numero occorre dare una stima delle grandezze in gioco. È vero che nessuno fa sorpassi tutti uguali, ma lo scopo del problema è quello di calcolare di quanto in realtà si allunga il tragitto: se sono metri, chilometri o altro.

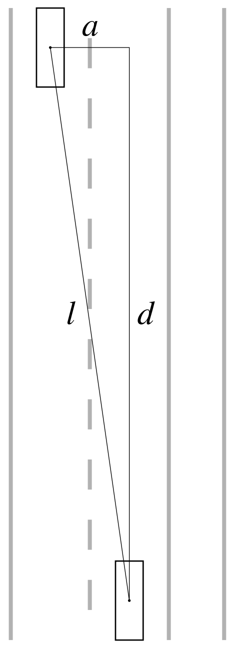

fig. 8–10

I: Io avevo fatto i calcoli con la mia distanza di sicurezza ed avevo trovato che si otteneva un allungamento di 10 metri in tutto, ammettendo di aver fatto 50 sorpassi.

F: Sono cento triangoli fra uscita ed entrata quindi ognuno contribuisce per 10 centimetri.

Altro intervento: Io avevo ottenuto 150 metri facendo ipotesi diverse: ipotizzando un angolo di uscita di 30°.

F (e altri): Ritengo poco probabile un angolo di 30°: a 80 km/h significa una velocità trasversale di 40 km/h; se la larghezza della corsia è 4 metri, il cambio di corsia viene fatto in meno di mezzo secondo... Comunque quanto veniva il rapporto v_t/v?

I: Non avevo proprio calcolato v_t/v ma altre cose; ma all'incirca veniva 1 m/s rispetto a 33 m/s quindi un rapporto 1/33. Inoltre avevo fatto calcoli per trovare formule per la distanza di sicurezza ... il rapporto dipende dalla distanza di sicurezza.

F: Io avevo dato questo problema per far vedere che se in 100 km con i sorpassi allungo di 10 metri, il contachilometri non se ne accorge. Analogamente nello spazio-tempo: se la velocità del corpo è piccola rispetto a quella della luce, nella formula del tempo proprio il termine che darebbe la correzione relativistica è piccolissimo. Questo spiega come mai nella fisica fino a questi tempi non abbiamo avuto bisogno di preoccuparci, con gli orologi che avevamo a disposizione, che la lunghezza della curva oraria e quindi la misura del tempo proprio dipende dal percorso, e non solo dagli estremi. Nel caso Pisa-Firenze le variazioni di lunghezza sono tranquillamente trascurabili.

I: Io avevo fatto una cosa molto più brutale: avevo considerato la lunghezza minima (senza sorpassi) e quella massima considerando lo spostamento di corsia ad angolo retto. Anche in questo caso l'allungamento sarebbe valutabile in 500 metri. Con dati diversi sulla corsia (2.5 m) l'allungamento veniva 62.5 cm quindi molto poco.

F: Si può osservare che il termine v_t/v è molto minore di 1, per cui si può sviluppare in serie, ottenendo

$$d \simeq l\left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right) \qquad l - d = \frac{a^2}{2l}.$$

Problema 2. (Grado di parallelo):

F: Supponiamo che all'ingrosso il raggio equatoriale della Terra sia 6400 km; come latitudine di Siracusa prendiamo 36°, per Bolzano 46.5°. Allora 1° all'equatore è $6400 \cdot 2\pi/360 = 111.7\,\mathrm{km}$.

Invece 1° a Siracusa è lungo

$$111.7 \times \cos 36^\circ = 90.4\,\mathrm{km}$$

e a Bolzano

$$111.7 \times \cos 46.5^\circ = 76.9\,\mathrm{km}.$$

La differenza è di 13.5 km: come vedete è notevole. La prossima volta vedremo a che cosa serviva calcolarla.

Problema 3. (Redshift gravitazionale in orbita):

I: Partiamo dalla formuletta della volta scorsa per il redshift: h è l'altezza della cabina dove devo fare l'esperimento. Questo è un rif. localmente inerziale: se non vi fosse gravità non vi sarebbe redshift; ma tra pavimento e soffitto vi è un residuo di gravità che ottengo differenziando g:

$$g = -\frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{2GM}{R^3}\,dR.$$

Poiché sono in un rif. in caduta libera, se g ad es. è zero sul pavimento, sul soffitto ottengo $2GMh/R^3$.

F: Voglio sentire qualche obiezione, in particolare sulla sostituzione di dR con h. Io ho un satellite in caduta libera: il suo baricentro (supponiamo il centro) ha gravità 0. Cosa succede se mi metto in A o in B (fig. 8–11) o in un punto intermedio?

I: In A avrò $(0 + dg) = GMh/R^3$ e in B

$$(0 - dg) = -GMh/R^3;$$

in C, $(0 + dg/2)$, ecc.

F: Quindi rispetto allo stesso esperimento sulla terra c'è una differenza importante: il campo gravitazionale non è uniforme, addirittura cambia verso passando per il centro.

I: Ma se io considero 0 in basso e dg in alto ...

F: Però il campo cambia lo stesso ...

I: Ma in prima approssimazione io prendo il valore medio ...

