Insegnare relatività

nel XXI secolo

Modelli di universo

Premessa

Fare un modello cosmologico significa fare ipotesi sulla *distribuzione di materia* nell'Universo e sulla *geometria dello spazio-tempo*.

Le due ipotesi non sono indipendenti nel quadro della RG, dal momento che la teoria lega appunto la geometria alla distribuzione della materia.

Per affrontare il primo problema bisogna guardare l'Universo più o meno con l'atteggiamento cui siamo abituati quando studiamo un gas.

Su scala microscopica un gas consiste di atomi, che a loro volta hanno dei costituenti interni; analogamente possiamo dire che le stelle nel loro insieme si raggruppano in oggetti compatti, che sono le galassie.

Le galassie sono, grosso modo, gli “atomi” dell'Universo.

Ci sono almeno 6 *ordini di grandezza* fra le dimensioni di una galassia tipica e quelle dell'Universo visibile.

Quanto alla geometria dello spazio-tempo, ci torneremo fra poco.

Il principio cosmologico

La prima semplificazione fondamentale è di assumere che la densità di galassie – e quindi la *densità di materia* nell'Universo – *sia la stessa dappertutto*.

Possiamo esprimere quest'ipotesi col *principio cosmologico* (PC): le proprietà fisiche dell'Universo sono le stesse *in tutti i punti dello spazio* e *in tutte le direzioni*.

Brevemente: l'Universo è *omogeneo* e *isotropo*.

(In realtà l'omogeneità è necessaria per avere l'isotropia: ometto la spegazione.)

Argomenti a favore del principio cosmologico

Che motivo abbiamo per fare un'ipotesi del genere?

Cominciamo col dire che questo è *l'unico modello semplice* che si può fare; studiamone le conseguenze.

Se le previsioni risultassero in disaccordo coi dati di osservazione, cercheremmo di fare un modello più sofisticato.

Ci sono anche delle indicazioni. Ne cito tre:

– la legge di Hubble

– la distribuzione delle galassie

– l'isotropia della radiazione di fondo.

La legge di Hubble

Come abbiamo visto, legge di Hubble c'insegna che – almeno per quanto riguarda il moto delle galassie – ciò che vediamo dal nostro osservatorio O non è diverso da ciò che vedremmo in O_1 o in O_2.

Questo ci autorizza a pensare che gli osservatori O, O_1 e O_2 siano *nelle stesse condizioni fisiche*.

Naturalmente non si tratta di una *prova*, ma solo di un *indizio*; che però parla a favore di un modello *omogeneo*.

Gli altri indizi

Quanto alla distribuzione delle galassie, si tratta di un tema assai complesso e ancora in evoluzione.

Esistono *ammassi* e *super-ammassi* di galassie.

A scala più grande l'Universo avrebbe una *struttura a* “bolle”: grandi regioni quasi vuote, con superfici o filamenti dove si concentra la materia.

Tuttavia la distribuzione osservata giustifica ancora di prendere quella omogenea come una “approssimazione zero”, da cui partire.

E d'altra parte al nostro livello non è pensabile affrontare modelli più complicati...

Della radiazione di fondo credo che purtroppo non avremo tempo di occuparci.

Il problema del tempo

Il PC parla di omogeneità spaziale dell'Universo; tuttavia nell'enunciarlo non ho messo in evidenza il ruolo giocato dal *tempo*.

Il problema non esisterebbe se l'Universo fosse *stazionario*; ma abbiamo visto che la distanza delle galassie aumenta, e quindi la densità della materia *diminuisce nel tempo*.

Potremo dunque dire che l'Universo è omogeneo solo se lo guardiamo in *un determinato istante.*

Però questo apre nuovi problemi. *Che significato ha* parlare di “stesso istante” per tutto l'Universo?

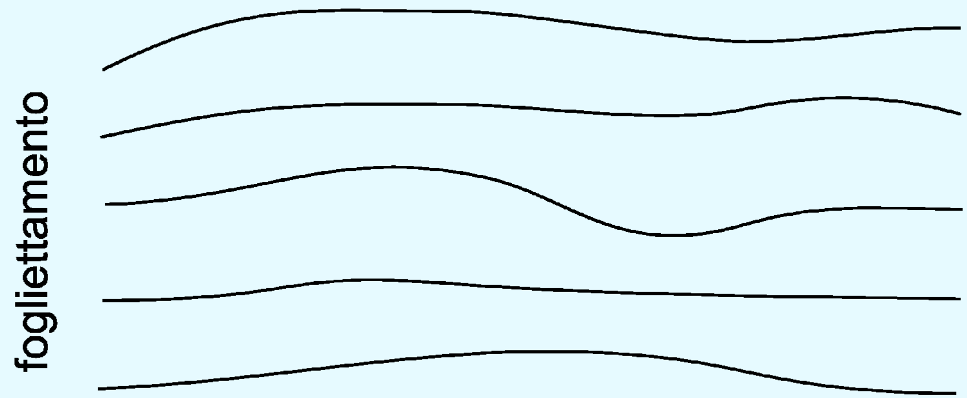
Il problema del tempo

La questione è abbastanza semplice se la si guarda in modo astratto: consideriamo lo spazio-tempo (una *varietà* 4-dimensionale) e definiamo in esso una famiglia d'*ipersuperfici di tipo spaziale*.

