CAPITOLO 17

Ancora sulla curvatura dello spazio-tempo

Vorrei ora tornare a una questione già discussa: se sia o no possibile eliminare il campo gravitazionale; cioè, in sostanza, se lo spazio-tempo è curvo o no.

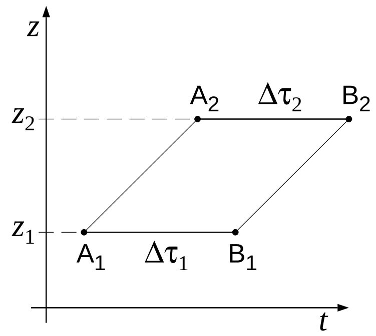

fig. 17–1

Abbiamo già visto che il redshift gravitazionale va interpretato come una prova che i diagrammi cartesiani dello spazio-tempo che noi siamo soliti disegnare non sono carte fedeli. Se disegniamo un diagramma con due assi cartesiani (t in ascissa, z in ordinata: fig. 17–1) troviamo che lo stesso segmento orizzontale a quote diverse non rappresenta in realtà lo stesso intervallo di tempo proprio. Questo intendiamo dicendo che la carta non è fedele: come una carta geografica della Terra, su cui si disegnino i meridiani paralleli tra loro, mentre sulla Terra reale le distanze decrescono verso i Poli.

Sappiamo però che ciò non basta per dire che non è possibile disegnare una carta fedele dello spazio-tempo: potrebbe darsi che sia solo la rappresentazione adottata, il metodo di proiezione, che è stato scelto male. Bisogna dimostrare che non esiste nessun metodo di proiezione che dia una carta fedele, come non esiste per la superficie sferica della Terra. Abbiamo anche visto che questa domanda equivale all'altra: esiste un riferimento in cui non c'è redshift? In altre parole: esiste un riferimento in cui l'effetto della gravità scompare del tutto? Se infatti un tale riferimento esiste, per il principio di equivalenza quello è un riferimento inerziale, in cui non si manifesta neppure il redshift.

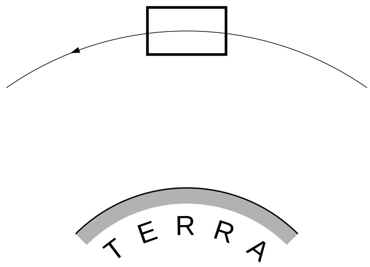

fig. 17–2

Ho già accennato che ciò non è possibile, in vicinanza della Terra come in vicinanza del Sole, solo perché il campo gravitazionale non è uniforme. Se scegliamo un riferimento in caduta libera, noi facciamo sparire il campo gravitazionale *localmente*, cioè — in senso approssimato — in una regione piccola: appena ci spostiamo, per es. avvicinandoci o allontanandoci dalla Terra, le cose cambiano.

Volendo andare più a fondo sull'argomento, conviene pensare a cose un po' più permanenti dell'ascensore di Einstein, cioè a satelliti artificiali. Il satellite, che qui disegno come una scatola (fig. 17–2) rappresenta il nostro laboratorio e il nostro sistema di riferimento. Supporremo che questa scatola giri intorno alla Terra in un'orbita circolare.

Tra parentesi, agli effetti del principio di equivalenza non è per niente necessario che si tratti di un'orbita circolare. Un riferimento in moto libero intorno alla Terra è comunque *localmente inerziale*, anche se il moto non è circolare. Questo perché in ogni istante del moto la forza apparente prodotta dall'accelerazione del riferimento compensa esattamente la forza gravitazionale. Più in generale, possiamo pensare al Voyager 2, che dopo aver circumnavigato Giove è stato deviato, è passato vicino a Saturno, è stato deviato un'altra volta, ha avvicinato Urano e infine Nettuno; un tale oggetto ha seguito una complicata traiettoria ed è stato soggetto all'attrazione gravitazionale di tutti i grandi pianeti. Ciò nondimeno, il riferimento del Voyager è localmente inerziale, perché in ogni istante la sua accelerazione rispetto a un riferimento newtoniano è sempre uguale all'accelerazione di gravità complessiva, che comprende tutte le forze esercitate dai pianeti.