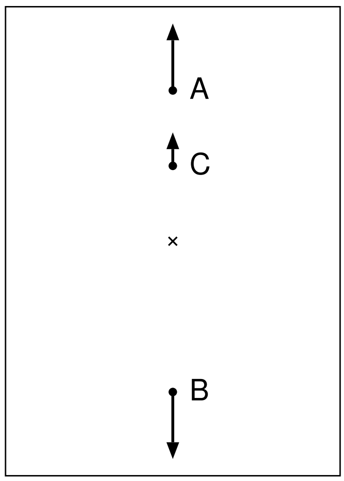

fig. 8–11

F: Lo zero del campo gravitazionale non è una convenzione che si prende dove pare a noi, come si fa per il potenziale: lo zero si trova nel centro del satellite. Abbiamo un campo gravitazionale che cresce man mano che mi allontano dal centro. Una pallina in B si sposterà verso il basso; una in A si muoverà verso l'alto. Potrei prendere il valor medio, ma in questo caso è zero; avrò un effetto di un segno mentre vado dalla base al centro e un effetto contrario dal centro al soffitto.

Anzi, l'osservazione del potenziale mi porta a dire un'altra cosa che avevo tralasciata: gh come lo posso chiamare? È la differenza di potenziale gravitazionale tra i due punti che si vanno a considerare, fra trasmettitore e ricevitore. E quindi si può dimostrare che l'effetto di redshift dipende dalla differenza di potenziale gravitazionale tra i punti di partenza e arrivo.

Se noi poniamo un sistema di coordinate con 0 nel centro e z verso l'alto, sostituendo dR con z posso ricavarmi il potenziale, integrando. Cosa troverò calcolando il potenziale in B e in A? Basta fare l'integrale e si ottiene GMz^2/R^3.

Se calcolo la differenza fra il potenziale in A e in B ottengo 0, perché c'è z^2 (pari). Quindi se metto il trasmettitore sul pavimento e il ricevitore sul soffitto non vedo niente, perché ho una variazione di frequenza di un segno nella prima parte del percorso ed una di segno contrario nella seconda parte. Se invece metto un trasmettitore nel centro e un ricevitore sul soffitto, l'effetto c'è.

Calcoliamoci la differenza di potenziale: otteniamo $GMh^2/4R^3$ (la distanza è $h/2$). Questo lo si sostituisce al posto di gh nella formula del redshift e si trova

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{GM\,h^2}{4c^2R^3} = \frac{g\,h^2}{4c^2R} = \frac{gh}{c^2}\,\frac{h}{4R}.$$

Il primo fattore è come quello sulla Terra, e il secondo è dell'ordine di 10^{-6}. Quindi in linea di principio l'effetto c'è anche su un satellite, ma è molto più piccolo.

Conclusione: l'esperimento si può fare, ma invece che 10^{-16} per metro come sulla Terra avremo un effetto dell'ordine di 10^{-22} e questo non lo possiamo vedere, perché non abbiamo strumenti di sensibilità sufficiente. Si spiega quindi che l'esperimento non sia ancora stato fatto, e forse neppure pensato.

Comunque vedrete che ci servirà il risultato qualitativo: l'osservazione che un effetto di redshift, per quanto piccolo, c'è sempre: la gravità non si può eliminare completamente.

Problema 4. (Effetto gemelli da Pisa a Firenze):

F: Qualcuno ha provato a fare il conto?

Voci: Supponendo $v = 60\,\mathrm{km/h}$ viene $\Delta\tau = 10^{-12}\,\mathrm{s}$.

F: Fatemi fare alcune osservazioni a carattere generale — o didattico, se preferite. La risoluzione di questo problema è banale, perché è solo necessario applicare delle formule e sostituire i numeri; ma è importante che si acquisti familiarità con gli ordini di grandezza, perché a volte un risultato è piccolo ma osservabile e misurabile, mentre a volte è piccolo e non misurabile, come in questi ultimi due casi.

Un secondo aspetto riguarda il prendere pratica su come fare questi conti. Anche se richiedono solo di applicare una formuletta, hanno un carattere un po' nuovo, chi non li abbia mai visti deve imparare come farli. Non si devono dare solo questi problemi, perché sarebbe fare della fisica stupida, ma si devono fare anche questi, perché solo se si ha familiarità con conti del genere si possono fare ragionamenti più sofisticati e affrontare problemi più sofisticati.

Problema 5. (Disuguaglianza triangolare):

Va detto anzitutto che l'enunciato del problema non è preciso. Bisognava dire:

"Se A, B, C sono tre punti dello spazio-tempo, disposti in modo che i tre segmenti AB, BC, AC rappresentano moti uniformi con velocità minore di c (quelli che brevemente si chiamano 'vettori di tipo tempo') allora

$$\Delta\tau_{\mathrm{AB}} + \Delta\tau_{\mathrm{BC}} \leq \Delta\tau_{\mathrm{AC}} \tag{8–9}$$

e il segno = vale se e solo se B appartiene ad AC."

Dato che i due membri della (8–9) sono entrambi positivi, dimostrare la (8–9) equivale a dimostrare quella che ottiene innalzando a quadrato:

$$\Delta\tau^2_{\mathrm{AB}} + \Delta\tau^2_{\mathrm{BC}} + 2\,\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \leq \Delta\tau^2_{\mathrm{AC}}$$

ossia, usando la definizione (8–2) del tempo proprio

$$\begin{aligned}(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2 - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})^2 - (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}})^2 + 2\,\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \leq \\ (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}})^2 - (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}})^2.\end{aligned}$$

Questa si semplifica tenendo conto che

$$t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}} = (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}) + (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})$$

e analoga per le x. Si arriva a

$$\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \leq (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}) - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}).$$

È di nuovo lecito innalzare a quadrato, poiché entrambi i membri sono positivi, e semplificando si trova

$$\begin{aligned}(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})^2\,(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2\,(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}})^2 \geq \\ 2\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}).\end{aligned} \tag{8–10}$$

La (8–10) è sempre soddisfatta, e il segno = si ha se e solo se

$$(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}) = (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})$$

ossia se e solo se i tre punti A, B, C sono allineati, e disposti in quest'ordine.