

# Insegnare relatività nel XXI secolo

*Il principio  
di  
equivalenza*

## La caduta dei gravi

La scoperta di Galileo:

*tutti i gravi cadono di moto uniformemente accelerato,  
con la stessa accelerazione*

è talmente nota che finisce per essere considerata quasi banale.

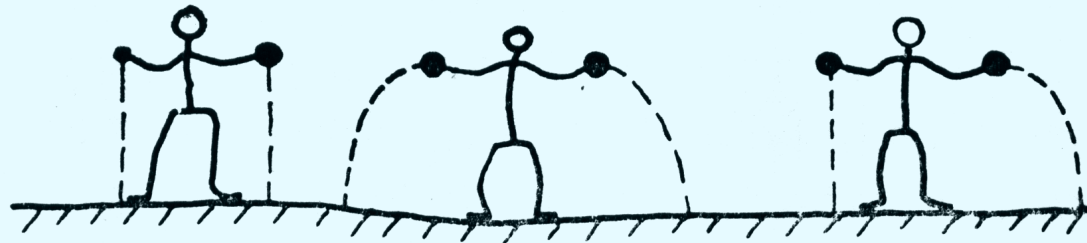
Ma vediamo che cosa ne dice Rogers, in *Physics for the Inquiring Mind* (Princeton 1960):

*Prendete due sassi diversi (o due monete), e fateli cadere, lasciandoli insieme.*

*Poi fateli cadere di nuovo, ma questa volta con una spinta orizzontale.*

*Poi lanciatene uno in fuori, mentre l'altro cade verticalmente.*

*Guardate e riguardate quello che succede.*



*Se tutto ciò vi sembra una puerile perdita di tempo, considerate quanto segue:*

*a) Questo è sperimentare. Tutta la scienza è costruita sulle informazioni tratte da esperimenti diretti come i vostri.*

*b) Per un fisico l'esperimento in cui si fanno cadere insieme sassi leggeri e pesanti non è solo una leggenda storica; esso mostra un fatto semplice ma stupefacente, che è un piacere vedere e rivedere.*

*Il fisico che non gioisce nel vedere un euro e un cent che cadono insieme, è senz'anima.*

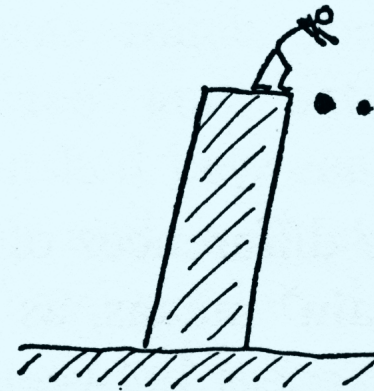
## Mito e Simbolo

Ancora Rogers:

*Si racconta che Galileo abbia dato una dimostrazione pubblica lasciando cadere un oggetto leggero e uno pesante dalla cima della Torre Pendente di Pisa. (C'è chi dice che fece cadere una palla di ferro e una di legno; altri dicono invece che fossero due palle di ferro, una di una libbra e l'altra di cento libbre.)*

[...]

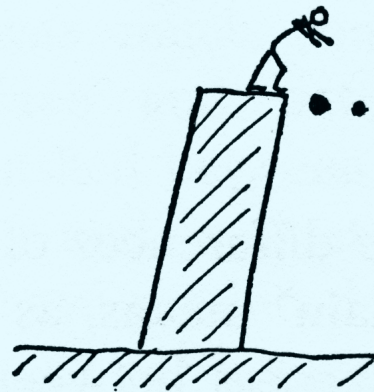
*Molti miti sono associati alle grandi figure della storia: alberi di ciliegio, torte bruciate ecc.*



MYTH  
&  
SYMBOL

*Eppure noi potremo usarla, a parte Galileo e lo sviluppo della scienza, come simbolo di un esperimento semplice. Nel vostro esperimento coi due sassi, essi cadono circa insieme, e non – come qualcuno si aspetta – quello pesante molto più veloce dell'altro. Nel nostro corso useremo questo Mito e Simbolo per ricordare due cose:*

- la necessità di sperimentare direttamente*
- un fatto sorprendente, semplice e importante riguardo alla gravità.*



MYTH  
&  
SYMBOL

## **Il principio di equivalenza nella fisica newtoniana**

Il principio di equivalenza (PE) esiste già nella fisica newtoniana, anche se non veniva espresso in questi termini prima di Einstein.

