Insegnare relatività
nel XXI secolo

Problemi sui modelli cosmologici

Problema

Si consideri un ipotetico universo in cui $R = a\sqrt{t}$.

Assumendo $H = 70$ km s^{-1} Mpc^{-1} calcolare:

a) la relazione redshift-distanza

b) il valore del “tempo presente”.

È stato osservato un oggetto con $z = 4$. Calcolare:

c) la distanza attuale dell'oggetto

d) la variazione di tale distanza nel tempo

e) la distanza all'istante di emissione $t = t_e$

f) la variazione nel tempo di tale distanza.

Il problema appare molto complesso, ma se lo si affronta per gradi è più semplice di quanto appare.

In ogni intervallo elementare dt la luce percorre una distanza $c\,dt$ (la velocità della luce è sempre c !).

Espressa nella coordinata comovente ϑ, questa distanza vale (come abbiamo visto) $R\,d\vartheta$.

Confrontando

$$c\,dt = a\sqrt{t}\,d\vartheta$$

che si può integrare immediatamente:

$$\vartheta = (2c / a)(\sqrt{t_r} - \sqrt{t_e}) = (2c / a^2)(R_r - R_e)$$

dove ϑ è la coordinata comovente della sorgente di luce, t_e il tempo di emissione, t_r quello di ricezione, R_e e R_r i corrispondenti parametri di scala.

Detta l_r la distanza della sorgente al tempo t_r, sarà $l_r = R_r \vartheta$ e quindi

$$l_r = (2c / a^2)\, R_r^2 (1 - R_e/R_r) = (2c / a^2)\, R_r^2 [1 - 1/(1 + z)] =$$

$$= (2c / a^2)\, R_r^2\, z /(1 + z).$$

Conviene porre

$$D = (2c / a^2)\, R_r^2 = 2c\, t_r;$$

vedremo fra poco il significato di D.

Allora

$$l_r = D\, z /(1 + z) \qquad z = l_r / (D - l_r). \quad (1)$$

Le (1) rispondono alla prima domanda.

Le (1) mostrano inoltre che $z \to \infty$ quando $l_r \to D$.

Ciò significa che *non si può ricevere luce* da distanze maggiori di D, ossia che D è l'*orizzonte* del nostro modello d'universo.

Per rispondere a *b*) occorre calcolare H in funzione di t_r, cosa che si ottiene dalla seconda delle (1) assumendo $l_r \ll D$.

Si ha infatti $z = l_r / D$, e con $z = v/c$:

$$v = c\, l_r / D.$$

Dunque $H = c / D$, e $D = c / H$.

Possiamo usare queste relazioni per verificare la fornula data alla fine della lezione precedente e non dimostrata: $H = (1/R)\,(dR/dt)$.

Basta partire da $R = a\sqrt{t}$, derivare, e usare $D = 2c\, t_r$. I passaggi sono semplici.

Col valore numerico dato di H si trova $D = 4.3$ Gpc $= 14\times10^9$ anni-luce (1 pc $= 3.26$ anni-luce).

Il valore di t_r si ricava dall'espressione già vista: $D = 2c\,t_\mathrm{r}$.

Risulta $t_\mathrm{r} = 7\times10^9$ anni.

È il caso di ricordare a questo punto che stiamo lavorando su un *modello fittizio*, quindi non si devono prendere sul serio i numeri...

Rivediamo le domande che restano:

È stato osservato un oggetto con $z = 4$. Calcolare:

c) la distanza attuale dell'oggetto

d) la variazione di tale distanza nel tempo

e) la distanza all'istante di emissione $t = t_e$

f) la variazione nel tempo di tale distanza.

c) la distanza attuale dell'oggetto.

La distanza attuale si ottiene subito da $l_r = D\,z/(1+z)$: $l_r = 3.4$ Gpc.

d) la variazione di tale distanza nel tempo.

Questo è un punto più delicato.

È ovvio che si deve calcolare la derivata di l_r rispetto a t_r; ma che cosa va tenuto costante quando si deriva?

La sola grandezza che resta costante durante l'espansione è la coordinata comovente ϑ della sorgente: partiamo dunque da $l_r = R_r\vartheta$ e deriviamo, ricordando anche che $R = a\sqrt{t}$:

$$dl_r/dt_r = (dR_r/dt_r)\,\vartheta = (a / 2\sqrt{t_r})\,\vartheta =$$
$$= (a / 2\sqrt{t_r})\,(l_r / a\sqrt{t_r}) = l_r / 2t_r = H\,l_r$$

Mettendo i numeri:

$$dl_r/dt_r = 2.4\times10^5 \text{ km/s}.$$

e) la distanza all'istante di emissione $t = t_e$.

La distanza all'emissione si calcola facilmente, dato che tutte le distanze variano come R. Quindi

$$l_e = l_r (R_e / R_r) = l_r / (1 + z) = 0.68 \text{ Gpc}.$$

f) la variazione nel tempo di tale distanza.

Il calcolo si fa come prima:

$$dl_e/dt_e = l_e / 2t_e.$$

Sappiamo già che $l_e = l_r / (1 + z)$; quanto a t_e:

$$t_e = R_e / a^2 = (R_r^2 / a^2) / (1 + z)^2 = t_r / (1 + z)^2$$

e perciò

$$dl_e/dt_e = (l_r / 2t_r) (1 + z) = H\, l_r (1 + z).$$

Il risultato numerico è 1.2×10^6 km/s, ossia $4c$, e questo era lo scopo della domanda!

Non c'è niente di paradossale nell'aver trovato un valore superiore a c, perché dl_e/dt_e *non può essere interpretata come velocità della sorgente rispetto al ricevitore*.

Infatti questa interpretazione richiederebbe di poter definire un RI che si estenda spazialmente in modo da includere i due oggetti, e *ciò è precluso dalla curvatura dello spazio-tempo*.