CAPITOLO 16

La deflessione della luce: discussione approfondita

Ricordiamo il ragionamento che dal principio di equivalenza ci ha portati al redshift gravitazionale. Il riferimento K sulla Terra e il riferimento K^1 accelerato, lontano da masse, sono equivalenti: tutto quello che succede in K^1 si deve ritrovare in K. In K^1 si fa l'esperimento di Pound e Rebka: abbiamo (fig. 16–1) il trasmettitore T, e il ricevitore R a un'altezza h; si studia l'esperimento dal riferimento inerziale K^0. Questo si fa perché noi sappiamo come devono andare le cose in K^0, dove vale la fisica classica. In K^0 si osserva un effetto Doppler, perché la velocità di R quando riceve la radiazione è diversa da quella di T quando l'ha emessa: quindi la frequenza ricevuta da R sarà minore di quella emessa da T. L'interpretazione come effetto Doppler è valida solo in K^0; ma il risultato finale, cioè il confronto tra le frequenze, è un fatto obbiettivo, indipendente dall'interpretazione che se ne dà. Quindi anche in K^1 si vede l'effetto di redshift, e la stessa cosa succede se si ripete l'esperimento di Pound e Rebka nel riferimento K sulla Terra. (S'intende che questo è vero se vale il principio di equivalenza.) La prova definitiva è l'esperimento, il quale conferma che le cose vanno proprio così.

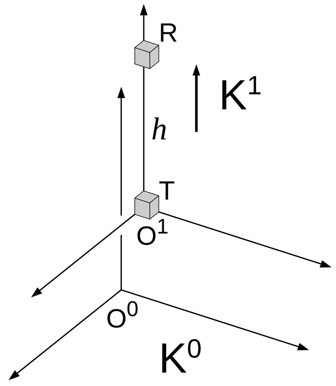

fig. 16–1

Con un discorso del tutto simile si prevede anche la deviazione gravitazionale della luce. Cominciamo a chiederci, nel riferimento K^1, come viaggia la luce che viene fatta partire orizzontalmente. Mettiamo l'asse x orizzontale (fig. 16–2), l'asse z verticale, e l'asse y di conseguenza. Al solito, conviene discutere prima l'esperimento nel riferimento K^0: qui la luce viaggia in linea retta lungo l'asse x, perché il riferimento è inerziale. Siccome K^1 è un riferimento accelerato verso l'alto, rispetto a questo riferimento la luce non può viaggiare in linea retta.

Sappiamo bene che un sasso tirato orizzontalmente, nel riferimento K^0 che è inerziale, percorre l'asse x; ma nel riferimento K^1, che è accelerato verso l'alto, il sasso ha un'accelerazione verso il basso, e quindi descrive una traiettoria parabolica. Ora non c'è nessuna differenza se invece di un sasso si tratta della luce, perché la questione è soltanto cinematica: mentre la luce cammina, il riferimento gli si sposta sotto, per così dire. Ne segue che rispetto al riferimento K^1 la coordinata z del fascio di luce non è costante.

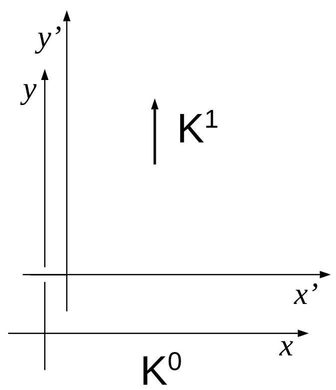

fig. 16–2

Come si vede, non c'entra niente la relatività, né ristretta, né generale. La relatività generale, nel senso del principio di equivalenza, entra solo nel momento in cui dico che questo effetto — che la luce deve descrivere una traiettoria parabolica — me lo devo aspettare anche nel riferimento K, solidale alla Terra.

Se tutto ciò è vero, in un sistema di riferimento solidale alla Terra — in questa stanza, su questo tavolo — potremo fare un esperimento da cui si veda che un fascio di luce partito orizzontalmente arriva all'altra estremità del tavolo un po' più in basso. Il problema n. 8 propone di discutere tale esperimento. Invece di pensare a un esperimento di laboratorio, immaginate pure di lavorare tra due stazioni distanti 1 km, per esempio. C'è solo da calcolare di quanto si abbassa un fascio di luce lanciato orizzontalmente, dopo che ha percorso 1 km. Dal risultato vedrete se l'esperimento si può fare oppure no.

