Il libro "Per un insegnamento moderno della relatività" *risale al lontano* 1989 *e non credo sia più disponibile. Sotto molti aspetti esso è superato dal* "Quaderno 16" *apparso nel* 2005 *e che può anche essere trovato in*

`http://www.sagredo.eu/Q16`

Tuttavia alcuni argomenti non sono stati riprodotti nel Q16: *tra questi la "seconda dimostrazione"* di *Einstein del redshift gravitazionale. Mi è quindi sembrato utile stralciare in questo file i capitoli* 13, 14, 15 *del vecchio libro.*

Elio Fabri

Pisa, novembre 2014

CAPITOLO 13

La curvatura dello spazio-tempo e il redshift gravitazionale

Spesso si suole citare esperimenti come quello di Briatore e Leschiutta sotto il titolo di “redshift gravitazionale”, sebbene la denominazione a rigore sia impropria. Tuttavia una connessione esiste, e ora vogliamo discuterla.

Per cominciare, è opportuno ricordare un po' la storia. L'esperimento di Briatore–Leschiutta è del '75, e in generale esperimenti come questo si fanno da meno di vent'anni; la previsione di Einstein del redshift gravitazionale è del 1911. Che cosa era successo nel frattempo? I primi dati sperimentali risalgono al '60; quindi per una cinquantina d'anni non ci sono state verifiche sperimentali significative della previsione di Einstein. Inoltre l'esperimento del '60 si riferisce a una situazione diversa, in cui non si lavora con gli orologi: quello del '60 è un vero e proprio esperimento di redshift gravitazionale.

Si parla di redshift gravitazionale quando la radiazione emessa in un certo posto viene osservata in un posto situato ad altezza diversa. Per es., se si mette un ricevitore in cima a una torre, e una sorgente di radiazione al piano terra, si trova che la radiazione ricevuta ha una frequenza minore di quella emessa. Il termine “redshift” è preso in prestito dall'ottica della luce visibile: vuol dire “spostamento verso il rosso”. Se infatti la luce emessa è gialla, non arriva veramente rossa, perché l'effetto è molto piccolo; però la frequenza diminuisce e la lunghezza d'onda aumenta, cioè va verso il rosso.

Tornando all'esperimento di Briatore–Leschiutta, prima di tutto c'è da vedere perché lo si può considerare anche come un esperimento di redshift.

Supponiamo che il nostro laboratorio 1 emetta non un segnale orario, ma un treno d'onde monocromatico: onde di una determinata frequenza ν_1; e ne emetta un certo numero, N_1. Poiché l'esperimento dura un tempo $\Delta\tau_1$, potremo scrivere $N_1 = \nu_1 \Delta\tau_1$. Le onde vengono ricevute in 2, e il ricevitore può contare le creste d'onda: il numero di onde ricevute è uguale al numero di onde trasmesse, $N_2 = N_1$ (questo fatto non è così banale come sembra: ci torneremo più avanti).

La frequenza ricevuta sarà legata con la stessa formula all'intervallo di tempo totale segnato dall'orologio ricevente: $N_2 = \nu_2 \Delta\tau_2$. E siccome $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$, è chiaro che $\nu_2 < \nu_1$. Quindi se invece di fare misure con l'orologio si usa un frequenzimetro (che poi è un orologio usato in un'altra maniera) l'esperimento verrà descritto in quest'altro modo: le onde emesse con una certa frequenza ν_1 sono state ricevute con frequenza $\nu_2 < \nu_1$. Quanto minore, è facile vederlo: $\nu_2/\nu_1 = \Delta\tau_1/\Delta\tau_2$, e mettendo i dati dell'esperimento si trova che la variazione relativa è $4 \cdot 10^{-13}$. Naturalmente, per poter misurare davvero la variazione di frequenza, bisogna disporre di un segnale stabile almeno con una tale precisione, e di un frequenzimetro sufficientemente sensibile.

Dunque l'esperimento fatto con gli orologi atomici è la stessa cosa dell'esperimento di redshift: non si tratta di due fenomeni diversi, ma di due maniere diverse di rivelare lo stesso effetto fisico. Ecco perché spesso si parla di redshift anche nel primo caso, sebbene in quell'esperimento non si misurino frequenze, ma solo intervalli di tempo.

Come ho già detto, gli esperimenti di redshift sono anteriori di 10÷15 anni a quelli con gli orologi atomici: il primo è stato fatto nel 1960 da Pound e Rebka.