La forma di queste ipersuperfici può essere *qualsiasi*: occorre e basta che non s'intersechino, e che *per ogni punto* dello spazio-tempo ne passi *una* (*una sola*).

Allora potremo *parametrizzare* la famiglia con una variabile reale *t*, e questo è il tempo di cui parliamo.

Naturalmente ciò può farsi *in infiniti modi*, nessuno preferibile all'altro dal punto di vista matematico.



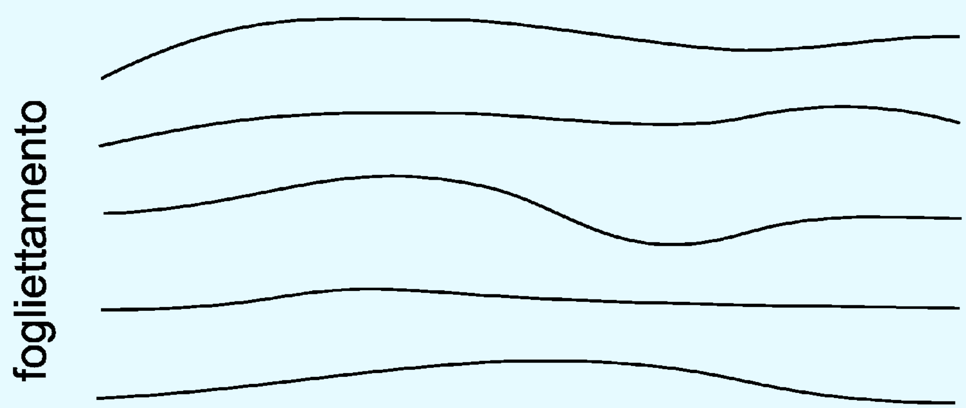
Nuova versione del PC

Ora possiamo riformulare il principio cosmologico in maniera più corretta, all'incirca così:

È possibile definire la famiglia d'ipersuperfici spaziali in maniera tale che se si misura la *densità* di materia *in un punto* di una determinata ipersuperficie si trova *la stessa densità* che si troverà in *qualunque altro punto* della stessa ipersuperficie.

E questo accade a ogni t.

Chiameremo queste le *ipersuperfici di omogeneità*.



In realtà ciò non basta: vogliamo anche che l'Universo appaia *isotropo*.

Si può precisare a questo scopo la definizione, ma non insisto.

È invece importante sottolineare che l'esistenza di una famiglia d'ipersuperfici di omogeneità, *non è un fatto banale*.

Potrebbe anche accadere il contrario: in altre parole, qui stiamo facendo *una precisa affermazione* sulla struttura geometrica dell'Unvierso, che può risultare vera o falsa *dal punto di vista osservativo*.

(Questa discussione non ha uno scopo didattico: il livello di astrazione richiesto è certamente superiore a quello dello studente medio, e non solo medio, direi.)

Il modello di universo a curvatura costante

L'idea fondamentale della RG è che le *proprietà geometriche* dello spazio-tempo dipendono esclusivamente dalla *distribuzione della materia*.

Per esempio lo spazio-tempo è curvo intorno al Sole appunto perché c'è il Sole: la curvatura dipende dalla massa del Sole.

Questo presupposto va adesso combinato col PC: se si ammette che la densità di materia è la stessa dappertutto, anche la *curvatura* dello spazio-tempo sarà *la stessa dappertutto*.

Quindi abbiamo un modello di universo *a curvatura costante*.

Però attenzione: si tratta di costanza *nello spazio*, *non nel tempo*.

Lo spazio-tempo è quadrimensionale: se consideriamo l*e sezioni tridimensionali* a t assegnato, il PC ci dice che *queste sezioni sono a curvatura* (tridimensionale) *costante*.

Però se la misuriamo a tempi successivi, la curvatura può benissimo cambiare.

Anzi, dal momento che oggi sappiamo che *l'Universo si espande*, è chiaro che il raggio di curvatura *va aumentando nel tempo*.

Il parametro di scala

Questo raggio di curvatura è il parametro cosmologico fondamentale, ed è una funzione del tempo $R(t)$.

Se noi conosciamo la funzione $R(t)$, abbiamo un *modello cosmologico* ben determinato.

Supponiamo quindi di conoscere questa funzione, e vediamo che cosa se ne può ricavare.