Galileo dice: *tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione.*

È bene ricordare che Galileo non parla mai esplicitamente di *forza di gravità*.

È Newton che mette insieme l'esistenza di una forza universale (la gravità), la scoperta di Galileo, e il suo secondo principio.

E conclude: la forza di gravità è proporzionale alla massa del corpo *su cui agisce*:  $F = mg$ .



A questo punto  $g$  non indica più l'accelerazione di caduta dei gravi, ma *l'intensità del campo gravitazionale*.

Infatti  $F = mg$  è l'esatta analoga di  $F = qE$  per le forze elettriche.

O viceversa: *si postula* (così fa Newton) che la forza sia proporzionale alla massa, e allora dalla seconda legge *si dimostra* che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi.

## La questione delle due masse

Si usa esprimere la proprietà della gravitazione (proporzionalità alla massa del corpo su cui agisce) dicendo che *massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali*.

La motivazione posso assumere che sia ben nota....

Tuttavia nello spirito della RG, e anche per ragioni didattiche, è meglio *non introdurre due masse* per poi subito ridurle a una.

Ricordiamo il “rasoio di Occam”: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.

Visto che una massa basta, perché introdurne due?

*Osservazione:* la proporzionalità della forza di gravità alla massa della sorgente *segue dal terzo principio.*

Infatti:

1) la forza  $F_{AB}$  che A esercita su B è proporzionale alla massa di B

2) questa è anche (in modulo) la forza  $F_{BA}$  che B esercita su A.

*Ergo:*  $F_{BA}$  è proporzionale alla massa di B (sorgente).

## Si può chiedere perché?

Ci si può porre una domanda: perché mai  $F = mg$ ?

Nella fisica prima di Einstein questo è un fatto accertato ma *senza spiegazione*.

Si può obiettare che la ricerca di “spiegazioni” *non è necessaria*: abbiamo i fatti sperimentali, dai quali ricaviamo una legge.

Tuttavia la ricerca di spiegazioni *non è sterile*, e proprio questo esempio lo dimostra.

## Breve parentesi storica

Quando Einstein inizia la ricerca sulla RG ha in mente di superare lo status privilegiato dei riferimenti inerziali: vuole costruire una teoria valida per un riferimento in moto qualsiasi.

Strada facendo, s'imbatte nell'equivalenza tra gravità e forze apparenti, introduce la geometrizzazione della gravità, e alla fine si trova ad aver fatto tutt'altro di quello che si proponeva all'inizio.

Ha invece costruito una *teoria relativistica della gravità come proprietà geometrica dello spazio-tempo*.

## Da Galileo ad Einstein

Il fatto fisico era dunque ben noto già a Galileo, e Newton l'aveva incluso nella sua teoria; che cosa ha aggiunto Einstein?

Einstein si chiede: che motivo c'è che due cose così diverse come *gravità* e *inerzia* risultino così strettamente imparentate? Che cosa significa questo “fatto sorprendente, semplice e importante”? Perché succede?

Se tutti i corpi cadono allo stesso modo, si può pensare che la gravità non sia una proprietà dei corpi, ma *dello spazio in cui si trovano* (dovremmo dire “dello spazio-tempo”, ma ancora non possiamo...).

È questo che s'intende quando si parla di *geometrizzazione della gravità*.

Per capire meglio, usiamo il famoso “esempio dell'ascensore”.

## L'ascensore di Einstein

Se un ascensore cade senza freni, l'accelerazione di caduta è  $g$ ; perciò la forza apparente sulla pallina vale  $-mg$ , opposta al peso.