Quindi, per complicato che sia il moto, rimane ugualmente vero che lavorando all'interno di un oggetto che si muove liberamente in un qualunque campo gravitazionale, comunque fatto, quel campo gravitazionale non si avverte: *localmente le forze apparenti lo cancellano sempre.* Perciò il solo motivo per scegliere l'orbita circolare è che rende più facile fare i conti: non c'è nessuna ragione di principio.

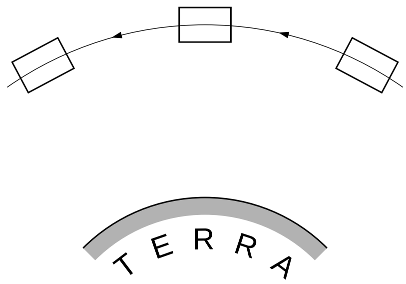

fig. 17–3

Il problema dei due riferimenti "in orbita"

Però, come si è già accennato, ci sono due modi di pensare a questo riferimento. Il più naturale è che la scatola giri in maniera tale che il pavimento guardi sempre verso la Terra (fig. 17–3): questo lo chiameremo "riferimento 1." Ciò è perfettamente possibile: nella meccanica newtoniana non c'è niente che impedisca a un oggetto di muoversi in quella maniera. Però è altrettanto possibile farlo muovere in un'altra maniera ("riferimento 2," fig. 17–4): il suo centro segue la stessa traiettoria circolare di prima, ma l'orientamento della scatola rimane invariabile (rispetto alle stelle, per intendersi). Sono tutti e due riferimenti localmente inerziali, oppure no?

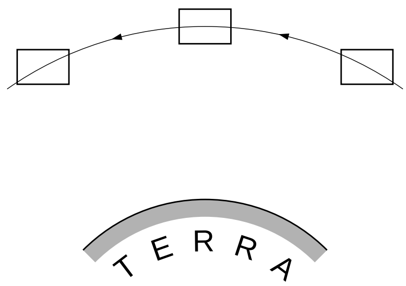

fig. 17–4

Cominciamo dal primo, che in apparenza risulta più facile. Possiamo descrivere la situazione in maniera semplicissima pensando a un riferimento solidale al centro della Terra, ma con gli assi che girano in modo da seguire il moto della scatola. Ci siamo così ricondotti a un caso ben conosciuto: un riferimento in rotazione uniforme intorno all'origine. In questo riferimento ci sono delle forze apparenti: in primo luogo la forza centrifuga, che vale $\omega^2\vec{r}$, dove ω è naturalmente la velocità angolare del satellite. (Questa espressione è corretta a condizione che ci si limiti al piano della figura: fuori di quel piano dovrei usare in luogo di $\vec{r}$ la sua proiezione perpendicolare all'asse di rotazione.) Per calcolare ω, diciamo R_0 la distanza del baricentro del satellite dal centro della Terra. Allora la velocità angolare dovrà essere tale che $\omega^2 R_0$ sia uguale all'accelerazione di gravità g, cioè a GM/R_0^2, da cui

$$\omega^2 = \frac{GM}{R_0^3}. \tag{17–1}$$

Qui ho usato R_0, in luogo della r di prima, e l'ho fatto a ragion veduta. Infatti quella che conta è la posizione del baricentro: per calcolare l'accelerazione centripeta del satellite, devo conoscere la distanza del suo baricentro dal centro della Terra. Quanto poi alla forza centrifuga che agisce in questo riferimento, essa sarà diversa da punto a punto, perché è diverso r: l'accelerazione centrifuga è proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione. La conseguenza è che se la forza centrifuga compensa esattamente la forza di attrazione gravitazionale quando mettiamo la pallina di prova nel baricentro, ciò non sarà più vero quando la spostiamo, ad es. verso l'alto. Questo per due ragioni: perché aumenta la forza centrifuga, e perché diminuisce la forza di attrazione della Terra. I due effetti si sommano: mentre una forza aumenta, l'altra diminuisce. La forza residua si chiama "forza di marea," per ragioni che spiegherò in seguito.

