CAPITOLO 19

Il moto in campo gravitazionale

Vogliamo ora approfondire lo studio del moto in campo gravitazionale, sulla base del principio della geodetica. Come vedremo, questo ci porterà a capire come Einstein interpreta la caduta dei gravi e il moto dei pianeti; infine potremo intravedere perché il valore corretto dell'angolo di deflessione gravitazionale della luce sia doppio di quello che si calcola per via elementare.

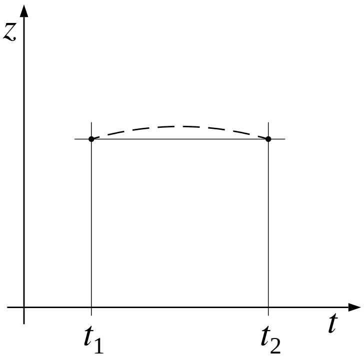

fig. 19–1

Riprendiamo la solita figura, la mappa t–z dello spazio-tempo (fig. 19–1). Dato che lo spazio-tempo non è euclideo, e questa non è una carta fedele, dobbiamo essere preparati al fatto che se prendiamo due punti, per esempio con la stessa z, la geodetica che li congiunge non sia affatto una retta sulla carta. Al solito, l'analogia con le carte geografiche aiuta.

Se disegniamo una carta geografica con una qualunque proiezione, in generale le geodetiche, cioè i cerchi massimi della Terra, non verranno rappresentati da linee rette: solo in alcune proiezioni questo succede per qualche particolare geodetica. Così ad esempio nella proiezione che abbiamo usato noi — quella in cui i meridiani e i paralleli sono rette tra loro perpendicolari (fig. 19–2) — i meridiani, che sono geodetiche, sono rappresentati da rette; ma un cerchio massimo che unisca due punti alla stessa latitudine non apparirà come una retta, dal momento che invece sono rappresentati da rette i paralleli, che non sono cerchi massimi. Un arco di cerchio massimo prenderà l'aspetto di una curva concava verso l'equatore.

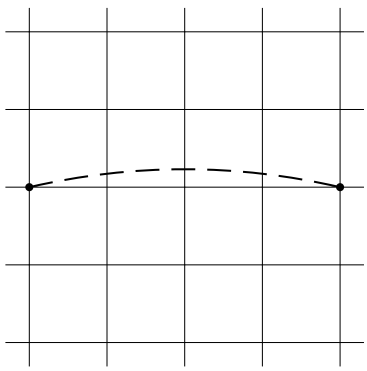
fig. 19–2

Per la stessa ragione, ci si deve aspettare che nel piano t–z una geodetica che congiunge due punti con la stessa z non sia una retta. Sarà incurvata verso l'alto o verso il basso? Si può dimostrare senza difficoltà che dev'essere incurvata verso il basso: noi ci arriveremo dall'esistenza del redshift gravitazionale.

Il principio della geodetica e la caduta dei gravi

Ricordiamo che secondo il principio della geodetica le linee orarie dei corpi che si muovono sotto l'azione della sola gravità sono geodetiche dello spazio-tempo. Vogliamo applicare questo principio al caso semplice di un moto lungo la verticale, che prenderemo come asse z.

Il fatto che la retta $z = cost$ nel piano t–z non sia una geodetica significa che se si lascia libero un sasso, questo non resta fermo: se lo si fa partire da un certo punto (ad es. $z = 0$) all'istante t_1 e si vuole che ritorni allo stesso punto all'istante t_2, è necessario lanciarlo verso l'alto e aspettare che ricada. La geodetica di cui stiamo parlando è semplicemente la parabola che descrive il moto di caduta di un grave: con il principio della geodetica non faremo altro che riscoprire che i gravi cadono.

Più esattamente, c'interessa dimostrare che sulla nostra carta — che rappresenta le coordinate di un laboratorio sulla Terra — la linea oraria di un corpo in caduta libera che si trova alla quota z all'istante t_1, e alla stessa quota all'istante t_2, ha una forma ben precisa (incurvata verso il basso) che si ottiene imponendo che si tratti di una geodetica.

