Insegnare relatività

nel XXI secolo

L'inerzia dell'energia

L'inerzia dell'energia

Questa è la denominazione più corretta, al posto della consueta "equivalenza massa-energia."

Einstein intitola un lavoro del 1905:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?

In breve: se a un corpo *fermo* cediamo energia in modo che *resti fermo*, *la sua massa aumenta*.

Esempi:

– si scalda un corpo

– si carica la molla di un orologio

– si porta un atomo in uno stato eccitato.

Viceversa:

– un corpo cede calore all'esterno

– il Sole emette radiazione

– l'atomo torna allo stato fondamentale.

In termini quantitativi, Einstein dimostrò che in quelle condizioni si ha

$$\Delta m = \Delta E / c^2.$$

È così che si arriva alla famosa relazione

$$E = mc^2$$

che però – attenzione! – vale per un corpo *fermo*.

Massa invariante e inerzia dell'energia

Supponiamo di avere già stabilito la relazione fondamentale

$$E^2 - c^2p^2 = m^2 c^4$$

dove m è la massa *invariante*, ossia quella che si misura con $F = ma$ in un rif. nel quale la velocità è $\ll c$.

L'inerzia dell'energia si riferisce a *questa* massa. Dobbiamo ora vedere come si dimostra e che cosa significa.

Supponiamo ancora di aver già dimostrato che la relazione tra q. di moto e velocità è:

$$p = m \gamma v$$

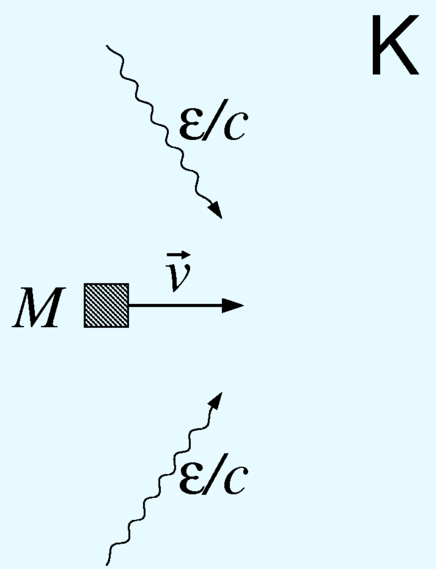
dove γ ha la nota espressione

$$\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2}.$$

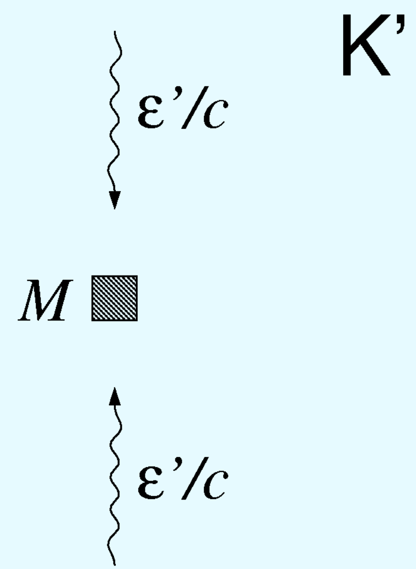
Un esperimento ideale

Abbiamo un corpo di massa M, nero (assorbitore ideale). Su di esso mandiamo due pacchetti di radiazione (es. impulsi laser) uguali, che provengono da direzioni opposte nel rif. K' in cui M è fermo. Sia ε' l'energia di ciascun pacchetto.

Nel rif. K (laboratorio) M si muove verso destra, con velocità v. I pacchetti di radiazione si muovono obliquamente (e hanno energia ε diversa da ε', che non occorre conoscere).



