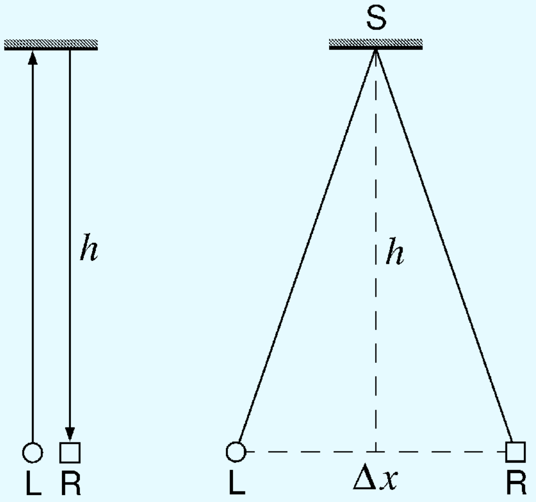
Insegnare relatività

nel XXI secolo

L'orologio a luce
e
il tempo proprio

L'orologio a luce serve a connettere l'invarianza della velocità della luce col carattere non più assoluto del tempo.

E serve a rendere quantitativo quest'ultimo fatto.



L'orologio a luce consiste di una sorgente L, di uno specchio S e di un rivelatore R.

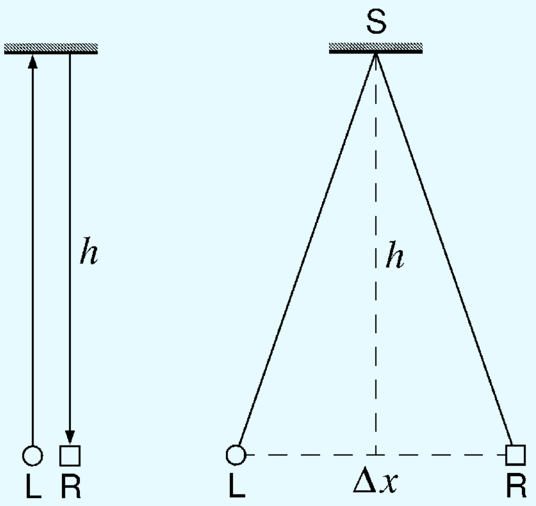
Il tempo che la luce impiega per andare e tornare è $\Delta\tau = 2\,h/c$.

L'orologio è montato sul treno T: quello che si vede nel rif. S della stazione è mostrato a destra.

Ragioniamo ora nel rif. S.

Nel tempo Δt di andata e ritorno della luce il rivelatore R si è spostato di un tratto $\Delta x = v\,\Delta t$.

Δt è il tempo che la luce impiega a percorrere il tratto LSR.



Dal teorema di Pitagora:

$$(c\,\Delta t\,/\,2)^2 \;=\; (\Delta x\,/\,2)^2 \;+\; h^2$$

da cui

$$\Delta\tau^2 \;=\; \Delta t^2 \;-\; \Delta x^2\,/\,c^2.$$

Il tempo proprio come invariante

Interpretazione: abbiamo due *eventi*, L e R.

Le loro separazioni spaziale (Δx) e temporale (Δt) cambiano da un rif. all'altro.

Però l'espressione

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 / c^2$$

resta la stessa in ogni riferimento: è un *invariante*.

$\Delta\tau$ è il *tempo proprio*.

Possiamo anche pensare a un terzo rif. U (per es. un altro treno che incrocia T).

Nel rif. U avremo $\Delta x'$ e $\Delta t'$, ma sarà ancora

$$\Delta\tau^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 / c^2.$$

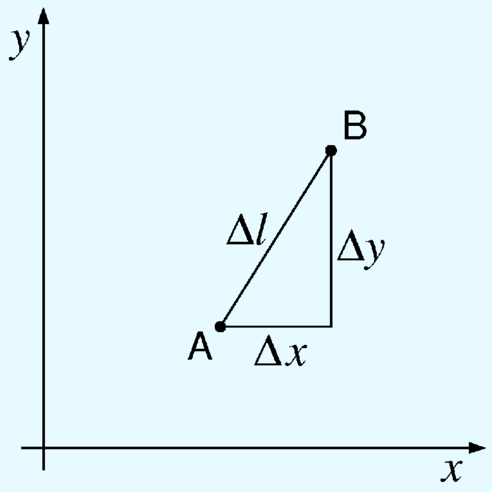
La distanza euclidea

La formula del tempo proprio ricorda quella della distanza nel piano euclideo, in coordinate cartesiane:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