Osserviamo ancora che la geodetica che descrive il moto di un corpo è la curva di *lunghezza massima* tra due punti, e non minima (la lunghezza essendo definita dal tempo proprio): per capirlo, basta rifarsi al paradosso dei gemelli (Cap. 6). Occorre dunque trovare, tra le infinite curve che uniscono i due punti dati nel piano t–z, quella cui corrisponde il tempo proprio più lungo.

Il problema principale da risolvere è proprio il calcolo di questo tempo proprio. Noi conosciamo già la risposta in due casi:

a) Riferimento inerziale (in assenza di campo gravitazionale): allora vale la formula (5–2):

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che per piccole velocità si approssima in

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{19–1}$$

b) Corpo fermo in campo gravitazionale: nel Cap. 13 abbiamo visto la formula del redshift (13–2):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{gh}{c^2}.$$

Questa, insieme con $\nu_2/\nu_1 = \Delta\tau_1/\Delta\tau_2$ ci porta a

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right).$$

Se dunque t indica il tempo segnato da un orologio al livello del mare ($z = 0$) avremo, all'altezza z:

$$\Delta\tau = \Delta t\left(1 + \frac{gz}{c^2}\right). \tag{19–2}$$

È facile scrivere una relazione che riassuma i due casi:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 + \frac{gz}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right). \tag{19–3}$$

Nella (19–3) il termine gz/c^2 rappresenta il redshift gravitazionale, mentre il termine $v^2/2c^2$ è la dilatazione relativistica del tempo.

Per il nostro problema, supposto di conoscere la curva, ossia la legge oraria del moto, dovremmo usare la (19–3) per ogni trattino del moto, e sommare. Ottenuto così il tempo proprio totale, dovremmo cercare per quale legge oraria questo tempo proprio risulta massimo. Si tratta ovviamente di un'impresa impossibile senza strumenti di analisi superiore (calcolo delle variazioni): ma noi otterremo un'idea del risultato semplificando drasticamente il moto reale. Poiché la difficoltà deriva dalla variazione di z e della velocità lungo il moto, supporremo che il moto consista di due fasi in moto uniforme: una di salita, che inizia all'istante $t = 0$ e termina all'istante $t = \Delta t$; e l'altra di discesa, che inizia all'istante $t = \Delta t$ e termina all'istante $t = 2\Delta t$. È ovvio che le due fasi contribuiscono in ugual misura al tempo proprio.

Occupiamoci dunque della sola fase di salita: al termine il corpo raggiunge una quota $h = v\Delta t$ (si parte da $z = 0$). Nella salita z cambia, e per calcolare $\Delta\tau$ dalla (19–3) prenderemo un valore medio pari ad $h/2$. Esprimeremo anche la velocità in funzione di h e Δt, ottenendo alla fine:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 + \frac{gh}{2c^2} - \frac{h^2}{2c^2\Delta t^2}\right). \tag{19–4}$$

Osservando la (19–4) si vede che $\Delta\tau$ dipende da h per due motivi:

- aumenta con h, a causa del redshift (secondo termine in parentesi)
- diminuisce al crescere di h, a causa della dilatazione relativistica, perché un h più grande richiede una maggiore velocità (terzo termine in parentesi).

Chiaramente c'è un valore di h che dà il massimo $\Delta\tau$: facendo il calcolo si trova $h = \frac{1}{2}g\Delta t^2$, che è proprio il risultato esatto! Non bisogna però prenderlo troppo sul serio, dato che l'abbiamo ottenuto con una serie di semplificazioni e di approssimazioni, che ora è bene ricapitolare.

L'approssimazione di campo gravitazionale uniforme che porta alla (19–2) è del tutto lecita, come pure quella di piccola velocità, che abbiamo usata per ricavare la (19–1). Abbiamo poi approssimato il moto reale con due fasi di moto uniforme, e questo è certamente scorretto; infine abbiamo presa una z media uguale ad $h/2$, e anche questo è discutibile. Come capita spesso, i due "errori" si compensano, ma non era scritto che così dovesse essere.

Non è difficile capire che si potrebbe migliorare il procedimento spezzando il moto in 3, 4, o più fasi di moto uniforme; a parte la laboriosità del calcolo, è intuitivo che quando il numero dei tratti aumenta, il risultato si avvicina a quello esatto.