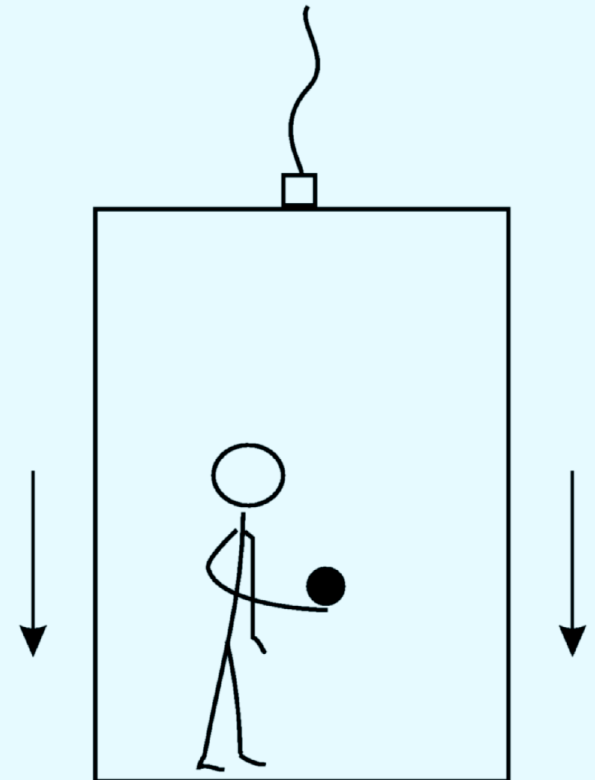
Ne segue che la pallina resta ferma: è “senza peso”.

In altre parole, per un fisico dentro l'ascensore *la gravità non c'è*.

In termini più astratti:

*L'ascensore in caduta libera equivale a un RI in assenza di gravità.*

Prima di Einstein questa equivalenza era nota, ma limitata all'ambito meccanico.



## Il principio di equivalenza secondo Einstein

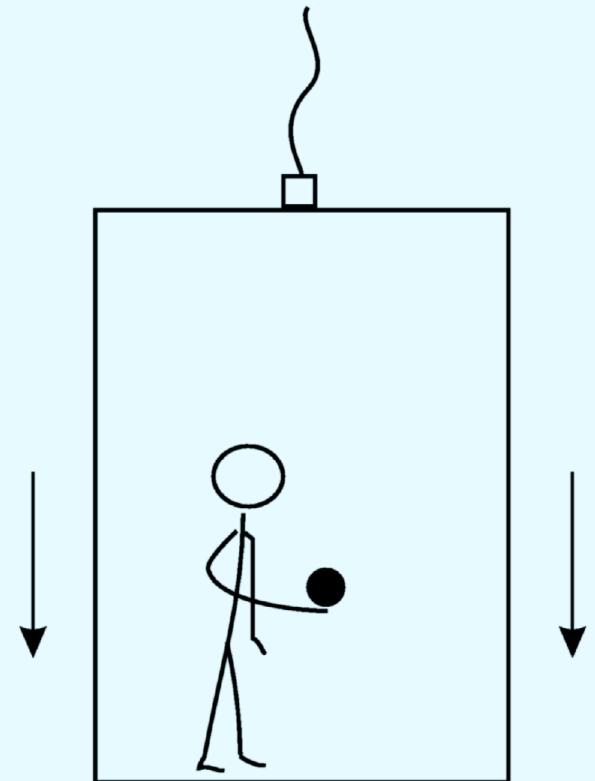
Einstein si spinge ad affermare che l'equivalenza ha carattere universale:

*Un rif. in caduta libera in un campo gravitazionale equivale a tutti gli effetti fisici a un RI in assenza di gravità.*

E simmetricamente:

*Un rif. in moto traslatorio accelerato equivale a tutti gli effetti fisici a un rif. fermo in un campo gravitazionale.*

Esempio: un'astronave che viaggi nello spazio profondo, lontana da qualsiasi corpo, coi motori accesi che le danno un'accelerazione  $g$ , equivale all'astronave ferma sulla rampa di lancio.





## Riferimenti non inerziali: due tipi diversi

a) Rif. in moto *traslatorio accelerato* rispetto a un RI

b) Rif. in moto *rotatorio*

Supponiamo di poter trattare la Terra come RI: allora un esempio di a) può essere un treno che accelera o frena su un binario rettilineo.

Ma anche una cabina della grande ruota del Prater di Vienna lo è: solo che in questo caso il moto è circolare, quindi accelerato, ma sempre traslatorio.

Infatti tutti i punti di una cabina a un dato istante *hanno la stessa velocità e la stessa accelerazione* (vettori).