In cosmologia $R(t)$ si chiama *parametro di scala*, anziché raggio di curvatura.

Ci sono per questo due buone ragioni:

– esistono geometrie per le quali il termine "raggio" è poco appropriato (quelle a curvatura *nulla* o *negativa*)

– dato che al variare di R la sezione si espande o si contrae, cambiando "scala", il termine "parametro di scala" rende adeguatamente l'effetto dell'*evoluzione nel tempo*.

Gli spazi a curvatura costante

Esistono solo tre tipi di spazi (tridimensionali) a curvatura costante, tradizionalmente contraddistinti dal valore di un parametro k:

– lo spazio *euclideo* ($k = 0$, curvatura nulla)

– lo spazio *sferico* ($k = 1$, curvatura positiva)

– lo spazio *iperbolico* ($k = -1$, curvatura negativa).

Uno spazio tridimensionale curvo è un'idea poco intuitiva, perché lo spazio a cui siamo abituati è euclideo.

Si solito si ricorre a un'analogia, che consiste nel *togliere una dimensione*, cioè nello studiare uno spazio a curvatura costante *bidimensionale*.

L'esempio più semplice di spazio bidimensionale a curvatura costante è la s*uperficie di una sfera*.

È però molto importante non commettere un errore.

Noi abbiamo esperienza della superficie di una sfera *come superficie immersa in uno spazio tridimensionale*.

Si sarebbe così indotti a credere che *se lo spazio* tridimensionale *è curvo*, ciò vuol dire che *esiste una quarta dimensione* spaziale, in cui il nostro spazio s'incurva.

Tale quarta dimensione non va neppure confusa col tempo, che è sì una quarta dimensione, ma dello *spazio-tempo*.

Le coordinate comoventi

Ragioniamo dunque sulla sfera: la superficie di una sfera S^2 sarà il nostro modello dell'Universo.

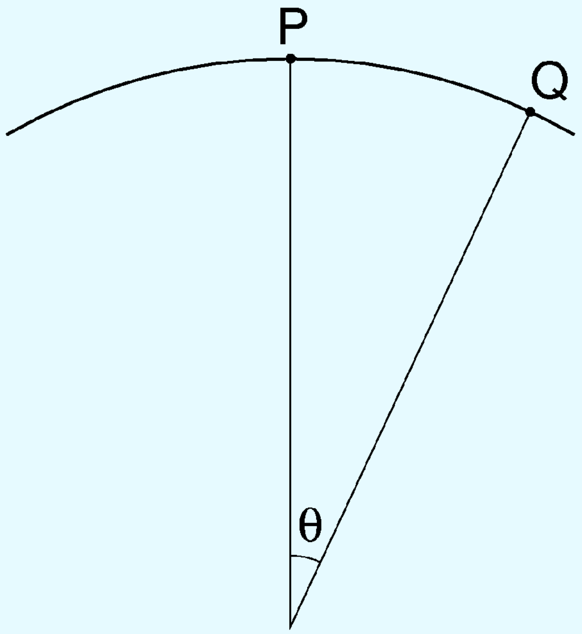
Poiché l'Universo è in espansione, il raggio della sfera cresce al passare del tempo: e noi dobbiamo immaginare di vivere sopra questa sfera che cresce.

La cosa che ora c'interessa di più è farci un'idea di *come viaggia la luce* in un universo così fatto.

Cerchiamo prima di tutto di caratterizzare i punti di questa superficie con un *sistema di coordinate*.

Dato che si tratta di una superficie sferica, le coordinate più naturali sono quelle *polari*.

Scelto un polo P, avremo le coordinate ϑ e φ. L'angolo ϑ posso disegnarlo facilmente, mentre φ è meglio immaginarlo.

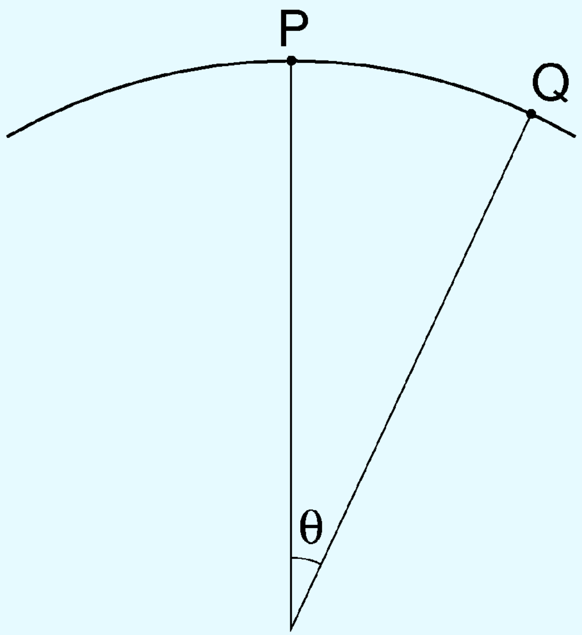


Il punto P della figura potremmo essere noi, mentre Q è un'altra galassia: Q è caratterizzato dagli angoli ϑ, φ.