Forza di marea e forza di Coriolis

Ecco allora la prima domanda del problema n. 10: calcolare la forza di marea in queste condizioni. Prendiamo per es. $R_0 = 6700\,\mathrm{km}$; abbiamo dunque a che fare con un satellite che viaggia in orbita circolare a circa $300\,\mathrm{km}$ di distanza dalla superficie della Terra. Vogliamo calcolare la forza di marea su oggetti che siano a distanza Δr, per esempio un metro, dal baricentro del satellite.

La cosa non è difficile: basta ricavare l'espressione delle due forze per una distanza qualunque, e poi approssimare per piccolo Δr. Si riesce facilmente a vedere che la forza risultante (la forza di marea) è proporzionale a Δr. Il problema richiede di fare il calcolo numerico, confrontando la forza di marea col peso della pallina. Questo perché sebbene si dica che quel riferimento è "senza peso," in realtà rimane un residuo, che è la forza di marea: questa sarà una piccola frazione del peso, e si tratta di vedere quanto piccola. Il problema n. 11 chiede di fare lo stesso calcolo per due palline spostate orizzontalmente: in tal caso non cambia la distanza dal centro della Terra, ma cambia la direzione, sia della forza di gravità, sia della forza centrifuga.

Però questo riferimento presenta un'altra difficoltà, per cui non lo si può in realtà chiamare inerziale, neppure localmente. In un riferimento rotante così fatto, oltre alla forza centrifuga c'è anche la forza di Coriolis. Proviamo allora a calcolare questa forza, che — come sappiamo — è proporzionale alla velocità.

Supponiamo ad esempio che la velocità della pallina sia 0.1 m/s, e che il laboratorio sia lungo 10 m. La domanda è: se tiriamo la pallina da un capo all'altro del laboratorio con questa velocità, di quanto viene deviata? (problema n. 12).

Dalla soluzione del problema si vede che la deviazione è proporzionale al quadrato delle dimensioni del laboratorio, come sarebbe anche per l'ordinaria forza di gravità. Invece la grandezza della forza di marea è proporzionale alla distanza dal centro, e quindi alle dimensioni del laboratorio: ne segue che la deviazione che essa produce va come il cubo di dette dimensioni. Ecco perché quel riferimento non può essere detto localmente inerziale: su oggetti che si muovono abbastanza veloci la forza di Coriolis produce effetti molto maggiori di quella di marea, e non può essere trascurata.

Conclusione sui riferimenti "in orbita"

Il riferimento giusto è in realtà il secondo, anche se è meno naturale. Non c'è comunque niente di difficile: la prima cosa che bisogna avere chiara è che in questo riferimento non c'è forza di Coriolis, perché il moto è traslatorio. Per visualizzare bene le cose conviene mettere degli assi (fig. 17–5). La traiettoria del centro del satellite è curvilinea, e quindi il moto di trascinamento è accelerato: ci sarà perciò un'accelerazione di trascinamento. Però il moto è traslatorio: a uno stesso istante tutti i punti del riferimento hanno la stessa velocità e la stessa accelerazione. Quindi la sola forza apparente è quella che comunemente si chiama "forza d'inerzia":

$$\vec{f} = m\vec{a}_\mathrm{t} \qquad (17\text{–}2)$$

dove $\vec{a}_\mathrm{t}$ è l'accelerazione di trascinamento.

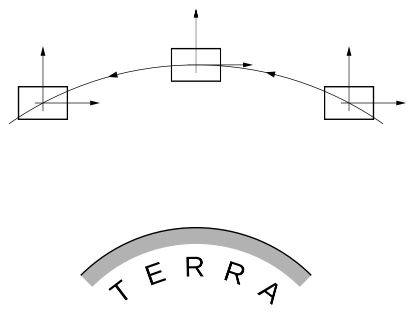

fig. 17–5

Naturalmente l'accelerazione di trascinamento è quella che aveva il baricentro nel primo caso, però c'è una differenza: adesso l'accelerazione, e quindi la forza apparente, è la stessa in tutti i punti, mentre prima la forza centrifuga aumentava con la distanza dal centro della Terra. Tuttavia ciò non risolve il problema di eliminare la forza di gravità, perché questa continua a dipendere dalla posizione, e quindi la sua cancellazione non può essere esatta dappertutto. Anche in questo caso rimane quindi una forza di marea, sebbene la sua grandezza sia diversa, come si verifica facendo il calcolo (problemi n. 13 e n. 14).

