CAPITOLO 8

L'impulso relativistico

Riassumendo: i principi della dinamica restano tutti invariati, con la sola clausola di esprimere il terzo principio come conservazione della quantità di moto. Sembra dunque che non ci sia da cambiare niente nella meccanica newtoniana: vedremo però che per mantenere la coerenza con tutto il resto occorre una diversa definizione di p. Se ai tre principi tentassimo di aggiungere $p = mv$, troveremmo una contraddizione con quello che abbiamo già fatto.

È per questa ragione che invece di prendere per p l'espressione mv, prendiamo

$$p = m\,\frac{dx}{d\tau}. \tag{8–1}$$

In luogo della velocità dx/dt usiamo una grandezza un po' diversa, che è la derivata di x rispetto al tempo proprio. (Ho scritto la definizione in forma scalare, ma chiaramente si può anche darle una forma vettoriale; per i nostri scopi la cosa non ha importanza.) Dico che questa è l'espressione corretta dell'impulso relativistico, e fra poco vedremo fino a che punto lo posso giustificare. Ma che vuol dire "espressione corretta dell'impulso relativistico"? L'espressione corretta deve avere certi requisiti:

1. Deve godere di una proprietà di conservazione, e naturalmente in accordo col principio di relatività, cioè valida in qualunque riferimento inerziale: se abbiamo un insieme di particelle che si muovono, non basta verificare che la quantità di moto totale è costante in un certo riferimento K, ma dobbiamo dimostrare che lo stesso risultato è vero, con quella definizione, qualunque sia il riferimento in cui studiamo il nostro insieme di particelle.
2. Le grandezze che si conservano sono molte: non c'è solo la quantità di moto; ad es. anche la carica elettrica si conserva. Come faccio a decidere che si tratta proprio della quantità di moto? I criteri sono essenzialmente due, uno dei quali è un "principio di corrispondenza."

Il principio di corrispondenza

Il principio di corrispondenza è stato inventato da Bohr in un altro contesto, ma interpretato in senso estensivo si applica anche nel nostro caso. Se si modifica una parte della fisica (in questo caso la meccanica) la formulazione precedente non è da buttar via, ma rimane valida entro certi limiti: quando sono soddisfatte certe condizioni, se certi parametri assumono valori sufficientemente piccoli (o sufficientemente grandi). Il principio di corrispondenza richiede che la nuova formulazione, applicata entro quei limiti, riproduca i risultati della vecchia.

Così una definizione di quantità di moto per essere accettata deve identificarsi con la vecchia quando la meccanica newtoniana è buona. Ora tutti gli effetti relativistici sono legati al rapporto tra la velocità dei corpi e quella della luce: quindi il campo di validità della meccanica newtoniana è dato dalla condizione $v \ll c$. Ma quando la velocità è molto piccola dt e $d\tau$ s'identificano (ricordate che $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$) e perciò la condizione è evidentemente soddisfatta dalla definizione (8–1).

Avrete notato che ho continuato a scrivere "m" e non ho detto chi sia questa m. Tuttavia il principio di corrispondenza automaticamente ci dà la risposta: è la massa che si definisce in meccanica newtoniana, quella che misureremmo quando il corpo ha una velocità piccolissima; in breve, la *massa di riposo*.

Molto spesso nelle trattazioni della relatività s'introduce un altro tipo di massa, detta "massa relativistica", e dipendente dalla velocità: ma secondo me di massa relativistica è molto, ma molto meglio non parlarne affatto. Per non interrompere il discorso non mi dilungo su questo punto, che riprenderò in seguito, perché lo considero un punto centrale nella didattica della relatività.