Tuttavia ciò che veramente conta è aver mostrato il concetto base: come si possa ottenere la legge del moto dal principio della geodetica — una volta che fatti sperimentali, o altri ragionamenti, ci abbiano insegnato come calcolare il tempo proprio — senza nessun bisogno di nominare la forza peso, la seconda legge della dinamica, ecc.

Il principio della geodetica e il moto dei pianeti

Passiamo ora a studiare, dallo stesso punto di vista, il moto di un pianeta intorno al Sole: questa volta però la discussione potrà essere solo qualitativa.

Nella fig. 19–3 rappresento due dimensioni spaziali, e dimentico la terza; inoltre il tempo bisogna immaginarlo secondo un asse perpendicolare al foglio. Scelto un punto A e un istante t_1, e poi un punto B e un istante t_2, voglio sapere se un pianeta può andare da A a B partendo da A all'istante t_1 e arrivando in B all'istante t_2. Questo è un problema di meccanica: la soluzione ci darà una certa orbita di trasferimento da A a B, in un dato intervallo di tempo. L'orbita di trasferimento, combinata con la legge di dipendenza temporale, darà una curva nello spazio-tempo (fuori dal piano della figura). Ma per il solito principio della geodetica, questa curva è una geodetica dello spazio-tempo; anzi possiamo trovarla proprio così: preso nello spazio-tempo il punto (evento) iniziale e il punto (evento) finale, andiamo a cercare la linea di lunghezza *massima*.

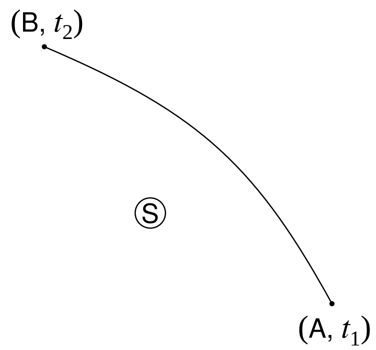

fig. 19–3

Detto in altri termini: la legge oraria del moto è espressa da tre funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$: possiamo vedere le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, come equazioni di una curva nello spazio-tempo. Questa curva, che corrisponde alla legge oraria del pianeta, è una geodetica: quindi invece d'integrare le equazioni differenziali di Newton, un altro modo per trovare il moto di un pianeta è di cercare la geodetica che congiunge la posizione-istante di partenza alla posizione-istante di arrivo.

Questa geodetica si presenta come una specie di elica nello spazio-tempo (fig. 19–4). Infatti il tempo passa, continua a crescere, mentre il pianeta gira intorno al Sole con moto periodico. Una geodetica dello spazio-tempo, come qualsiasi altra curva, ha una proiezione nello spazio tridimensionale; questa proiezione è la traiettoria: un'ellisse nel caso di un pianeta. Si vede come qui sia essenziale la distinzione fra traiettoria e legge oraria: la

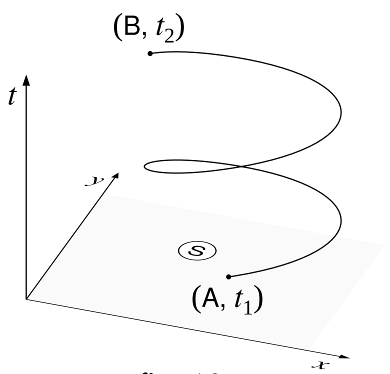

fig. 19–4

legge oraria è una curva *nello spazio-tempo*, mentre la traiettoria è una curva *nello spazio ordinario*; la prima è un'elica, la seconda un'ellisse.

Supponiamo per un momento che lo spazio ordinario sia euclideo (un punto che ridiscuteremo tra poco). Allora le sue geodetiche sono rette, ma la traiettoria di un pianeta non è una retta. Voi direte: bella scoperta, c'è la forza di gravità! È vero, ma infatti Einstein non pretende certo di contraddire la meccanica newtoniana, quando questa è valida.

Ripeto: la linea oraria di un pianeta nello spazio-tempo è una geodetica, ma la sua proiezione nello spazio tridimensionale non lo è, tanto è vero che non è neppure unica. Voglio dire che tra due punti dati, A e B, si può lanciare una sonda in infiniti modi, a seconda della direzione e della velocità con la quale la si lancia. Invece la geodetica che congiunge A con B nello spazio è unica, a meno di casi speciali.