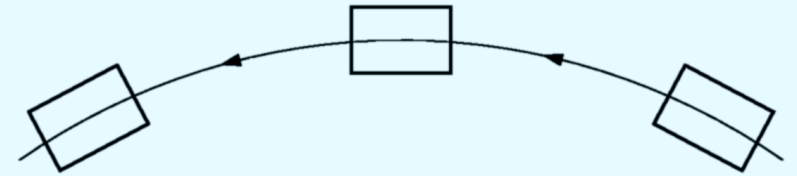
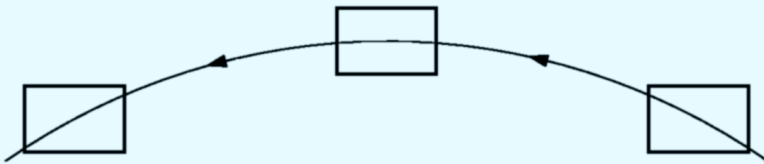
Esempio di b) è invece una giostra.



## Satelliti ecc.

Un esempio di *a*) sarebbe un satellite artificiale che orbita attorno alla Terra conservando *orientamento costante rispetto alle stelle*.

Come esempio di *b*) basta pensare alla Luna, che *mostra sempre la stessa faccia* alla Terra (circa).



Nell'ambito del sistema solare si trovano poi quanti esempi si vuole che non sono né *a*) né *b*): a cominciare dai pianeti.

## Come usare i due casi semplici

Il caso *a*) (moto traslatorio) lo useremo nel seguito, per illustrare il *principio di equivalenza*.

Il caso *b*) è quello dove ha senso parlare di *forza centrifuga*: non ne avremo bisogno, ma è bene cogliere l'occasione per sottolineare questo fatto.

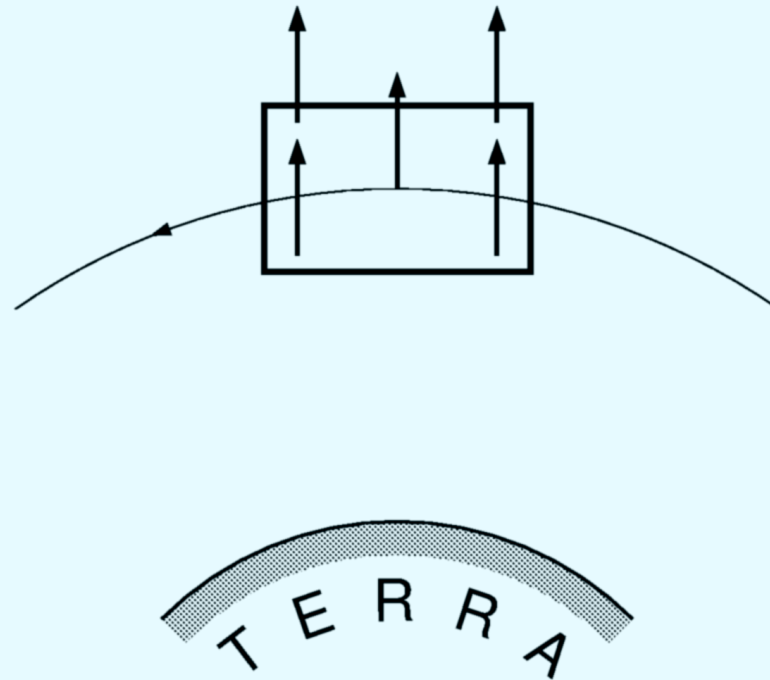
È purtroppo assai frequente sentir parlare di “forza centrifuga che equilibra la forza centripeta”, oppure di “Luna che non cade sulla Terra perché la forza centrifuga fa equilibrio alla gravità”, ecc.

Bisogna mettere bene in chiaro che per studiare un moto *va prima di tutto stabilito il sistema di riferimento*: se questo è inerziale, *non c'è nessuna forza centrifuga*; e se il moto è per es. circolare, una forza diretta verso il centro è *necessaria* per avere quel moto.

Nel caso della Luna la forza necessaria (centripeta) è rappresentata dall'attrazione gravitazionale della Terra.