L'impulso e la definizione dinamica di forza

Tornando alla definizione dell'impulso, il secondo criterio è a prima vista ancora più importante: deve valere la seconda legge della dinamica, ossia la forza dev'essere uguale alla derivata dell'impulso rispetto al tempo. Qui si dovrebbe aprire un lungo discorso riguardo alla tendenza che c'è stata nella fisica di questo secolo verso la liquidazione dell'idea di forza. Si può vedere da molte parti che la forza è andata perdendo d'importanza nella costruzione concettuale della fisica. Nel nostro ambito la liquidazione dell'idea di forza si traduce così: una volta deciso che la (8–1) è l'espressione corretta della quantità di moto, la relazione $F = dp/dt$ non è più tanto da usare come una legge che collega la forza alla quantità di moto, entrambe note separatamente, ma in molte situazioni è in realtà un modo per definire la forza: la definizione *dinamica* di forza.

Se avete un sistema di particelle (elettroni, atomi) interagenti, in moltissimi casi non c'è nessuna maniera indipendente per misurare la forza: per i sistemi macroscopici può andar bene il solito dinamometro, ma quando si ha a che fare con le molecole di un gas o peggio ancora con gli elettroni dentro un atomo, chi può attaccarci un dinamometro? In poche parole: come si dà una definizione operativa di forza? In questi casi si è costretti a rinunciare alla forza come concetto indipendente, e ad intenderla semplicemente come un modo per esprimere che qualche azione esterna fa cambiare la quantità di moto del corpo. Se vedo che un corpo non conserva la sua quantità di moto, descrivo la situazione dicendo che quel corpo è soggetto a una forza. Una tale affermazione non è vuota se per esempio si scopre che l'azione è reciproca: se un oggetto interagisce con un altro, non solo il primo fa cambiare la quantità di moto del secondo, ma questo fa cambiare la quantità di moto di quello, e in maniera tale che la quantità di moto complessiva si conserva. Questa naturalmente è la traduzione del terzo principio, cioè del fatto che le due forze sono uguali e opposte.

Ci sono situazioni in cui si può andare oltre. Per esempio quando scriviamo l'espressione della forza di Lorentz stiamo dicendo un'altra cosa: che una carica posta in un campo elettromagnetico risente una forza di cui sappiamo dare l'espressione quantitativa in termini dell'intensità dei campi. Se conosciamo la forza, possiamo usarla nella seconda legge della dinamica per prevedere il moto della particella. Questo sembrerebbe contraddire il discorso di prima: infatti qui non si dà della forza solo una definizione dinamica, ma anche un'espressione indipendente. Tuttavia preferisco lasciare sospesa la questione: se cedessi alla tentazione di discutere tutti i problemi che si aprono, dovrei toccare tutta la fisica.

Riassumendo: noi usiamo la relazione $F = dp/dt$ in larga misura — e sia pure con qualche cautela — come definizione dinamica di forza; quindi possiamo conservarla inalterata.

La conservazione dell'impulso

Ricordate ora che avevamo cominciato con la domanda: chi mi dice che la (8–1) è una definizione giusta di quantità di moto? Ho risposto che i criteri sono: *a*) che valga un principio di corrispondenza (e su ciò siamo tranquilli); *b*) che la somma delle quantità di moto di un insieme isolato di punti materiali si conservi (e questo dobbiamo ancora discuterlo).

Si può effettivamente dimostrare che la quantità di moto come noi l'abbiamo definita si conserva; anzi si può fare di più: dimostrare che la (8–1) è la sola espressione compatibile coi criteri che abbiamo enunciati. Dal punto di vista didattico ritengo però che non sia il caso di tentare una dimostrazione, perché sebbene non sia complicata come matematica lo è invece come logica, e non mi sembra alla portata dello studente tipo. Non trovo niente di scandaloso nel limitarsi a dire che la dimostrazione si può fare. È importante sapere che questa legge di conservazione *è un teorema* nella nostra teoria, cioè che se ne può dare una deduzione logica dai principi già enunciati; però si può anche dire che ci sono un bel po' di prove sperimentali della conservazione di questa grandezza. Se anche non fossimo capaci di dare la dimostrazione, potremmo sempre prenderlo come un principio sperimentale: sta di fatto che nelle interazioni tra particelle la nostra p si conserva.