L'esperimento di Pound e Rebka

In una torre alta 25 m (fig. 13–1) E è un emettitore di radiazione, di frequenza ben determinata; R un ricevitore capace di misurare con grande precisione la frequenza ricevuta. Pound e Rebka usarono l'effetto Mössbauer, che era stato scoperto poco prima (Mössbauer per quella scoperta ottenne il premio Nobel). Si tratta di un effetto di fisica dei solidi, sul quale non ci possiamo soffermare. Ai nostri scopi basta dire che in opportune condizioni l'emissione di raggi γ da nuclei legati in un reticolo cristallino ha una frequenza estremamente precisa. Si usa di solito il ^{57}Fe, che emette radiazioni γ di energia circa 14 keV.

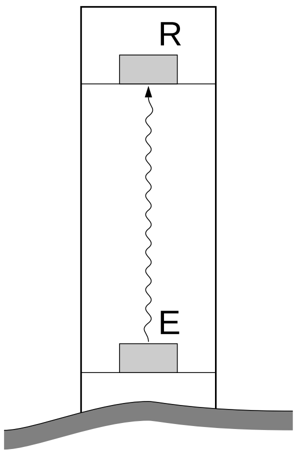

fig. 13–1

L'effetto è naturalmente molto piccolo, perché il dislivello è di soli 25 m: a conti fatti si trova circa $3 \cdot 10^{-15}$. Perché non si sono usati 3000 m, come nell'esperimento di Briatore e Leschiutta? Il fatto è che il percorso della radiazione dev'essere nel vuoto, per evitare l'assorbimento; e non è facile fare il vuoto in una torre alta 3000 m.

Si può osservare che la stessa variazione relativa di frequenza si avrebbe anche con la luce visibile, con i raggi X, con le microonde: con qualunque tipo di radiazione elettromagnetica. Il problema è di trovare una sorgente sufficientemente monocromatica e un rivelatore sufficientemente sensibile alle variazioni di frequenza. Per esempio, un laser non basterebbe, perché non ha un grado di monocromaticità di questo ordine, e per la stessa ragione non esiste ancor oggi un rivelatore nel visibile capace di sentire variazioni di frequenza così piccole. Ecco perché la scelta di Pound e Rebka cadde sui raggi γ e sull'effetto Mössbauer.

L'esperimento ha verificato entro l'1% la previsione di Einstein del 1911, della quale parleremo più avanti.

Sebbene l'esperimento di Pound e Rebka sia storicamente precedente a quello di Briatore e Leschiutta, quest'ultimo è molto più diretto — anche per il tipo di tecniche che usa — e quindi più facile da capire: ecco perché conviene dargli la precedenza dal punto di vista didattico.

Deduzione del redshift gravitazionale

Il redshift gravitazionale è una delle cosiddette "prove classiche" della relatività generale, cioè quelle indicate dallo stesso Einstein (le altre due sono la deflessione gravitazionale della luce e la precessione del perielio di Mercurio). Il ragionamento che faremo per ricavarlo non richiede nozioni avanzate o calcoli complicati, ma è necessaria la massima chiarezza della linea logica.

Ci sono fondamentalmente due modi di spiegare il redshift gravitazionale: uno basato sul principio di equivalenza, e l'altro che sfrutta l'inerzia dell'energia. Il secondo consiste in un esperimento ideale, col quale si fa vedere che se non ci fosse il redshift gravitazionale si potrebbe ottenere un moto perpetuo, cioè si avrebbe produzione di energia gratis. Sebbene questa spiegazione sia forse più bella, non ne parlerò subito, perché ritengo più importante mettere in evidenza la stretta coerenza del discorso geometrico: per questo motivo mi soffermerò prima sulla spiegazione che usa il principio di equivalenza.

Prima deduzione: dal principio di equivalenza

Il principio di equivalenza ci dice che tutto ciò che possiamo vedere in un campo gravitazionale lo troveremo tale e quale in un riferimento che sia lontano da masse — e quindi senza campo gravitazionale — ma non inerziale, cioè accelerato. Dunque gli stessi effetti che abbiamo visto sulla superficie della Terra — l'esperimento di Briatore e Leschiutta, quello di Pound e Rebka — li vedremmo succedere se rifacessimo questi esperimenti in un'astronave lontana dal sistema solare e da qualunque stella della Galassia, ma che viaggi rispetto a un riferimento inerziale con un'accelerazione g.

Conviene perciò pensare a tre laboratori, e ai tre riferimenti ad essi associati. Uno, che chiamiamo K^0, è il riferimento inerziale di Newton, lontano da tutte le masse e senza campo gravitazionale. Un riferimento accelerato sarà definito per confronto con K^0. Abbiamo poi il riferimento K^1, che si muove rispetto a K^0 con accelerazione g verso l'alto. Infine prendiamo il nostro riferimento sulla Terra, che chiamiamo K. Il riferimento K^0 ci serve perché è inerziale, e noi supponiamo di sapere come vanno le cose in un riferimento inerziale. K^1 ci serve perché è equivalente a K: il principio di equivalenza dice che tra K e K^1 non c'è nessuna differenza, che il fisico che fa esperimenti in K^1 troverà gli stessi risultati del fisico che li fa in K. Se ciò è vero, e se in K esiste il redshift gravitazionale, anche l'esperimento fatto in K^1 deve mostrarci il redshift gravitazionale, e viceversa.