## Forze apparenti nel moto traslatorio

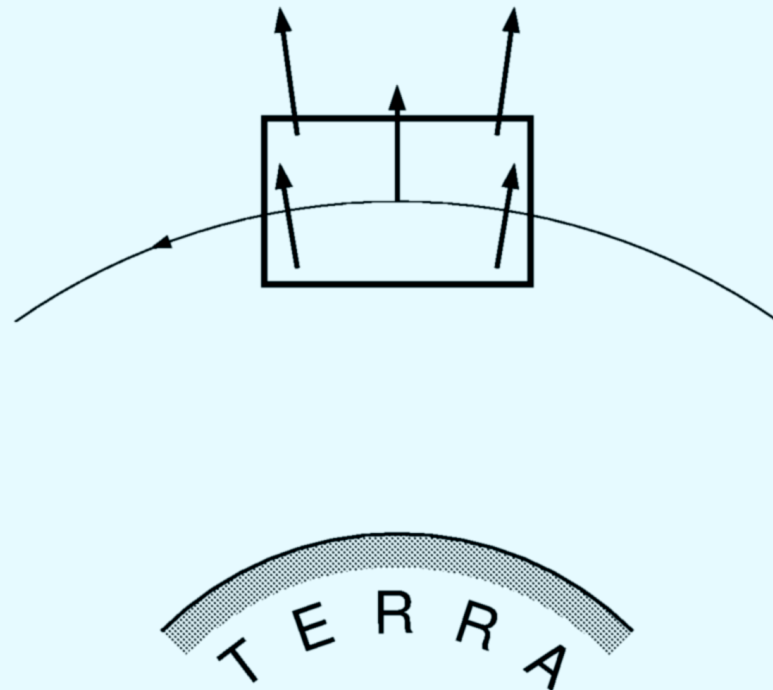
Qualunque sia il tipo di moto (rettilineo oppure no) nel caso traslatorio l'accelerazione è *la stessa in ogni punto*, e lo stesso è vero quindi per la forza apparente  $-m a$ .



## Forze apparenti nel moto rotatorio

In questo caso l'accelerazione è sempre diretta in direzione radiale, verso l'asse di rotazione. La sua grandezza è proporzionale alla distanza dall'asse.

Perciò la forza apparente  $-m a$  ha la stessa direzione ma verso l'esterno, ed ha anch'essa intensità proporzionale alla distanza dall'asse.



## Riferimenti in caduta libera

Attenzione: quando parliamo di rif. in caduta libera non intendiamo dire *solo in moto verticale*.

In generale, intendiamo che il rif. (laboratorio) si muove *sotto l'azione della sola gravità*.

Il laboratorio può essere ad es. in orbita attorno alla Terra (satellite artificiale).

È per questo che in un satellite “i corpi sono senza peso”; non perché siamo lontani dalla Terra.

## Due errori comuni

Ci sono in proposito due errori molto comuni fra i ragazzi.

Il primo è di credere che *il satellite sia fuori del campo gravitazionale terrestre*.

Le obiezioni a ciò sono due:

- Il campo si estende anche molto lontano dalla Terra, com'è provato, tra l'altro, dal *moto della Luna*.
- Molti satelliti artificiali distano qualche centinaio di km dalla superficie della Terra, ossia una distanza piccola rispetto al raggio della Terra. E dato che il campo va come  $1/r^2$ ...

Il secondo errore consiste nel credere che non ci sia gravità *perché c'è il vuoto*. Si fa cioè confusione tra pressione atmosferica e gravità.

Questo errore è forse causato (o aggravato) dal presentare la pressione atmosferica come qualcosa che spinge dall'alto verso il basso, senza approfondire il discorso.

Tra l'altro, è vero il viceversa.

Nel caso di un'atmosfera planetaria, a differenza di un gas racchiuso in un recipiente, *è la gravità la causa della pressione*: se non ci fosse la gravità non potrebbe esistere un'atmosfera stabile.



## Particolari rif. in caduta libera

Il rif. in caduta libera *può essere un pianeta.*

Ad es. la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo la Terra può essere trattata come RI.