Quali sono le prove sperimentali? Alcuni esempi si trovano nel già citato libro di Taylor e Wheeler [1]: come ci si poteva aspettare, le prove vengono dalla fisica nucleare e dalla fisica delle particelle, perché in questi campi le situazioni relativistiche sono comuni, e perciò un'eventuale mancata conservazione della nostra p dovrebb'essere appariscente.

Nello stesso libro si dà anche una stima quantitativa: negli esperimenti ad alte energie si avrebbero ogni giorno un milione di verifiche delle leggi della dinamica relativistica. Se considerate che il libro ha più di vent'anni, la stima oggi sarebbe assai più alta, perché le macchine acceleratrici hanno aumentato di molto sia l'energia, sia l'intensità dei fasci. Sembra quasi uno slogan pubblicitario: "ogni giorno ci sono un milione di prove sperimentali della dinamica relativistica." Ma non è cosa da buttar via, perché c'insegna che se ci rivolgiamo a un fisico sperimentale — che forse non ha tanta preoccupazione per i cavilli logici, ma guarda molto di più a come vanno le cose nella realtà — e gli domandiamo se crede alla conservazione della quantità di moto, c'è pericolo che ci rida in faccia. Certamente ci risponderà che per lui è vita di tutti i giorni, che non fa altro che fare conti in cui usa queste equazioni, e funzionano sempre.

Ecco un aspetto che non bisogna sottovalutare. Vi sono idee che storicamente possono essere state un gran problema, perché da principio, quando erano nuove, si capivano poco, avevano poche e rare verifiche sperimentali; ma poi, almeno in un certo ambito, sono diventate di senso comune. Sebbene questo atteggiamento non sia il più naturale per una mentalità più teorica — ad es. per chi scrive — è però un tratto importante nella costruzione della certezza scientifica. Mi sembra giusto sottolinearlo: potete fare tutte le elucubrazioni che volete, ma che la Terra è rotonda oggi lo sanno tutti. Se domandate a un bambino come fa a dire che la Terra è rotonda, probabilmente vi risponderà: "ma come? ci sono i satelliti, le navette, io li ho visti in televisione!" Tutti i problemi che potevano esistere un tempo a proposito della sfericità della Terra oggi sono superati anche nel senso comune, perché ormai anche chi non ha mai fatto personalmente il giro del mondo sa benissimo come stanno le cose.

Volevo appunto farvi riflettere su questo: quando certe idee sono diventate senso comune della scienza, le pignolerie sul loro fondamento logico e su esperimenti più o meno cruciali in senso storico, sono abbastanza superflue dal punto di vista didattico. Questo è lo spirito in cui sto cercando di presentare la relatività: oggigiorno certe cose sono tranquillamente acquisite. Può anche darsi che in futuro qualche nuovo esperimento ci obblighi a rivederle; quando succederà ne riparleremo.

Dimostrazione della (8–1)

A titolo di esercizio ritengo utile presentare la dimostrazione cui ho accennato sopra, sebbene la si trovi in tutti i libri. Questo perché di solito la si fa appoggiandosi sulle trasformazioni di Lorentz, che noi non abbiamo nemmeno citato; è perciò opportuno far vedere, su questo esempio, che le trasformazioni di Lorentz non sono necessarie per un'esposizione a livello elementare della relatività.

Vogliamo dimostrare che la (8–1) è l'unica espressione compatibile con le condizioni:

a) la conservazione dell'impulso vale in qualsiasi riferimento inerziale;

b) l'espressione dell'impulso si riduce a quella newtoniana a piccole velocità.

Stranamente, la dimostrazione è assai più semplice se si considerano moti in almeno due dimensioni, e perciò così faremo. Se il moto è in più dimensioni occorre in primo luogo postulare qualcosa sulla direzione dell'impulso, ma è ovvio che si dovrà prenderlo parallelo alla velocità.