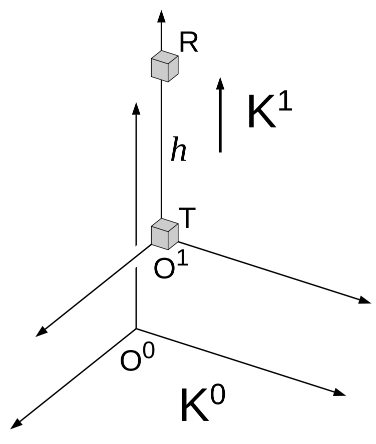

fig. 13–2

Vediamo perciò cosa succede se si fa l'esperimento di Pound e Rebka nel riferimento K^1. Nell'origine O^1 di K^1 (fig. 13–2) mettiamo il trasmettitore T, che emette radiazione verso l'alto; a una certa altezza h sistemiamo un ricevitore R, che riceve la radiazione emessa da T. Per prevedere quello che accadrà ci appoggeremo al fatto che esiste un riferimento di cui conosciamo già la fisica: il riferimento K^0. Quindi descriveremo l'esperimento come lo vede chi sta in K^0, e poi ne ricaveremo che cosa vedrà il fisico che fa l'esperimento in K^1.

Scegliamo le condizioni in modo che all'istante $t = 0$ i due riferimenti abbiano le origini coincidenti e per di più abbiano la stessa velocità, cioè K^1 risulti in quiete rispetto a K^0. Siccome K^1 è accelerato, questa quiete cessa immediatamente, e K^1 parte verso l'alto con una velocità sempre crescente: $v = gt$. Disponiamo inoltre l'esperimento in modo che il trasmettitore emetta il suo treno d'onde all'istante 0, cioè quando i due riferimenti K^1 e K^0 sono fermi l'uno rispetto all'altro. Quindi il treno d'onde parte quando i due riferimenti sono coincidenti e il trasmettitore occupa l'origine di entrambi. Il treno d'onde sia emesso con una frequenza ν. Dato che in quel momento K^1 e K^0 sono in quiete relativa, ν è la frequenza in entrambi i riferimenti.

Il fisico in K^0 vede questo treno d'onde che parte verso l'alto con velocità c. Vede poi il ricevitore R che viaggia anch'esso verso l'alto con una velocità progressivamente crescente: $v = gt$. Dopo quanto tempo il segnale raggiunge il ricevitore?

Facciamo un calcolo approssimato, nell'ipotesi che g sia abbastanza piccola, e così pure la lunghezza h: allora il tempo che impiega la luce per andare da T a R è piccolissimo, e di conseguenza la velocità di K^1 è ancora piccola rispetto a c. Anche lo spazio percorso da R sarà piccolissimo, e quindi quello percorso dalla radiazione sarà praticamente h.

In queste ipotesi il tempo richiesto è $t = h/c$: in sostanza abbiamo trascurato lo spostamento del ricevitore nel tempo t. Però non possiamo trascurarne la velocità: al termine di questo tempo t il ricevitore ha velocità $v = gh/c$. Il fatto è che il ricevitore ha il suo apparato di misura della frequenza, e un ricevitore che fugge davanti alla radiazione con la velocità gh/c non vedrà più la frequenza ν. Sempre nell'approssimazione di piccola velocità, la variazione relativa di frequenza (in valore assoluto) sarà v/c, cioè gh/c^2. Naturalmente la frequenza diminuisce; quindi avremo

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}. \tag{13–2}$$

Notate che questo non è un effetto "apparente", cioè qualcosa che si vede in una maniera o in un'altra a seconda di chi guarda. Noi abbiamo un ricevitore, eventualmente dotato d'indicatore digitale, e magari anche di un apparato di registrazione delle misure: alla fine dell'esperimento ci facciamo stampare i risultati, poi prendiamo il foglio di carta e lo leggiamo. Poiché lo strumento sta correndo davanti alla radiazione, misurerà una frequenza più bassa, e questo potremo leggerlo nero su bianco alla fine dell'esperimento.

Quindi il signor K^0 può anticipare al signor K^1: "se tu fai l'esperimento di Pound e Rebka, troverai un redshift dato dalla (13–2)". Notate che per questa prima previsione non abbiamo usato altro che la cinematica del moto uniformemente accelerato e l'effetto Doppler.