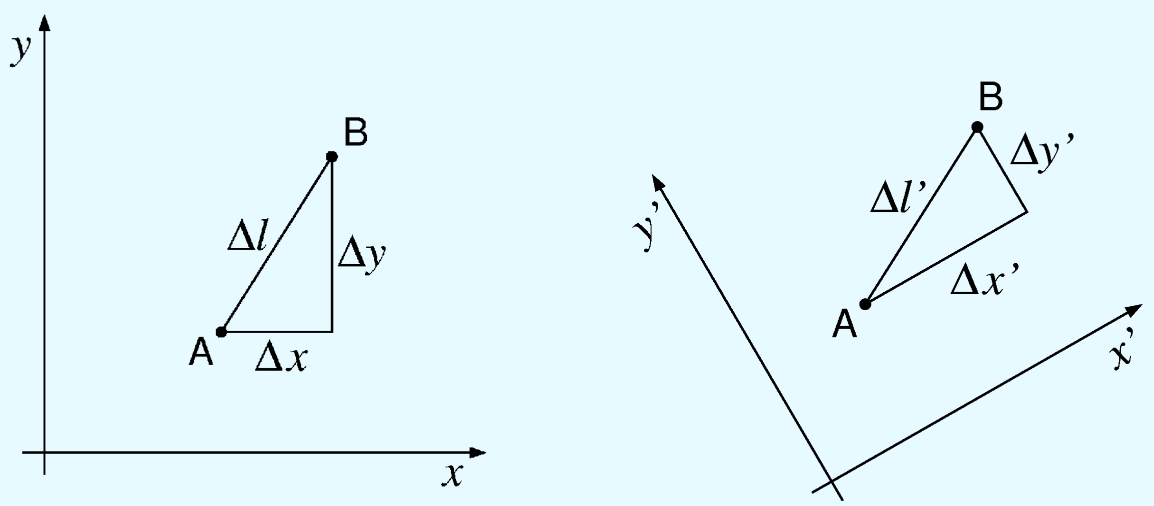
Ci sono *due* differenze: il *fattore* c^2 e il *segno*.

La prima è solo questione di unità di misura; la seconda invece è importante (vedremo).



Nella geometria euclidea la distanza è *invariante*.

Che cosa significa questo?



Se riferiamo lo stesso segmento AB a nuovi assi (x',y'), cambieranno tanto Δx come Δy, ma avremo ancora

$$\Delta l^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2.$$

Δl (distanza) è un *invariante* della geometria del piano euclideo.

Diagrammi spazio-tempo

È molto utile ragionare in un *diagramma spazio-tempo*, in cui di solito si mette la coordinata x in ascissa e il tempo t (del rif.) in ordinata.

A ogni punto del diagramma è associata una posizione spaziale e un istante temporale: si tratta di *punti nello spazio-tempo*, generalmente chiamati *eventi*.

I punti (eventi) hanno un significato *intrinseco*, indipendente dal modo come li rappresentiamo in un diagramma spazio-tempo.

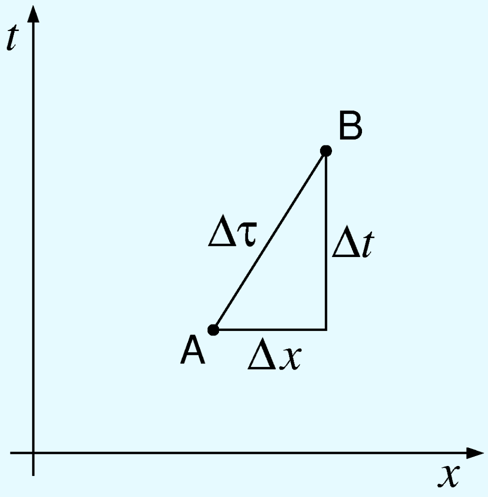
Fisicamente parlando, un evento non è che *un fenomeno ben localizzato nello spazio e nel tempo*.

“Ben localizzato” va inteso rispetto alla scala spaziale e temporale che c'interessa, e che può cambiare anche di molti ordini di grandezza a seconda del contesto di fenomeni di cui ci stiamo occupando.

Esempi: il decadimento di una particella, la nascita di una persona, l'esplosione di una supernova.

Le carte (geografiche) dello spazio-tempo

La figura è un esempio di *diagramma spazio-tempo*, in cui sono rappresentati due eventi, A e B, separati da Δx e Δt.



Pensando per es. all'orologio a luce, i due eventi possono essere la *partenza* della luce dalla sorgente (A), e il *ritorno* dell'impulso di luce al rivelatore (B).