Prenderemo in esame un urto elastico tra due particelle di uguale massa, che indicherò con 1 e 2, e lo studieremo da tre riferimenti. Il primo, che chiamerò A, è quello in cui l'impulso totale è nullo, per cui le due particelle hanno velocità e impulsi opposti, sia prima sia dopo l'urto. Il carattere elastico dell'urto ci assicura inoltre che le velocità (e perciò gli impulsi) non cambiano modulo nell'urto, ma soltanto direzione (fig. 8–1). Supporremo inoltre che l'urto sia *radente*, cioè che anche il cambiamento di direzione (l'angolo α in figura) sia molto piccolo: vedremo poi lo scopo di questa ipotesi, e potremo anche precisarla meglio. Osservate che scelti gli assi cartesiani come in figura, le componenti x delle velocità non cambiano nell'urto, mentre quelle y s'invertono.

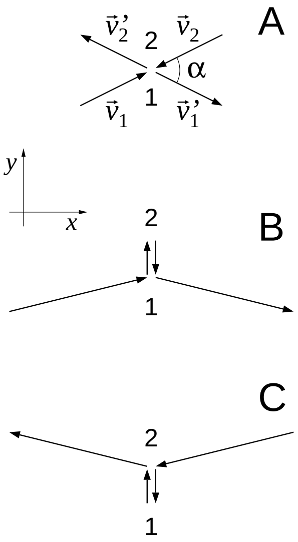

fig. 8–1

Il riferimento B è quello in cui la particella 2 ha nulla la componente x della velocità: in altre parole B accompagna la particella 2 secondo l'asse x. Invece C è il riferimento in cui si annulla la componente x della velocità di 1: è chiaro che B e C sono in situazione simmetrica rispetto alle due particelle, e questa simmetria sarà usata in modo essenziale nel seguito. L'ipotesi di urto radente comporta che nel riferimento B la velocità di 2 sia molto piccola: la supporremo non relativistica, in modo da poter usare l'espressione newtoniana dell'impulso.

E ora precisiamo le notazioni: gli indici $_1$ e $_2$ in basso rappresentano le due particelle; le grandezze dopo l'urto saranno designate da apici, quelle prima dell'urto senza apice. Abbiamo dunque nel riferimento B:

$$p_{2y} = -mv_2, \quad p'_{2y} = mv_2,$$
$$p'_{2y} - p_{2y} = 2mv_2,$$
$$(p'_{2x} = p_{2x} = 0).$$

La conservazione dell'impulso impone perciò

$$p'_{1y} - p_{1y} = -2mv_2,$$
$$p'_{1x} = p_{1x};$$

ne segue

$$p_{1y} = mv_2, \quad p'_{1y} = -mv_2.$$

Seguiamo il moto della particella 1 per un intervallo di tempo Δt_1 dopo l'urto: se Δs_1 è il suo spostamento, avremo

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1} = \frac{p_{1y}}{p_1} = \frac{mv_2}{p_1}$$

da cui:

$$p_1 = mv_2 \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1} = m \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2} \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1}, \tag{8–2}$$

dove Δy_2 è ovviamente lo spostamento di 2 (secondo l'asse y) in un intervallo qualsiasi Δt_2. Se scegliamo Δt_2 in modo che sia $\Delta y_2 = \Delta y_1$, l'espressione (8–2) si semplifica:

$$p_1 = m \frac{\Delta s_1}{\Delta t_2} = mv_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}. \tag{8–3}$$

Ai due tempi Δt_1, Δt_2 corrisponderanno per le due particelle i tempi propri dati da:

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_1^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \tag{8–4}$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta t_2^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_2^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \tag{8–5}$$

dove l'indice $^{\mathrm{B}}$ in alto ricorda il riferimento.