Il fatto che l'Universo si espande *non fa cambiare le coordinate*: se il raggio della sfera cresce, le coordinate ϑ e φ rimangono le stesse (ecco il vantaggio di aver usato degli angoli!)

Dunque le coordinate polari di un determinato punto, di una determinata galassia, *sono costanti*.

Per questo motivo le coordinate ϑ, φ si chiamano *coordinate comoventi*.



La distanza da P a Q è un'altra cosa.

Poiché noi viviamo sulla sfera, quando parliamo di distanza dobbiamo intendere *l'arco di cerchio massimo* – cioè di geodetica – sulla superficie della sfera.

La distanza sarà naturalmente $R\vartheta$.

Abbiamo detto che ϑ non cambia, però R cambia: quindi la distanza cambia, *cresce nel tempo*.

Come si fa a sapere se davvero lo spazio è curvo?

E a determinare il segno della curvatura?

E il valore di R?

Domande più che legittime, alle quali risponde la *cosmologia osservativa* messa a confronto con le *previsioni teoriche* relative ai diversi modelli di universo.

Ma purtroppo queste domande sono fuori della nostra portata...

Diremo solo che i dati degli ultimi anni riescono *compatibili col caso euclideo* ($k = 0$).

Ci sono però diverse ragioni per non abbandonare la discussione del modello sferico.

1) Capire un modello euclideo in espansione non è più semplice (per quanto possa apparire strano).

2) C'è il vantaggio che il modello sferico si appoggia alla geometria familiare della sfera.

3) Un modello sferico con *R molto grande* non differisce apprezzabilmente da un modello *euclideo* (e del resto, i dati di osservazione sono sempre affetti da *incertezze*).

Il redshift cosmologico

Problema: se una sorgente lontana emette luce di una certa lunghezza d'onda, che noi riceviamo dopo un certo tempo, con quale lunghezza d'onda la riceviamo?

La risposta è molto semplice:

la lunghezza d'onda ricevuta sta alla lunghezza d'onda emessa

come il raggio dell'Universo all'istante di arrivo

sta al raggio all'istante di partenza:

$$\lambda_r / \lambda_e = R_r / R_e.$$

Anche la dimostrazione può esser data con mezzi elementari, ma non è breve; quindi sono costretto a tagliarla.

Redshift ed espansione

Se colleghiamo la relazione appena trovata $\lambda_r/\lambda_e = R_r/R_e$ alla definizione del parametro di redshift $z = (\lambda_r - \lambda_e) / \lambda_e$, troviamo

$$1 + z = R_r / R_e.$$

Vediamo così un'*interpretazione geometrica* del redshift cosmologico.

Ad es. un redshift di 0.3 (del 30%) significa che il raggio dell'Universo è aumentato del 30% nel tempo che la luce ha impiegato ad arrivare fino a noi.

Commenti

Nel ragionamento che porta a $\lambda_r/\lambda_e = R_r/R_e$ *non si fa l'ipotesi* che z debba essere piccolo.

Se noi conosciamo una sorgente per la quale $z = 10$, questo ci dice che quando la luce è partita il raggio dell'Universo era esattamente 11 volte più piccolo dell'attuale.

Viceversa *non possiamo dir niente del tempo* al quale la luce è stata emessa, a meno che non conosciamo la funzione $R(t)$.

Se per esempio fosse $R \propto t^{2/3}$ e quindi $t \propto R^{3/2}$, potremmo dire

$$t_r/t_e = 11^{3/2} \simeq 36.$$

Questa interpretazione del redshift cosmologico è più significativa di quella che si basa sull'effetto Doppler, in quanto si connette direttamente alla *struttura geometrica* dello spazio-tempo.

La legge di Hubble come approssimazione

Supponiamo che le galassie che stiamo osservando siano *vicine*.

(“Vicine” va inteso naturalmente su scala cosmologica: una distanza piccola rispetto al raggio dell'Universo.)

Per le galassie vicine z è *piccolo*: infatti nel tempo che la luce impiega ad arrivare, il raggio dell'Universo cambia di poco.

Dato che per $t_\mathrm{r} = t_\mathrm{e}$ è anche $R_\mathrm{r} = R_e$ e quindi $z = 0$, è intuitivo che z debba risultare proporzionale a $t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}$ quando questa differenza è piccola.

Ma $t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}$, nelle stesse ipotesi, è anche proporzionale alla distanza d, e si arriva quindi alla *legge di Hubble*.

Un calcolo più dettagliato porta a dare un'espressione per la *costante di Hubble*:

$$H = (1/R)\ (dR/dt).$$