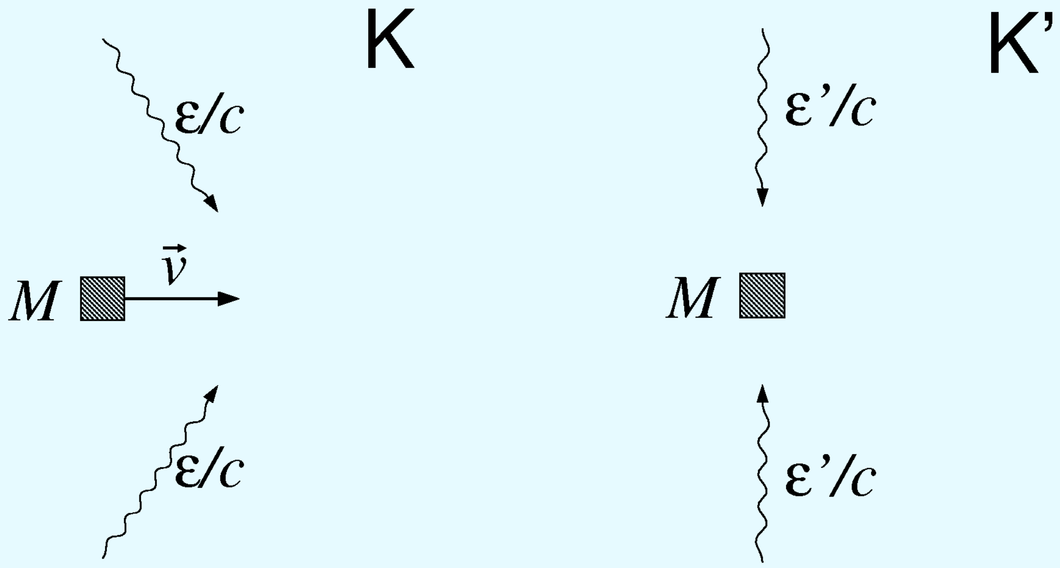
La radiazione viene assorbita da M. Vogliamo studiare il fenomeno da entrambi i riferimenti.



Iniziamo dal rif. K'.

Qui M è inizialmente fermo; la q. di moto si conserva, quindi M *rimane fermo* anche dopo aver assorbito la radiazione.

Ne segue che anche in K la sua velocità, che era inizialmente v, dovrà restare *invariata*.

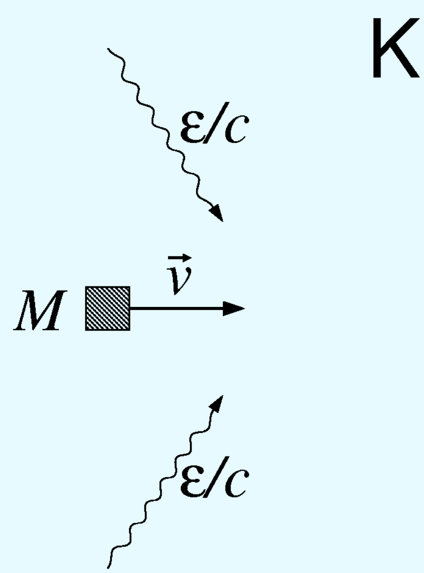


Ragioniamo invece applicando la conservazione della q. di moto in K. Sia α l'angolo che la direzione della radiazione forma con la verticale; sappiamo che un pacchetto di energia ε ha q. di moto (modulo) ε / c.

Dunque se v_{f} è la velocità finale di M, avremo:

$$M \gamma_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}} = M\gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha\alpha$$

che è in contraddizione con $v_{\mathrm{f}} = v$!



Dov'è l'errore?

L'idea di Einstein è che l'errore stia nell'aver dato per scontato che la massa resti invariata. Proviamo infatti a suppore che la massa finale M_f sia diversa da M; allora potremo salvare $v_f = v$.