Però, dal momento che Einstein ha informato tutti e due i nostri amici sul principio di equivalenza, essi si sentiranno autorizzati a dire che anche nel riferimento K succede la stessa cosa: poiché il riferimento K^1 deve equivalere a tutti gli effetti fisici al riferimento K, l'esperimento di Pound e Rebka sulla Terra deve dare lo stesso risultato che dà in K^1, espresso dalla (13–2).

Tra parentesi: dalla dimostrazione si vede che la (13–2) è corretta a condizione che gh/c^2 sia molto minore di 1. La formula rigorosa sarebbe più complicata, e non vale la pena di discuterla.

Ci si potrebbe chiedere che cosa succede del nostro ragionamento se il riferimento K^1 invece di muoversi di moto accelerato rispetto a K^0 si muove di moto uniforme (è sempre molto istruttivo, per verificare se un ragionamento è corretto, rifarlo cambiando qualcuna delle ipotesi).

Ricordiamo che il trasmettitore sta nell'origine del riferimento K^1, e il ricevitore sta a un'altezza h, sempre in K^1. Ora però non posso più dire che in K^0 il trasmettitore è fermo: non è mai fermo, perché K^1 si muove di moto uniforme. Per capire che cosa succede occorre distinguere le frequenze misurate in K^0 da quelle misurate in K^1. Introduciamo allora degli indici: chiamiamo ν_1^1 la frequenza emessa, misurata in K^1; ν_1^0 la frequenza misurata in K^0. Siccome il trasmettitore si muove nello stesso verso in cui emette radiazione, avremo $\nu_1^0 > \nu_1^1$, a causa dell'effetto Doppler; più precisamente, in un'approssimazione al primo ordine in v/c, sarà

$$\nu_1^0 = \nu_1^1 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Ragionando in K^0, questa è la frequenza che è stata emessa dal trasmettitore. L'onda viaggia conservando la sua frequenza, e arriva in vicinanza del ricevitore con la stessa frequenza $\nu_2^0 = \nu_1^0$. A questo punto, volendo sapere quale frequenza vede il ricevitore, occorre di nuovo tener presente l'effetto Doppler. Poiché il ricevitore si sta muovendo nello stesso verso della radiazione, avrò

$$\nu_2^1 = \nu_2^0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

e di qui segue che $\nu_2^1 = \nu_1^1$, a meno di termini di secondo ordine in v/c (in realtà ν_2^1 è proprio uguale a ν_1^1, se si usano le formule relativistiche per l'effetto Doppler).

Il risultato è tutt'altro che strano: basta ragionare dal principio alla fine in K^1 — che ora è un riferimento inerziale — senza tirare in ballo K^0. Nel caso che K^1 sia accelerato ciò non è possibile, e la velocità di K^1 rispetto a K^0 cambia tra il momento in cui si trasmette e quello in cui si riceve: di qui il redshift.

CAPITOLO 14

Parentesi didattica

Prima di passare alla seconda deduzione, mi sembra opportuna una premessa. Può sembrare che per dare una spiegazione semplice del redshift basti dire che la luce salendo in un campo gravitazionale perde energia. Sebbene questa suoni come una sintesi efficace del ragionamento di Einstein che stiamo per esaminare, ne differisce radicalmente, perché si presta a equivoci intorno al "peso della luce", ecc. Ecco un ottimo esempio di un argomento che può avere diverse presentazioni, più o meno corrette; o quanto meno, più o meno pericolose. Vorrei perciò spiegare che cosa intendo per "pericolose".

La relatività è di per sé un argomento "pericoloso", cioè un campo dove è facile credere di aver capito quando invece non si è capito. Per lo stesso motivo, vedendo la cosa dal lato di chi insegna, può benissimo accadere di dire cose giuste, ma pericolose: nel senso che si prestano molto facilmente ad essere capite a rovescio. Ne segue che ci sono presentazioni quasi equivalenti, una delle quali è poco consigliabile perché induce facilmente in errore. Chi insegna non può assumere che coloro a cui parla abbiano già idee chiare. Il primo comandamento didattico dovrebbe quindi essere: *non indurre in confusione.*

Insisto che una presentazione "pericolosa" non è detto che sia sbagliata: è solo da sconsigliare per le ragioni che ho spiegato. La radiazione che perde energia perché fa lavoro contro la gravità è di questo tipo. Si può fare un discorso che sembra tale e quale, mentre non incorre negli stessi pericoli: è quello che — seguendo da vicino Einstein — mi accingo a esporre.