Dato che non c'è forza di Coriolis, ma solo forza di marea, ora abbiamo davvero un riferimento inerziale, anche se solo *localmente*: la cancellazione della forza di gravità da parte della forza apparente non è esatta, ma può essere resa piccola quanto vogliamo restringendo gli intervalli di spazio e di tempo.

Penso sia chiaro che tutto questo discorso non dovrebbe essere portato in classe: m'interessava solo porre un problema didattico. A prima vista sembra che il riferimento 1 sia quello più semplice: è più naturale pensare a un oggetto che gira intorno alla Terra tenendo sempre la pancia verso di noi. Quanto meno, a me sembra che un ragazzo trovi molto più facile pensare a una cosa che gira intorno alla Terra nel modo 1 che non nel modo 2. È chiaro che se invece non fosse così, se risultasse più naturale il riferimento 2, che è quello che ci serve, tutto sarebbe più semplice.

Circa il secondo riferimento c'è ancora una cosa che occorre notare. È vero che l'accelerazione di trascinamento è la stessa in tutti i punti, però è anche vero che non è costante, nel senso che varia nel tempo. Mentre il satellite gira intorno alla Terra l'accelerazione cambia continuamente direzione, perché punta sempre verso il centro della Terra. In realtà l'accelerazione non si può misurare stando dentro il satellite; però si misura la forza di marea, e anch'essa cambia nel tempo, in maniera abbastanza complicata.

Ricordiamoci ora qual era il problema di partenza: è possibile cancellare completamente la forza di gravità? Il fatto che ciò non sia possibile implica che resterà sempre un redshift, per quanto piccolo. Possiamo ottenere il redshift residuo ripetendo il ragionamento visto nel Cap. 13: nel calcolare il lavoro occorre però tener conto che la forza di marea non è costante, ma proporzionale a Δr. Il risultato è

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{R_* \Delta r^2}{2R_0^3} \tag{17–3}$$

(problema n. 15) e facendo il calcolo numerico per $\Delta r = 5\,\mathrm{m}$ si trova $4 \cdot 10^{-22}$. Si noti anche il segno positivo: dato che la forza di marea è diretta verso l'alto, in realtà si tratta di un "blueshift."

Concludendo: non c'è modo di fare una carta fedele. Non si tratta di una rappresentazione scelta male: *siamo proprio in presenza di una curvatura intrinseca dello spazio-tempo.*

Perché si dice "forza di marea"?

Resta ora da mostrare che la forza residua si chiama "forza di marea" semplicemente perché dà l'esatta spiegazione delle maree. Riguardo alle maree si leggono tanti discorsi sbagliati, o giusti solo per metà; vale perciò la pena di parlarne.

Abbiamo qui (fig. 17–6) la Terra e la Luna: applicando di nuovo il principio di equivalenza, possiamo dimenticare tutto il resto dell'Universo, e in particolare il Sole, se scegliamo un riferimento solidale con il baricentro del sistema Terra-Luna, e con gli assi orientati verso le stelle fisse. (Il baricentro si trova dentro la Terra, ma è disegnato fuori per rendere più chiara la figura.) In tale riferimento la Terra e la Luna girano intorno al comune baricentro. In particolare il centro della Terra si muove in un'orbita approssimativamente circolare, e perciò di moto accelerato; la causa di quest'accelerazione è

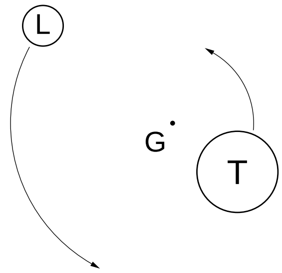

fig. 17–6

la forza gravitazionale esercitata dalla Luna. Quindi la Terra è un oggetto nelle stesse condizioni del satellite di prima: è un riferimento in caduta libera — in moto libero, se preferite — nel campo gravitazionale della Luna.