Lo scopo di questo problema è di far capire che in questo contesto la luce non è differente da un proiettile, e che quindi si può ragionare come per un proiettile. Il fatto che la luce viaggia alla velocità c non cambia niente: non ci si deve far suggestionare dall'idea che, siccome la relatività cambia tutto alle grandi velocità (e qui abbiamo a che fare con la luce, che si muove addirittura ... alla velocità della luce) forse non si può parlare nemmeno di traiettoria parabolica ... chissà come vanno le cose in realtà... Una tale preoccupazione non è sempre giustificata. Nel nostro caso, il discorso si fa esattamente come se si trattasse di un sasso lanciato alla velocità di 1 m/s. Non cambia proprio niente; salvo i numeri, naturalmente.

A conti fatti, la deflessione è di $5.6 \cdot 10^{-11}$ m: su di 1 km di percorso viene fuori uno spostamento di mezzo angstrom, le dimensioni di un atomo. Questo spiega perché l'esperimento non è fattibile. Tuttavia, se è vero che in un percorso di 1 km l'effetto è trascurabile, in un percorso più lungo lo spostamento sarebbe più grande: ci si rende conto facilmente che è proporzionale al quadrato del percorso. Infatti il tempo cresce in proporzione, e lo spostamento, essendo l'accelerazione costante, va col quadrato del tempo.

La deflessione prodotta dal Sole

Se quindi si usasse un percorso molto più lungo, e magari si avesse un campo gravitazionale più intenso, si potrebbe ottenere un effetto apprezzabile. Per aumentare il campo, invece della Terra potremo usare il Sole: e così nasce l'idea di studiare la deflessione della luce che passa vicino al Sole. Non farò il calcolo, che lascio per esercizio (problema n. 9); accennerò solo come s'imposta il ragionamento. Prima però occorre notare che con gli argomenti che abbiamo usato finora in realtà non possiamo fare una previsione corretta su questa nuova situazione.

Il principio di equivalenza permette soltanto di prevedere quale sarà il comportamento della luce in un campo gravitazionale costante, perché soltanto un campo gravitazionale costante è equivalente a un riferimento accelerato. Infatti in un riferimento accelerato la forza d'inerzia, e quindi l'accelerazione che ne deriva, è la stessa in tutti i punti.

Siccome invece il campo gravitazionale del Sole non è uniforme (il raggio di luce vicino al Sole passa a distanze diverse, e il campo della gravità varia sia in grandezza, sia in direzione), la situazione è più complessa, e richiede — per lo meno — degli strumenti matematici non elementari. Poi c'è anche un'altra complicazione, che per il momento è meglio ignorare.

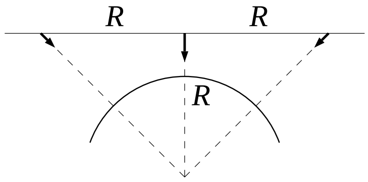

fig. 16–3

Possiamo tuttavia arrivare almeno all'ordine di grandezza, nel modo seguente (fig. 16–3): pensando alla luce come se fosse un proiettile, su di essa agisce una forza deviatrice (un campo gravitazionale) che cambia in grandezza e direzione. La forza esiste a qualunque distanza, anche se grandezza e direzione sono variabili. Semplifichiamo allora il problema supponendo che l'accelerazione di gravità sia costante, ma che agisca solo su di un tratto finito della traiettoria. Per esempio, se R è la distanza minima, prendiamo un tratto di lunghezza $2R$ e facciamo il conto come se l'accelerazione fosse quella che si ha alla distanza R — cioè quella massima — ma agisse soltanto per un tratto $2R$. Cioè prendiamo un'accelerazione più grande del giusto, ma compensiamo questo facendola agire per un tratto minore.

Naturalmente tutto ciò non è affatto rigoroso; però chiunque abbia un po' di pratica sa che in generale in tal modo si ottiene il risultato corretto, a meno di un fattore numerico. La ragione essenziale è di carattere dimensionale. Infatti una volta ottenuta un'espressione che ha le giuste dimensioni, la sola cosa per cui potrà essere sbagliata sarà un fattore 3, π, o qualcosa del genere: in generale un fattore non molto diverso da 1. In realtà questa non è una dimostrazione: il fatto che l'espressione sviluppata nel calcolo sia dimensionalmente corretta non vieta che il fattore, il numero puro che manca, possa essere anche 10^{15} o 10^{-15}; molto grande o molto piccolo. Di solito non succede, ma non c'è modo di dimostrare che non può succedere.