L'intervallo di tempo proprio, dato dalla formula

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 / c^2$$

è *invariante* come la distanza nel piano euclideo: possiamo dunque interpretarlo come una “distanza” nello spazio-tempo.

Le virgolette stanno a ricordare che si tratta di una distanza un po' speciale, *a causa di quel segno meno*.

Prima di tutto: nella figura *non si deve usare la geometria euclidea*, a cominciare del teorema di Pitagora!

Infatti $\Delta\tau < \Delta t$, sebbene sia un'ipotenusa...

Tutti gli effetti relativistici che vengono di solito interpretati come “dilatazione del tempo” e studiati con le trasformazioni di Lorentz, si descrivono molto più semplicemente in questo modo.

Così si riesce meglio a coglierne il significato profondo, che sta appunto nella peculiare *geometria dello spazio-tempo*.

Tempo proprio in un moto qualunque

Riprendiamo la formula del tempo proprio:

$$\Delta\tau^2 \;=\; \Delta t^2 \;-\; \Delta x^2 / c^2.$$

Se v è la velocità dell'orologio a luce, sarà $\Delta x \;=\; v\,\Delta t,$ da cui

$$\Delta\tau \;=\; \Delta t\,\sqrt{\left(1 - v^2/c^2\right)}.$$

Finora abbiamo supposto che il nostro orologio a luce si muovesse, rispetto a un RI, di moto rettilineo uniforme.

Se si muove di moto non uniforme, che cosa occorre cambiare?

Nel caso più generale occorrerebbe un integrale...

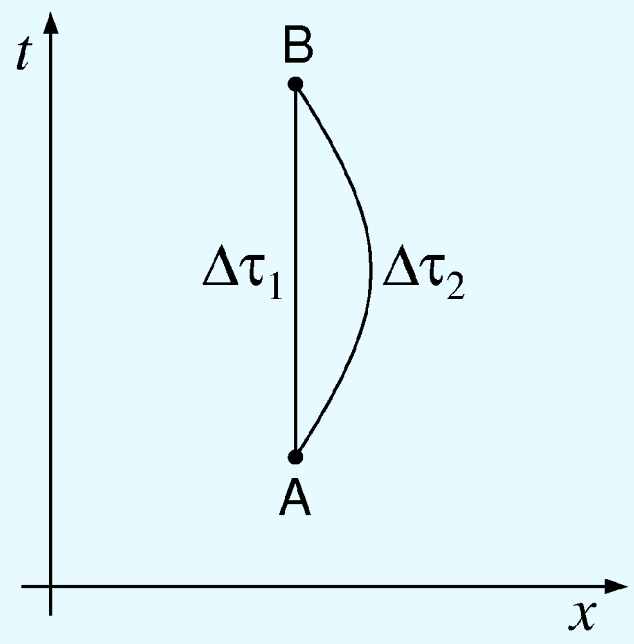
Ma se la velocità resta costante *in modulo*, non occorre cambiare niente.

Moto uniforme = massimo del tempo proprio

Nella geometria euclidea tra tutte le curve che uniscono gli stessi due punti, il segmento di retta porta al *minimo* valore di Δl, che misura la *distanza* tra i due punti.

In un diagramma spazio-tempo, l'arco di curva che unisce i due eventi A e B rappresenta la *linea oraria* di un moto per il quale A è l'evento *partenza* e B l'evento *arrivo*.

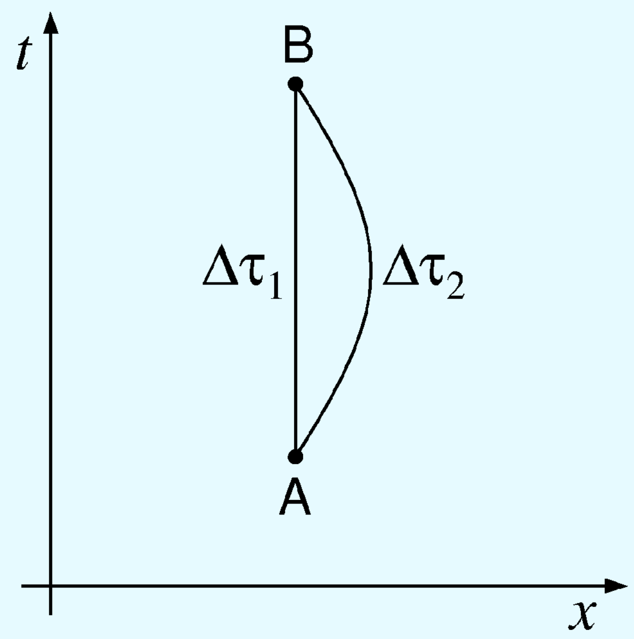
Il segmento AB corrisponde a un *moto uniforme*.