Seconda deduzione: dall'inerzia dell'energia

Prendiamo due oggetti A e B, inizialmente tutti e due al livello del mare. Da qui comincia l'esperimento ideale di Einstein, che possiamo dividere in quattro fasi:

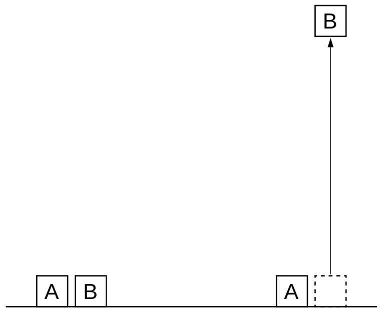

fig. 14–1

FASE 1. Si alza B fino alla quota h (fig. 14–1). Fin qui siamo sul solido terreno della fisica newtoniana, non ci sono pericoli. Il lavoro che occorre spendere per fare questa operazione è $m_{\mathrm{B}}gh$.

FASE 2. A emette un pacchetto di radiazione, un lampo di luce di energia ε, che viene assorbito da B (fig. 14–2). Poiché A ha perso l'energia ε, avrà dovuto tirarla fuori in qualche modo. Può darsi che contenga delle batterie per accendere la lampadina; o magari ci sarà nascosto un ometto, che fa girare una dinamo pedalando: comunque sia, alla fine della fase 2 l'energia di A è diminuita di ε.

B riceve la radiazione emessa da A. Tutto il problema è: quanta energia riceve? Facciamo vedere che l'ipotesi ingenua che B riceva la stessa energia che ha perso A, cioè l'energia ε, ci porta a un moto perpetuo di prima specie.

Se B riceve l'energia ε, necessariamente la sua massa aumenta: da m_B, che era prima, diventa

$$m'_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} + \frac{\varepsilon}{c^2}$$

(e questo, come abbiamo visto, non equivale a dire che il pacchetto di radiazione si porta appresso una massa ε/c^2: la massa non è additiva!)

FASE 3. Si riporta B accanto ad A (fig. 14–3). Si ricava un lavoro $L' = m'_\mathrm{B}gh$, che è maggiore di quello che abbiamo dovuto fare per sollevare B. La differenza è

$$L' - L = m'_\mathrm{B}gh - m_\mathrm{B}gh = \frac{\varepsilon gh}{c^2}.$$

A questo punto B è tornato accanto ad A e ha sempre la massa m'_B.

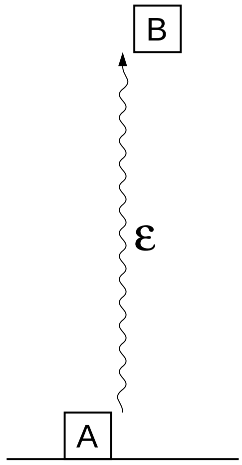

fig. 14–2

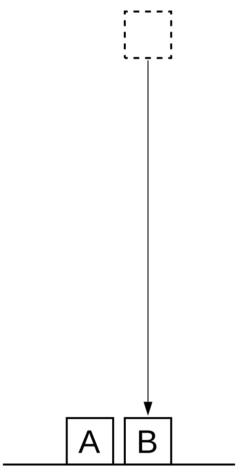

fig. 14–3

FASE 4. B restituisce ad A l'energia ricevuta, di nuovo emettendo radiazione: con ciò la sua massa ritorna m_B. A riprende l'energia che aveva prestato: ricarica la pila e ritorna nello stato iniziale.

Il punto essenziale è di essere sicuri che alla fine tutto il sistema sia tornato esattamente com'era all'inizio. A ha riacquistato l'energia emessa; B si è spostato verso l'alto, ha acquistato energia, è risceso giù, ha restituito l'energia che aveva acquistato. Alla fine non è cambiato niente, però noi abbiamo guadagnato un po' di energia: esattamente $\varepsilon gh/c^2$.

Questa è la bellezza del ragionamento di Einstein. Tutto è semplice come $2 + 2 = 4$, e viene da dirsi: "come ho fatto a non pensarci prima?"

Ora però bisogna trovare una maniera di aggiustare la cosa. È chiaro che in qualche punto abbiamo sbagliato. Forse l'errore è stato quello di supporre che B riceva la stessa energia ε emessa da A; proviamo allora a modificare quest'ipotesi. Diciamo che B non riceve l'energia ε ma un'energia ε', per il momento da determinare, e che poi risulterà minore di ε. Allora

$$m'_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} + \frac{\varepsilon'}{c^2}.$$