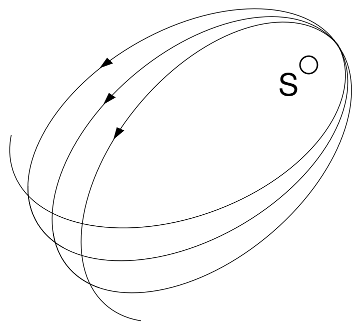

fig. 19–5

Ho detto poco fa che la proiezione spaziale di una geodetica dello spazio-tempo per un pianeta è un'ellisse. Se si prende la soluzione esatta (una geodetica della geometria di Schwarzschild) la proiezione non è proprio un'ellisse: infatti la relatività generale prevede piccole deviazioni nelle orbite dei pianeti (la precessione del perielio). Quindi parlando di ellisse facciamo un'approssimazione, che però non altera la logica del discorso. Per inciso, l'effetto di precessione del perielio viene spesso descritto dicendo che l'orbita è "un'ellisse che gira." A rigore però un'ellisse che gira non è un'ellisse, tra l'altro perché non è una curva chiusa (fig. 19–5). Naturalmente se ne prendiamo un arco non troppo lungo, esso sarà poco diverso da un arco di ellisse. Comunque che sia proprio un'ellisse, o quasi, per noi non ha importanza: importante è che se si fanno i conti la traiettoria giusta viene da sé, come conseguenza del principio della geodetica.

Vorrei piuttosto notare un'altra cosa: il metodo per trovare la legge oraria come geodetica è diverso da quello delle equazioni differenziali. Il metodo delle equazioni differenziali procede così: è data la legge del moto (l'equazione differenziale $\vec{F} = m\vec{a}$); assegno determinate condizioni iniziali (posizione e velocità all'istante iniziale); integro l'equazione differenziale e trovo la legge oraria. Nel nostro caso invece è data la geometria dello spazio-tempo — che è l'equivalente della legge del moto — ma in luogo delle condizioni iniziali si danno le posizioni a un certo istante iniziale e a un certo istante finale: non si dice niente sulle velocità. Il numero di condizioni è lo stesso: invece di 3 coordinate e 3 componenti della velocità — che sono 6 dati — io do 3 coordinate iniziali e 3 coordinate finali; però si tratta di dati diversi. La definizione di geodetica come linea di lunghezza massima ha il carattere di un *principio variazionale*, che sostituisce le equazioni differenziali solite (cosa del resto possibile anche nella meccanica newtoniana: principio di Hamilton).

Abbiamo già visto questo fatto nel caso della parabola nel piano t–z; ma anche nel caso del moto di un pianeta intorno al Sole, io scelgo le posizioni di partenza e di arrivo, e l'intervallo di tempo; poi "tiro" la geodetica, e infine la proietto nello spazio ordinario: il risultato approssimativamente è un'ellisse. Anzi, potrà essere un'ellisse, un'iperbole o una parabola, a seconda dell'intervallo di tempo. Se voglio andare da A a B (fig. 19–6), debbo anche dire in quanto tempo: se il tempo assegnato è sufficientemente lungo, il risultato è un'ellisse; se invece impongo un tempo breve la curva può benissimo risultare una parabola o un'iperbole.

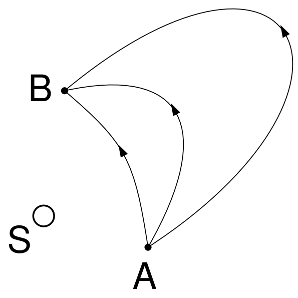

fig. 19–6

Il principio della geodetica e la deflessione della luce

Finalmente possiamo ora tornare al problema di partenza: infatti tutto il discorso che abbiamo fatto per i pianeti è vero anche per la luce. Anch'essa segue delle geodetiche dello spazio-tempo: da questo punto di vista non c'è nessuna differenza.

Noi siamo abituati a dire che la luce si propaga in linea retta: se ciò fosse vero, vorrebbe dire che la luce segue le geodetiche dello spazio tridimensionale (euclideo). Se poi si aggiunge che la luce viaggia con velocità costante, il tutto equivale a dire che le linee orarie della luce sono geodetiche nello spazio quadridimensionale euclideo.