Per di più, occorre assicurarsi che con le grandezze che intervengono nel fenomeno non si possano costruire fattori adimensionali (numeri puri); altrimenti resta indeterminata una funzione di quei fattori. Un esempio classico di tale situazione sono proprio le formule relativistiche, nelle quali nessun argomento dimensionale potrebbe farci scoprire il fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, che è funzione del numero puro v/c.

Dopo tutte queste avvertenze, resta solo da dire che nel nostro caso fortunatamente va tutto liscio.

Per questo problema è più utile calcolare l'angolo di deviazione. Quando la luce è abbastanza lontana dal Sole non viene deviata più, e quindi si può parlare dell'angolo formato dalla direzione iniziale e da quella finale. Il metodo più semplice di calcolare quest'angolo è di ragionare sul vettore velocità. La luce entra (fig. 16–4) con una velocità rappresentata dal vettore $\vec{v}_0$; all'uscita il vettore velocità $\vec{v}$ è cambiato, e la variazione $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ è pari all'accelerazione di gravità moltiplicata per il tempo per cui agisce:

$$\Delta\vec{v} = \vec{g}\Delta t.$$

Se si fa il calcolo, si trova per l'angolo α la seguente espressione:

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2 R}.$$

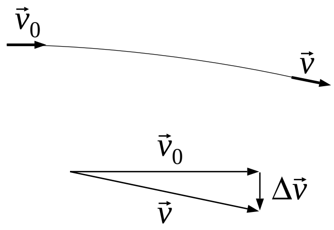

fig. 16–4

Possiamo supporre che R sia il minimo possibile, cioè il raggio del Sole; si ottiene allora:

$$\alpha = 0''.88$$

Il raggio di Schwarzschild

È noto che questo numero è in realtà la metà esatta del risultato giusto. Si potrebbe credere che ciò dipenda dalle approssimazioni che abbiamo fatto; ma invece la ragione è molto più profonda, e forse non è il momento di discuterla.

Per dirlo in modo più esplicito: se si fa il calcolo newtoniano esatto, pensando a un punto materiale che si approssima al Sole alla velocità c, e studiandone la deflessione gravitazionale, si ritrova $\alpha = 0''.88$. Non è questione di approssimazione: il fatto che il calcolo relativistico corretto dia il risultato doppio resta per ora senza spiegazione. Prendiamolo quindi a scatola chiusa: il valore corretto è

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R} = 1''.75 \qquad (16\text{–}1)$$

Non mi vorrei ora dilungare sugli aspetti sperimentali della questione, che nelle linee generali ritengo noti. Il problema astronomico è piuttosto delicato. Si fa presto a dire che occorre misurare lo spostamento apparente delle stelle vicine al Sole durante un'eclisse totale; la misura effettiva pone grossi problemi, e non è un caso se ci sono voluti anni prima di avere a disposizione dei dati sufficientemente attendibili (v. ad es. in [2]).

In tempi più recenti, misure molto più accurate sono state ottenute usando quasar in luogo di stelle. Il vantaggio è duplice: da un lato, trattandosi di radiosorgenti, il disturbo causato dalla radiazione solare è molto minore; dall'altro, è possibile misurare gli angoli con grande precisione mediante radiointerferometri a base continentale o intercontinentale (VLBI).

Al giorno d'oggi è assodato che l'effetto di deflessione della luce vicino al Sole esiste, e il valore misurato concorda entro qualche percento con quello (16–1), previsto dalla teoria di Einstein.

Non è casuale che l'espressione $2GM/c^2R$ ottenuta per α sia la stessa che compare nella formula del redshift; anzi, proprio perché $2GM/c^2R$ è un'espressione ricorrente nella fisica che stiamo studiando, di solito la si scrive R_*/R, dove naturalmente

$$R_* = \frac{2GM}{c^2}. \tag{16–5}$$

Dato che R_*/R è un angolo, cioè un numero puro, R_* ha le dimensioni di una lunghezza: come abbiamo già visto, per la massa del Sole R_* vale circa 3 km; per la Terra invece $R_* \simeq 0.9$ cm.