Il resto va come prima, ma attenzione: adesso sarà

$$L' - L = m'_\mathrm{B}gh - m_\mathrm{B}gh = \frac{\varepsilon' gh}{c^2}.$$

Non solo, ma ora B non può restituire ad A l'energia ε, perché ne ha avuta di meno; quindi A ha ancora un credito di energia pari a $\varepsilon - \varepsilon'$. Questa differenza la dobbiamo fornire noi, perché altrimenti A non potrà tornare allo stato iniziale. Siccome noi abbiamo messo da parte una certa quantità di energia, che è $\varepsilon' gh/c^2$, tutto va bene se questa compensa esattamente il credito di energia di A, cioè se

$$\varepsilon - \varepsilon' = \frac{\varepsilon' gh}{c^2}$$

da cui si ottiene

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + gh/c^2}.$$

Fin qui non abbiamo fatto nessuna approssimazione; in particolare non abbiamo supposto che h fosse piccolo. È solo necessario che il campo gravitazionale sia uniforme, in maniera che il lavoro sia dato semplicemente dalla forza moltiplicata per lo spostamento.

A questo punto entrano in gioco i fotoni. Il pacchetto che è stato scambiato in andata e in ritorno è fatto di fotoni, e il numero di fotoni perduti da A è uguale al numero di quelli ricevuti da B. Quindi l'energia per fotone è nello stesso rapporto delle energie totali, e siccome l'energia di un fotone è proporzionale alla frequenza, ne segue per la frequenza ricevuta ν':

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + gh/c^2}.$$

Se ora supponiamo gh/c^2 piccolo possiamo anche scrivere

$$\nu' = \nu(1 - gh/c^2)$$

cioè

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2},$$

come avevamo già trovato per l'altra strada.

Conservazione e continuità

Osservate che qui è essenziale che si conservi il numero dei fotoni, come prima ci era servito che si conservasse il numero di periodi dell'onda. Per questo tipo di conservazione c'è una ragione fondamentale, in certo modo di carattere matematico: un argomento di continuità.

Il numero di periodi è un numero intero. Se cambia, di quanto può cambiare? O ne salta uno, o due, o tre. Ma dove avverrà questo salto, strada facendo fra il trasmettitore e il ricevitore? Bisognerebbe ammettere qualche fenomeno discontinuo. Se misuriamo il numero di periodi subito accanto al trasmettitore, poi un centimetro più in là, poi ancora un centimetro più in là, e così via, a un certo punto dovremo trovare che di colpo se n'è perduto uno.

Lo stesso discorso si può fare per il numero di fotoni. Supponiamo che in partenza siano 100: se ne arrivano 99, dove s'è perso il centesimo? Se io guardo solo il numero alla partenza e all'arrivo, ne trovo uno di meno e non c'è niente di strano. Ma se seguo passo passo il percorso dei fotoni, posso fare dei passi piccoli quanto voglio, dal trasmettitore al ricevitore: qual è il punto in cui improvvisamente ne perdo uno? Perché proprio lì? Per quanto ne sappiamo, la propagazione della luce è continua, nel senso che tutti i punti dello spazio sono equivalenti, tutte le grandezze devono variare con continuità; ma un numero intero non può variare con continuità.

Questa è l'unica spiegazione seria che si può dare. E notate che un tale discorso capita spesso: per esempio, anche quando si studia l'effetto Doppler. Per vedere come cambia la lunghezza d'onda si può dire: il numero di onde è quello che è, solo che lo spazio in cui si trovano quelle onde è cambiato; allora la lunghezza d'onda dev'essere cambiata in proporzione. Perché il numero di onde resta quello? Perché è un numero intero.

Commento finale sulle due dimostrazioni

Vorrei ancora osservare che in tutto il ragionamento non ho mai detto che la radiazione perde energia perché fa lavoro contro la gravità. Se si dice questo, si tira in ballo la massa dei fotoni, che come sapete è nulla... Invece qui la massa che conta è quella — inerziale e gravitazionale — del corpo B.

Non vi sarà sfuggito che è stata usata — ed è chiaro che doveva essere usata — l'identità di massa inerziale e massa gravitazionale. Infatti i ragionamenti che portano all'inerzia dell'energia riguardano in maniera diretta la massa inerziale; ma quando noi andiamo a calcolare il lavoro della gravità dobbiamo naturalmente usare la massa gravitazionale. Quindi abbiamo implicitamente ammesso che massa inerziale e massa gravitazionale sono la stessa cosa: che quando un corpo aumenta la sua massa inerziale in qualunque maniera, anche la sua massa gravitazionale aumenta.

È facile vedere che questa è una conseguenza del principio di equivalenza. Se non fosse così, se la massa inerziale e quella gravitazionale non aumentassero nello stesso modo, si verificherebbe una situazione strana: quando B ha ricevuto la radiazione da A, se poi lo faccio cadere, non cade più con l'accelerazione g, perché la massa inerziale è aumentata e la massa gravitazionale no, oppure sono aumentate in maniera diversa. Se è vero che tutti i corpi cadono sempre con la stessa accelerazione, allora, qualunque cosa voi facciate di un corpo, non potete cambiarne la massa inerziale senza cambiarne nella stessa misura anche la massa gravitazionale.