Scriviamo

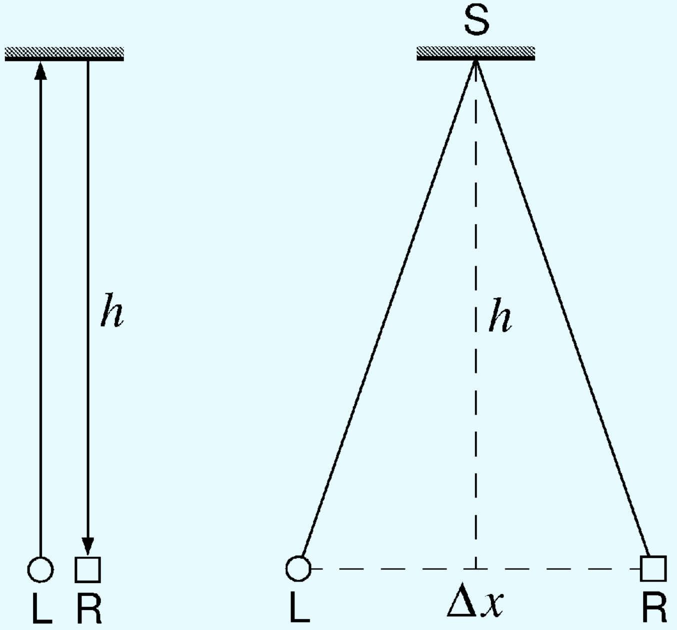
$$M_f \gamma v = M\gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha\alpha$$

Per arrivare al risultato finale abbiamo ancora bisogno di determinare α, ma per questo basta ripensare all'orologio a luce: si vede che $\sin \alpha = v / c$. Allora

$$M_f = M + 2 \varepsilon / (\gamma c^2).$$

Ma il corpo M ha giusto assorbito l'energia 2ε, che possiamo quindi sostituire con ΔE:

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2).$$



Interpretazione

Siamo arrivati a

$$\Delta M \;=\; \Delta E \,/\, (\gamma c^2) \qquad (*)$$

che in parole si esprime così:

Quando un corpo che si muove con velocità v *assorbe un'energia* ΔE *senza cambiare velocità, la sua massa aumenta come indicato dalla* (*).

In particolare, dato che per un corpo fermo $\gamma = 1$:

Quando un corpo fermo assorbe un'energia ΔE *restando fermo, la sua massa aumenta di*

$$\Delta M \;=\; \Delta E \,/\, c^2.$$

Nelle parole di Einstein:

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia.

Commenti importanti

1. Abbiamo stabilito la relazione $\Delta M = \Delta E / c^2$ con un particolare esperimento ideale, ma la sua validità è *universale*.

Infatti possiamo dare energia al corpo per una strada e poi toglierla per un'altra strada. Se la variazione di massa non fosse sempre la stessa, ci troveremmo ad avere uno stato finale del corpo uguale a quello iniziale, ma con massa diversa...

2. Abbiamo usato un esperimento *ideale*; questo non significa che “nella realtà” le cose vadano diversamente...

Un esperimento ideale usa la fisica conosciuta: è solo un modo per descrivere una deduzione teorica.

Se accettiamo la tale e tale legge generale, allora ne segue necessariamente che ...

La cosiddetta "massa relativistica"

L'inerzia dell'energia *non ha niente a che fare* con la "massa relativistica".

Questa viene introdotta per salvare la relazione $p = mv$, che nella dinamica relativistica non vale se m è la *massa invariante*: quella che figura in

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4.$$

In realtà la massa relativistica *non è che l'energia* di un corpo in moto, divisa per c^2. Apparentemente sembra giustificare la "famosa relazione" $E = mc^2$.

Ma *è del tutto inutile*: nessun fisico la usa mai, e serve solo a creare confusione.

La relazione valida in generale è

$$E = m\gamma c^2$$

dove si legge che *ci sono due modi distinti* per cambiare l'energia di un corpo:

a) cambiarne la velocità, col che cambia γ

b) cedergli energia senza cambiare la velocità (es. dell'esperimento ideale), col che cambia m.

Che succede quando si scalda un corpo?

Per es. un pezzo di ferro...

Succede che la sua massa *aumenta* (di pochissimo: nessuna bilancia potrebbe rivelarlo).

Ma a livello microscopico?

Gli atomi del ferro sono sempre in movimento: oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se si aumenta la temperatura, l'ampiezza media delle oscillazioni cresce: crescono quindi tanto l'energia cinetica cone quella potenziale.