R_* si chiama "raggio di Schwarzschild" di una massa. Nel caso del redshift, R_* rappresenta quel raggio al di sotto del quale la luce non esce più fuori, e succedono altre cose strane... Ma il fatto importante da tener presente è che un corpo produce effetti gravitazionali (nel senso della relatività generale) che sono tutti espressi in maniera semplice per mezzo del suo raggio di Schwarzschild: perciò anziché pensare alla grandezza della massa conviene pensare alla grandezza del raggio di Schwarzschild corrispondente.

Così ad es. l'angolo di deflessione è piccolo perché il raggio fisico del Sole è molto più grande del raggio di Schwarzschild: questo è di 3 km, quello di circa $7 \cdot 10^5$ km. Lo stesso si può dire per la Terra: anzi il rapporto è ancora più piccolo. Se si vuole vedere un effetto di deflessione grande — come del resto se si vuole un grosso effetto di redshift — si debbono cercare oggetti che abbiano dimensioni non troppo diverse dal loro raggio di Schwarzschild, quindi oggetti che hanno una densità assai elevata (su questo punto ritorneremo più avanti).

Il percorso dei raggi nella deflessione

Forse vale la pena di soffermarci ancora un momento sulla deflessione gravitazionale, per fare un commento alla figura: infatti credo che quando si tenta di spiegare in maniera elementare la deflessione della luce possa sorgere una difficoltà nel capire quali sono i raggi di luce da prendere in considerazione.

Come si presenta la situazione? Abbiamo il Sole S (fig. 16–5), una stella Σ, e noi — cioè la Terra T — dalla parte opposta del Sole. Se il Sole non ci fosse, la luce andrebbe in linea retta, dalla stella alla Terra. Ma c'è il Sole, che deflette la luce: allora il raggio che parte da Σ anziché andare in linea retta s'incurva (tratteggiata). Il raggio incurvato non incontra più la Terra; ma questo non vuole certo dire che noi non vedremo più la stella!

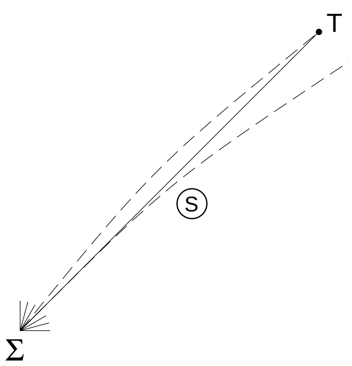

fig. 16–5

Il fatto è che dalla stella partono infiniti raggi, e noi dovremo semplicemente cercare quel raggio che arriva sulla Terra dopo aver subito la deflessione gravitazionale. Se la luce viene sempre incurvata verso destra, è chiaro che dovremo prendere un raggio che parte un po' più verso sinistra, come — esagerando — si vede nella figura.

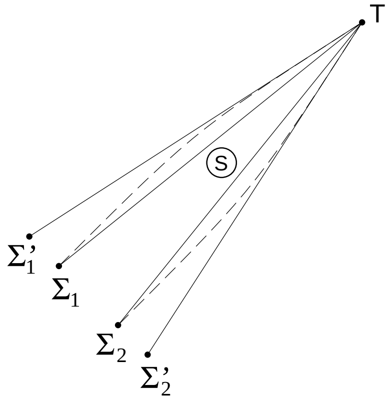

fig. 16–6

Naturalmente per la misura una stella sola non basta: bisogna prenderne due, Σ_1 e Σ_2, da parti opposte del Sole. La situazione per la seconda stella è simmetrica della prima, come mostra la fig. 16–6. Quando il Sole non sta fra la Terra e le stelle, la luce va in linea retta, e l'angolo misurato dalla Terra è un certo ϑ; quando invece c'è il Sole in mezzo, l'angolo è più grande. In altre parole, si vedono le stelle come se stessero in Σ'_1 e Σ'_2: *quando c'è il Sole in mezzo le stelle appaiono allontanarsi tra loro.*

Mi sono soffermato su questo punto perché a prima vista può sembrare che ci sia una contraddizione: se la luce viene attratta dal Sole, come mai quando c'è il Sole nel mezzo le stelle paiono allontanarsi? Non c'è niente di difficile, però bisogna avere idee chiare su che cosa significa "vedere" una sorgente di luce, sul fatto che da una sorgente partono infiniti raggi, ecc.