Come vedete, il ragionamento è semplice, nel senso che non fa uso di concetti o di calcoli complicati; però ci sono diverse cose sottintese, diverse questioni sulle quali bisogna avere le idee chiare. D'altra parte, se non fosse così, non ci sarebbe voluto Einstein per inventarlo.

Anche forse per questo motivo, perché contiene delle questioni sottili, non ritengo che la seconda dimostrazione del redshift gravitazionale sia quella preferibile dal punto di vista didattico. È interessante notare che sebbene le due dimostrazioni si basino su ragionamenti totalmente diversi, a ben vedere, il principio di equivalenza entra in tutte e due. Nella seconda è entrata anche l'inerzia dell'energia; nella prima invece è entrato l'effetto Doppler. Guardando più a fondo si scoprirebbe che si tratta solo di variazioni di strada, ma i principi fisici di base che si usano sono sempre gli stessi.

Comunque il redshift è una cosa "strana", e tanto più lo era al tempo di Einstein. Erano cose nuove, che molti fisici faticavano a digerire: è per questo forse che Einstein non si accontentò di una dimostrazione sola, ma si sforzò di trovarne diverse. Sembra quasi che pensasse: "Ci sarà pure una dimostrazione alla quale dovrete credere. Se la prima non vi ha convinti, provate un po' a smontare quest'altra!" Come ho già osservato, un atteggiamento del genere si trova anche in Galileo.

CAPITOLO 15

Il redshift gravitazionale in astronomia

Si possono ottenere redshift gravitazionali più grandi di molti ordini di grandezza mettendosi in condizioni diverse, e cioè in situazioni astronomiche. Pensiamo, per esempio, alla luce emessa dal Sole: alla superficie del Sole (fig. 15–1) c'è l'atmosfera, dove viene determinata la struttura delle righe spettrali (di assorbimento) della luce solare. La radiazione parte dal Sole, e dopo un viaggio di $1.5 \cdot 10^8$ km arriva sulla Terra. È come dire che la sorgente dista dal centro del Sole di $7 \cdot 10^5$ km (il raggio del Sole), mentre quando arriva sulla Terra la radiazione si trova molto più "in alto" nel campo gravitazionale del Sole. Inoltre il Sole ha una massa molto maggiore di quella della Terra: entrambi questi fattori giocano a far diventare più grande l'effetto; e se si fanno i conti, la variazione relativa di frequenza è dell'ordine di 10^{-6}, contro il $3 \cdot 10^{-15}$ di prima.

Perciò in linea di principio si può vedere il redshift gravitazionale come segue. Nello spettro del Sole ci sono delle righe di assorbimento, per es. dell'idrogeno; le lunghezze d'onda di queste righe sono ben note da misure di laboratorio. C'è solo da misurare la lunghezza d'onda delle corrispondenti righe di assorbimento nello spettro del Sole e fare il confronto. Ci sono però molti fattori che ostacolano le misure. Le lunghezze d'onda delle righe dello spettro solare sono alterate per effetto Doppler dai moti convettivi nell'atmosfera solare; per effetto Zeeman dal campo magnetico, ecc. Il risultato è che le misure sono tutt'altro che precise.

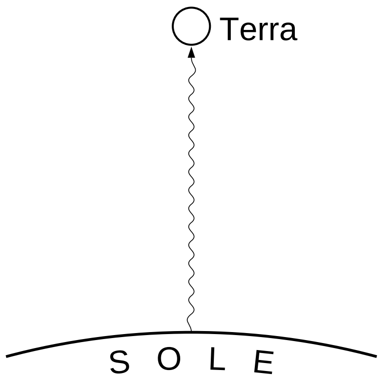

fig. 15–1

Un'altra verifica astronomica più recente del redshift gravitazionale sfrutta la luce delle nane bianche, nelle quali il redshift può arrivare a 10^{-4}; ma non è il caso ora di dilungarsi oltre.

È bene invece ricordare che nelle verifiche astronomiche non vale più l'ipotesi che il campo sia uniforme, perché h è molto maggiore del raggio della stella: occorre dunque modificare la formula vista sopra per il redshift. La dimostrazione non si può fare in maniera elementare, ma il risultato è il seguente. Se la sorgente è a distanza R_1 dal centro di una stella di massa M, e il rivelatore è a distanza R_2, si ha

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - 2GM/c^2 R_1}{1 - 2GM/c^2 R_2}}. \tag{15–1}$$

(Ad essere precisi, in realtà R_1 e R_2 non sono esattamente le "distanze dal centro", ma discutere questa complicazione ci porterebbe troppo fuori strada.)