E le masse?

Le masse (invarianti) degli atomi *non cambiano*; eppure la massa del pezzo di ferro aumenta...

Dobbiamo quindi concludere che la massa *non è additiva*:

in generale la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle parti componenti.

Massa non additiva e difetto di massa

Nel caso del pezzo di ferro, o anche di un gas, la massa del sistema è *maggiore* della somma di quelle dei componenti.

Ma può anche essere *minore*: è quello che accade

– in una *molecola* rispetto agli *atomi* che la formano

– in un *atomo* rispetto a *nucleo ed elettroni*

– in un *nucleo* rispetto ai *protoni e neutroni*.

In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.

Per atomi e molecole il difetto di massa è piccolissimo e non misurabile: 10^{-9} o 10^{-10} della massa.

Per i nuclei invece è dell'ordine di 10^{-3} e può essere misurato con grande precisione.

Ma in linea di principio *non c'è nessuna differenza*.

Un esempio più complicato: una reazione chimica

In un recipiente (a pareti robuste e isolanti) mettiamo due moli d'idrogeno e una di ossigeno, a temperatura e pressione ambienti. Il volume totale è quindi circa 67 litri.

Con la solita scintilla inneschiamo la reazione che produce acqua:

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O.$$

Domanda: Confrontare la massa totale prima e dopo la reazione.

Risposta 1: Dato che due molecole di H_2O hanno massa minore di una molecola di O_2 più due di H_2, la massa sarà *diminuita*.

Risposta 2: Dato che il sistema è isolato, l'energia e quindi la massa *non cambia*.

La risposta esatta è la 2.

Spiegazione e numeri

L'entalpia di reazione è 572 kJ.

Questo è il calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga a temperatura e pressione costanti: in queste condizioni si formerebbero 36 grammi di acqua liquida (36 cm^3).

La massa diminuirebbe in corrispondenza:

$$572\ \mathrm{kJ} / c^2 = 6.4\times10^{-12}\ \mathrm{kg} = 6.4\times10^{-9}\ \mathrm{g}.$$

La diminuzione è dovuta in buona parte al *difetto di massa* delle molecole di H_2O, ma anche all'*ulteriore legame* delle molecole nell'acqua liquida.

Se invece si lascia il sistema isolato, la temperatura e la pressione salgono moltissimo.

Ma dato che l'energia non è cambiata, non cambia neppure la massa.

N.B. L'esperimento è irrealizzabile, per varie ragioni...

L'esempio del K^0

Il mesone K^0 è una delle prime particelle "strane" che sono state scoperte.

Ha una vita media molto breve ($< 10^{-10}$ s) e diversi modi di decadimento. A noi interessa quello in due pioni:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-.$$

La massa del K^0 è 498 MeV/c^2; quella di ciascun pione è 140 MeV/c^2.

Come si vede, mancano 218 MeV/c^2: dov'è finita la massa mancante?

Si dice di solito che questa massa si è "convertita in energia": infatti i due pioni non sono fermi, ma hanno un'energia cinetica, che fra tutti e due vale appunto 218 MeV.

Però attenzione: *se si vuole usare la massa relativistica*, i pioni – essendo in moto – hanno una massa *maggiore* di quella di riposo, esattamente 249 MeV/c^2 ciascuno.

Infatti l'energia si conserva, e l'energia di riposo iniziale del K^0, che è 498 MeV, si sarà ripartita tra i due pioni: 249 MeV per ciascuno.

Ma allora la somma delle masse finali è uguale alla massa iniziale, e non c'è nessuna conversione di massa in energia!

Se invece usiamo la *massa invariante*, allora effettivamente la somma delle masse finali è minore di quella iniziale, e la differenza si ritrova come energia cinetica.

Però l'energia si conserva comunque, e quindi non si deve parlare in ogni caso di conversione di massa in energia: se mai, di conversione di *energia di riposo* in *energia cinetica*.