È un punto di vista inconsueto, perché di solito si dice che è la Luna che gira intorno alla Terra. Tuttavia non è solo la Luna ad essere attratta dalla Terra, ma anche quest'ultima è attratta dalla Luna: tutte e due "cadono," sotto l'azione di due forze che sono di uguale grandezza. Naturalmente, poiché la massa della Luna è 80 volte minore di quella della Terra, l'accelerazione della Luna è 80 volte più grande. Però noi viviamo sulla Terra, e perciò c'interessa maggiormente il moto di questa.

In un riferimento (del tipo 2) solidale alla Terra la forza di gravitazione della Luna è approssimativamente cancellata, perché il riferimento è localmente inerziale, ma rimane un residuo. Vediamo ora l'effetto di questo residuo.

Dalla parte opposta alla Luna la forza di trascinamento è troppo grande per compensare la forza gravitazionale della Luna, e quindi la somma delle due è diretta verso l'esterno. Invece nella faccia che guarda la Luna l'attrazione lunare è maggiore della forza di trascinamento, e la risultante è ancora diretta verso l'esterno della Terra. Tutto ciò che sulla Terra è libero di muoversi, verrà succhiato verso la Luna nei punti sublunari e verrà spinto dall'altra parte nei punti opposti alla Luna: è ciò che accade all'acqua del mare.

In realtà le maree sono molto più complicate, per varie ragioni: gli oceani sono dei bacini limitati, e nei movimenti dell'acqua da un bacino all'altro ci sono attriti; poi ci sono risonanze con le oscillazioni spontanee dei bacini, ecc. Però il meccanismo fisico di base è quello che ho esposto.

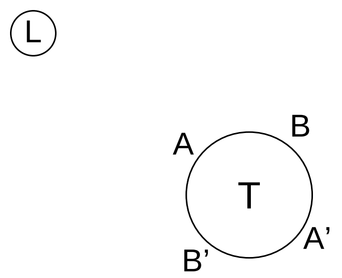

fig. 17–7

In linea di principio le maree non sono l'unico modo per rivelare le forze di marea: se si pesasse un oggetto in A o in A′ (fig. 17–7) si troverebbe un peso un po' minore che non in B o in B′. Il fatto è che la differenza risulta assai piccola (problema n. 16).

Facendo il calcolo si trova che la forza di marea prodotta dalla Luna è proporzionale alla massa della Luna e inversamente proporzionale al cubo della distanza Luna-Terra. Questo a rigore non significa niente: se abbiamo una sola Luna, c'è una sola forza di marea, e non ha senso parlare di proporzionalità. Ma noi non abbiamo solo la Luna: c'è anche il Sole, che in un primo tempo abbiamo trascurato. Il discorso che abbiamo fatto per il moto della Terra dovuto all'attrazione della Luna, lo possiamo ripetere tale e quale anche per il moto dovuto all'attrazione del Sole: anche per il moto della Terra intorno al Sole si trova un effetto di marea; i due effetti sono indipendenti e hanno periodi diversi.

Ci sarà allora una forza di marea lunare e una solare, proporzionali a M/d^3, che si sommeranno vettorialmente. A prima vista sembra che prevarrà quella del Sole, perché la massa del Sole è molto più grande; ma è più grande anche la distanza, e in realtà la forza di marea lunare vince su quella solare per circa un fattore 2. Dunque la marea lunare è prevalente, ma quella solare è tutt'altro che trascurabile.

È questa la ragione — ben nota naturalmente ai marinai e agli oceanografi — per cui in certe fasi lunari le maree sono particolarmente grandi: durante le fasi di luna piena e di luna nuova (sizigie). Quando Sole, Terra e Luna sono allineati, le maree sono grandi perché le forze di marea del Sole e della Luna cospirano a dare effetti nello stesso senso. C'è quindi un ciclo delle maree con periodo metà del mese lunare: nelle sizigie le maree sono grandi, nelle quadrature — cioè al primo e all'ultimo quarto — sono piccole.