Il paradosso dei gemelli

La retta tra A e B rappresenta la linea oraria del gemello fermo a terra, mentre la curva è la linea oraria del secondo gemello.

Per quanto detto, $\Delta\tau_1$ ha il valore massimo; $\Delta\tau_2$, *sempre minore* di $\Delta\tau_1$, ha valori diversi a seconda della legge di moto del secondo gemello.



Spiegazione dell'esperimento H–K

Indichiamo con Δt il tempo (segnato da un orologio fermo nel rif. K che si muove con la Terra) in cui ha avuto luogo l'esperimento.

Sappiamo che $\Delta t \simeq 50$ ore $= 1.8 \times 10^5$ s.

Sia poi u la velocità della Terra all'equatore; v quella degli aerei rispetto alla Terra. Abbiamo

$$u = \omega R = 465 \text{ m/s}, \quad v = 2\pi R / \Delta t = 222 \text{ m/s}.$$

Le velocità dei due aerei rispetto a K sono risp. $u + v$ e $u - v$, da cui:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t \sqrt{[1 - (u \pm v)^2 / c^2]}.$$

E ora provate a calcolarlo: chi ha un calcolatorino, provi a mettere i numeri nella formula, e mi dica che cosa trova...

Con uno sviluppo in serie della radice si ha

$$\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 \simeq \Delta t \times (2uv) / c^2 = 4\times10^{-7}\text{ s} = 400\text{ ns}.$$

Non c'è da meravigliarsi se non torna l'esatta differenza dell'esperimento (332 ns): occorrerebbe avere i dati esatti della traiettoria, delle velocità, ecc.

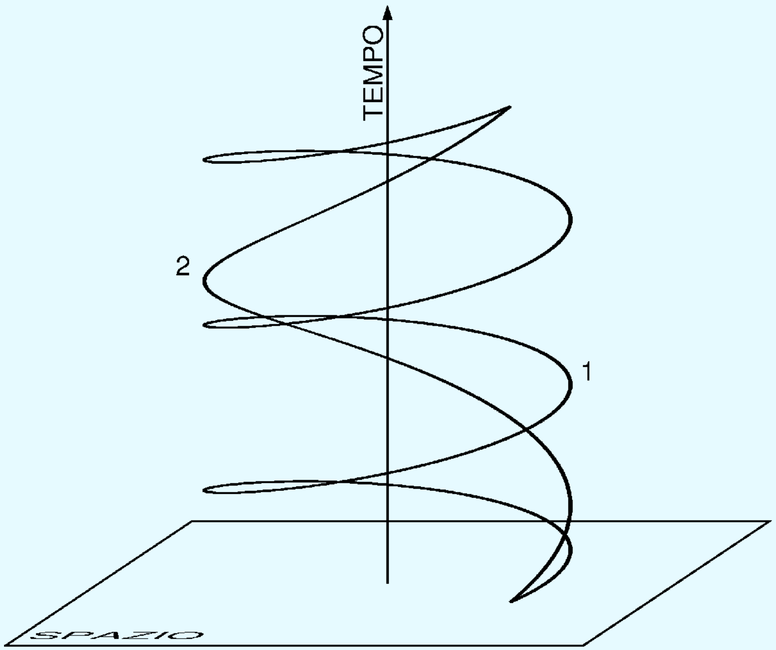
Però l'ordine di grandezza è quello giusto, il che rende plausibile che un calcolo più accurato possa dare un accordo migliore.

Diagramma spazio-tempo dell'esperimento H–K

Il diagramma è complicato dalla necessità di rappresentare *due dimensioni spaziali*, perché il moto degli aerei si svolge lungo l'equatore.

Come al solito, disponiamo il tempo in verticale.

Un moto circolare uniforme ha come curva oraria un'*elica* che si sviluppa lungo l'asse t.



Moto *più veloce* significa elica di passo *più breve* (ci vuole meno tempo per fare un giro).

Le due eliche partono dallo stesso punto (evento *partenza degli aerei*) e terminano in uno stesso punto (evento *arrivo degli aerei*).

La curva 1, che sembra più lunga, è in realtà *più breve*, per effetto di quel segno *meno* nella formula.

Quindi l'orologio 1 segna un tempo inferiore all'orologio 2, come si vede dai calcoli.