Nel riferimento C i ruoli di 1 e 2 si scambiano; avremo perciò

$$\Delta t_1^{\mathrm{C}} \sqrt{1 - \left(v_1^{\mathrm{C}}\right)^2/c^2} = \Delta t_2^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_2^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2}, \tag{8–6}$$

mentre per l'invarianza del tempo proprio

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{C}} \sqrt{1 - \left(v_1^{\mathrm{C}}\right)^2/c^2}. \tag{8–7}$$

Confrontando le (8–4), (8–6) e (8–7) si trova:

$$\Delta t_1 \sqrt{1 - v_1^2/c^2} = \Delta t_2 \sqrt{1 - v_2^2/c^2} \simeq \Delta t_2, \tag{8–8}$$

perché nel riferimento B la particella 2 è non relativistica (l'indice $^{\mathrm{B}}$ è ormai sottinteso).

La (8–6) mostra che

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2,$$

cosa che si poteva anche trovare osservando che Δy_1 e Δy_2 sono gli stessi in tutti i riferimenti, e perciò sono uguali (basta pensare al rif. A). Questa proprietà d'invarianza di Δy (che vale naturalmente solo per moti lungo l'asse x) non è un fatto nuovo: l'abbiamo già usata nei ragionamenti sull'orologio a luce, dandola per scontata senza fermarci a discuterla. Il problema n. 7 chiede di giustificarla rigorosamente.

Infine dalla (8–8)

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

e sostituendo nella (8–3) si arriva al risultato finale:

$$p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

che si può scrivere anche in altro modo, osservando che $\vec{p}$ è parallelo a $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, mentre $dt/d\tau = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau}.$$

Abbiamo visto che la (8–1) è la sola forma possibile per l'impulso; occorrerebbe ancora dimostrare che in realtà l'impulso così definito si conserva in generale, e non solo nei casi particolari considerati; ma ciò va al di là dei nostri scopi attuali. Mi limito a ricordare che la dimostrazione diventa immediata appena s'introduce l'energia, e si scoprono le proprietà di trasformazione di impulso ed energia per cambiamenti di riferimento.

Un'applicazione: il moto in campo magnetico

Un cavallo di battaglia dei fautori della massa relativistica è la deflessione di particelle cariche in campo magnetico. Si dice: come si può fare a meno di usare la massa relativistica, visto che essa entra in modo determinante per calcolare il raggio della traiettoria? Vediamo perciò come si può affrontare questo problema senza usarla.

Poiché la forza di Lorentz è sempre perpendicolare alla velocità, e quindi all'impulso, si vede che $\vec{p}$ non varia in modulo, ma solo in direzione. Come nel caso non relativistico, se $\vec{v}$ e $\vec{p}$ sono inizialmente ortogonali al campo restano tali, e perciò il moto è circolare uniforme.

La trattazione newtoniana della dinamica del moto circolare uniforme è basata sulla formula dell'accelerazione centripeta: $a = v^2/r$. Questa formula non è "sbagliata" nella dinamica relativistica, ma perde di utilità: in luogo dell'accelerazione $d\vec{v}/dt$ è più utile calcolare $d\vec{p}/dt$, che è legato direttamente alla forza. Per fortuna lo sforzo fatto per ricavare l'accelerazione centripeta non è sprecato, perché permette di arrivare rapidamente al nuovo risultato. Dato che $\vec{p}$ è sempre parallelo a $\vec{v}$ una similitudine di triangoli permette di scrivere la proporzione

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| : p = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| : v.$$

Ma $|d\vec{v}/dt| = v^2/r$, e ne deriva

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \frac{vp}{r}.$$

Confrontando con l'espressione della forza di Lorentz

$$F = evB$$

si ottiene quindi

$$p = eBr,$$

che è la formula fondamentale per il problema in esame. Questa mostra in primo luogo che nel moto di una particella di carica nota in un campo magnetico noto la misura del raggio di curvatura della traiettoria permette di ricavare direttamente l'impulso, senza bisogno di conoscere la relazione fra p e v; e poi che se si vuole tenere r fisso (macchine acceleratrici), dal momento che $p \to \infty$ quando $v \to c$, occorrerà aumentare progressivamente B; o viceversa, se non si sanno realizzare campi magnetici oltre un certo limite, per aumentare p occorrerà usare r maggiori, cioè orbite più grandi, ecc.