Ma noi sappiamo che lo spazio-tempo non è euclideo; e non è euclideo in due modi, uno solo dei quali abbiamo visto in dettaglio, mentre dell'altro finora non ho mai parlato. Sappiamo che non sono euclidee le sezioni z–t; ma in realtà anche l'ordinario spazio x–y–z non è euclideo. E si tratta di due cose diverse. Purtroppo questa è una complicazione nuova, che non si presenta per la superficie di una sfera: una superficie è bidimensionale, e perciò ha una sola curvatura. Su questa complicazione torneremo fra poco, perché sarà essenziale per il nostro discorso; ma per ora dimentichiamola.

Il fatto che le sezioni x–t, y–t, z–t dello spazio-tempo non sono euclidee ha per conseguenza che la traiettoria della luce non è una geodetica dello spazio x–y–z: abbiamo appena visto, a proposito dei pianeti, che questa è l'interpretazione di Einstein dell'azione gravitazionale. Ne segue che il calcolo della deflessione della luce fatto usando la meccanica newtoniana ha lo stesso significato che per un pianeta; la differenza è solo che un pianeta si muove lentamente, e quindi viene deviato molto dall'accelerazione gravitazionale prodotta dal Sole; mentre per la luce, che va molto veloce, la deflessione dovuta al Sole è assai piccola perché l'accelerazione ha poco tempo per cambiare la direzione della velocità.

In poche parole, questo effetto è per così dire l'impronta lasciata dal fatto che una geodetica dello spazio-tempo non si proietta in una geodetica dello spazio tridimensionale.

Effetto delle diverse curvature dello spazio-tempo

Riprendiamo ora il discorso della curvatura dello spazio-tempo e delle sue sezioni, cominciando dal caso più semplice. Se si toglie una dimensione a una superficie, che cosa si ottiene? Una linea. Non ha senso dire che una linea non è euclidea, perché si può sempre raddrizzarla: l'unica "metrica" che esiste su di una linea è la lunghezza. Quindi non si può parlare di curvatura per uno spazio unidimensionale: la curvatura ha senso solo a partire da due dimensioni, cioè da una superficie.

Se le dimensioni sono più di due, allora io posso "tagliare" lo spazio in diversi modi (esistono diversi sottospazi bidimensionali) e perciò posso avere varie curvature. Ad es. potrei avere curvatura nulla in una sezione, e curvatura non nulla in un'altra. In termini formali quest'idea viene espressa dal tensore di Riemann, il quale infatti ha più componenti, che misurano le possibili curvature indipendenti secondo varie sezioni.

Tornando al nostro caso, succede che una sezione come z–t è curva; ma neanche le sezioni x–y–z, cioè quelle in cui il tempo è tenuto costante, sono euclidee. Finora noi abbiamo considerato solo l'effetto della prima curvatura, ma non abbiamo tenuto conto della seconda. Questo perché non è possibile spiegarne l'origine in modo elementare, come siamo riusciti a fare per la curvatura z–t. In particolare, non è possibile ricavarla dal principio di equivalenza, come talvolta si trova scritto: infatti esistono teorie diverse da quella di Einstein (e alle quali non possiamo neppure accennare) che pur essendo in accordo col principio di equivalenza portano a risultati diversi su questo punto.

A causa di tale curvatura non possiamo più dire che le geodetiche dello spazio tridimensionale sono rette. Abbiamo dunque due effetti distinti: in primo luogo le traiettorie non sono geodetiche (e questo produce, in vicinanza del Sole, la deviazione di $0.''88$ da noi calcolata), e poi le geodetiche non sono rette (e di ciò non avevamo tenuto conto). Si dà il caso che i due effetti vadano nello stesso senso, e abbiano la stessa importanza: rispetto a come andrebbero le cose se lo spazio-tempo fosse euclideo, producono una deviazione della stessa grandezza e nello stesso senso: il che spiega il fattore 2 che ci mancava. Le teorie alternative di cui ho parlato più sopra danno invece un risultato diverso, ed è questo uno dei principali argomenti a favore della teoria di Einstein.