Se in particolare si prende la luce emessa da una stella di raggio R, e si mette il rivelatore a distanza infinita, la (15–1) diventa:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}. \tag{15–2}$$

Questa formula va bene anche se $2GM/c^2R$ non è $\ll 1$.

La (15–2) è interessante a causa della radice quadrata: è chiaro che la formula ha senso solo se

$$\frac{2GM}{c^2 R} < 1.$$

Allora, se consideriamo un oggetto che abbia una massa e un raggio per cui questa condizione non è soddisfatta, che cosa succede?

Al di là del caso limite: i "buchi neri"

In primo luogo ci si deve domandare che cosa può essere un tale oggetto. Supponiamo per esempio che abbia la massa del Sole. (È bene ricordare che mentre i raggi stellari possono variare di parecchi ordini di grandezza, le masse non differiscono gran che: al più di un fattore 100 rispetto a quella del Sole. Quindi se si usa la massa del Sole non si sbaglia molto come ordine di grandezza.) Ciò posto, perché sia

$$\frac{2GM}{c^2 R} > 1 \tag{15–3}$$

occorre $R < 3\,\mathrm{km}$. Ora una stella con la massa del Sole e con un raggio minore di 3 km non è una nana bianca, e nemmeno una stella di neutroni: anche queste hanno sempre un raggio di almeno una diecina di km.

La disuguaglianza (15–3) può essere interpretata come segue. Moltiplichiamo ambo i membri per m: otteniamo

$$\frac{2GMm}{c^2 R} > m$$

cioè

$$\frac{GMm}{R} > \frac{1}{2} mc^2.$$

A primo membro troviamo l'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m nel campo della stella; a destra la metà dell'energia di riposo dello stesso corpo. Questo potrebbe farci intuire che quel corpo potrà difficilmente allontanarsi dalla stella, perché avrebbe bisogno all'incirca di tanta energia quanta se ne può tirar fuori dalla sua massa.

Forse non occorre ormai ripetere che è piuttosto facile presentare discorsi di questo tipo in modo da creare una gran confusione, mentre è assai difficile renderli sufficientemente precisi. Perciò consiglio caldamente di non farli. Il solo discorso che mi sento di accettare è il seguente. Nella (15–2) c'è una radice quadrata: se il radicando diventa negativo, che cosa succede? In tal caso non sarà possibile fare l'esperimento di Pound e Rebka: se anche la sorgente emette la sua radiazione, noi non potremo riceverla. In altre parole: se esiste un oggetto per cui l'espressione sotto radice è negativa, anche supponendo che emetta radiazione dalla sua superficie, certamente questa luce non esce (in caso contrario avremmo una contraddizione, perché il primo membro della (15–2) sarebbe reale, mentre il secondo membro è immaginario).

Dobbiamo però tener presente che la (15–2) è stata scritta senza alcuna giustificazione. Mentre della (14–9) abbiamo visto una spiegazione, la (15–2) è tutt'altra cosa. Non possiamo sentirci tranquilli solo perché quando R_2 è vicino a R_1 la (15–2) riproduce la (14–9): questo è come dire che stiamo facendo una gigantesca estrapolazione. Dalla (14–9), che va bene solo per piccole distanze, ci portiamo in una condizione radicalmente diversa. Nessuno ci assicura che questa sia l'estrapolazione giusta: ci sono infinite formule che si riconducono alla (14–9) per piccole distanze. Naturalmente la giustificazione della (15–2) sta nell'intera teoria della relatività generale, ma qui dobbiamo prenderla per buona.

In ogni caso, bisogna ancora chiedersi se è vero che ci sono oggetti per cui quel famoso radicando può diventare negativo. Ho fatto notare prima che per un oggetto che abbia la massa del Sole, il raggio dev'essere minore di 3 km. Esistono tali oggetti? È bene ricordare che se adesso parlare di "buchi neri" è di moda, la previsione fu fatta da Oppenheimer e Snyder nel '39. A quel tempo nessuno ci credeva: si pensava che fosse una pura fantasticheria di teorici. Oggi invece se ne parla con maggior sicurezza, perché si sono raccolti una serie d'indizi (non ancora delle prove vere e proprie) che inducono a credere l'idea abbia qualche fondamento.

Ho voluto fare questa osservazione, per rimarcare che non basta scrivere una formula perché quella formula dica qualcosa sulla realtà. Da un lato dobbiamo ammirare l'inventiva del teorico, e la potenza di una teoria che si dimostra capace di anticipare realtà sconosciute; ma dall'altra non dobbiamo sottovalutare la necessità della verifica concreta.