In termini newtoniani si direbbe: la Terra è un rif. accelerato:

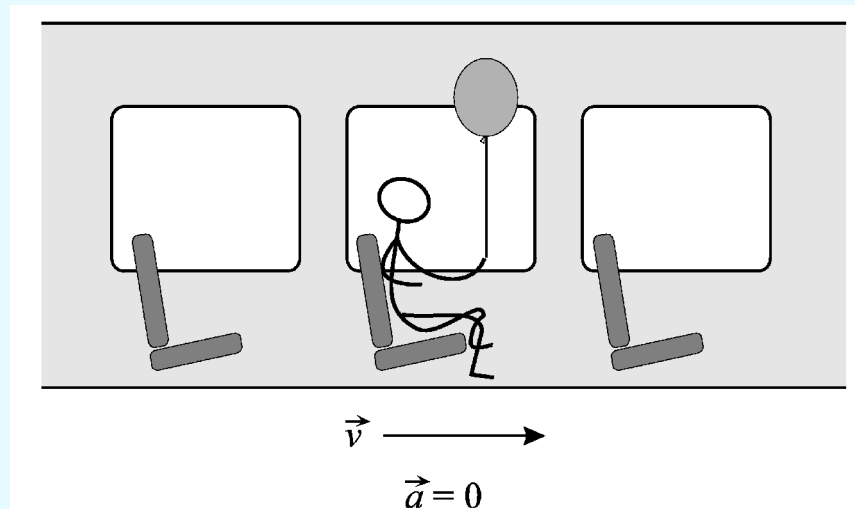
$$a = 6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

La forza apparente dovuta a quest'accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e sulla Terra la forza di gravità del Sole “non si sente” (approssimativamente, se si trascurano gli effetti di marea).

## Il problema del palloncino

Seguendo Einstein, le forze apparenti in un rif. accelerato possono essere viste come una *gravità apparente*, che non si distingue da quella “reale”.

Esempio: un bambino sta seduto in un treno e tiene il filo di un palloncino.



Se il treno frena, da che parte si sposta il palloncino?

## Le verifiche storiche del PE

A. *Galileo* (la scoperta): ne abbiamo già parlato..

B. *Newton e il pendolo*

Nei *Principia* Newton afferma di aver sperimentato con pendoli di uguale lunghezza, le cui masse erano diverse per grandezza e costituzione, e di aver verificato (dice entro  $10^{-3}$ ) che *il periodo dipende solo dalla lunghezza*.

### *C. Newton e i satelliti di Giove*

Sempre nei *Principia*, Newton osserva che i satelliti si muovono attorno a Giove *come se il Sole non ci fosse*.

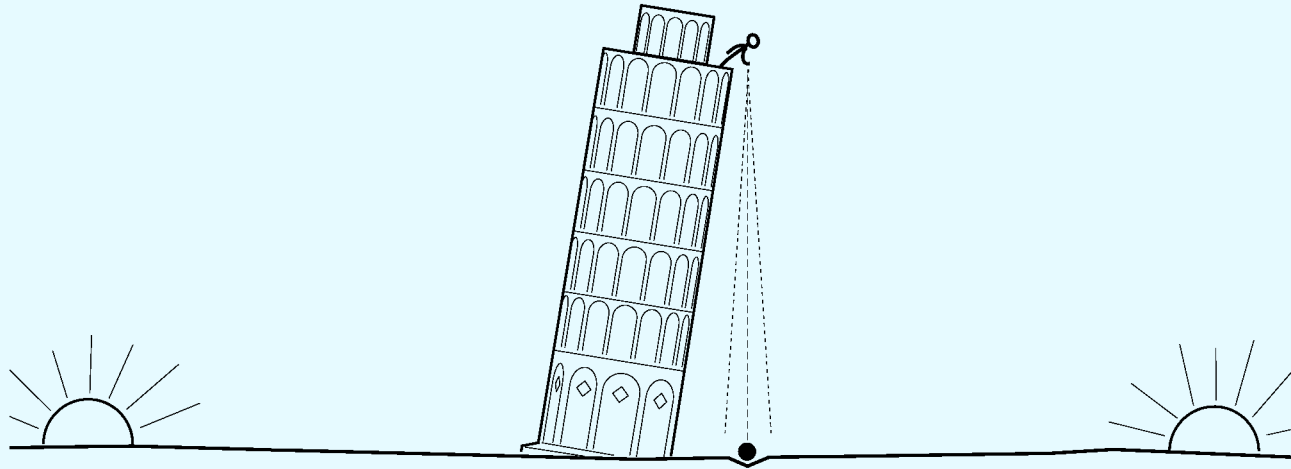
Ne conclude che la forza di attrazione del Sole su Giove, e quelle sui satelliti, stanno in proporzione alle masse.

In termini moderni: nel rif. di Giove la forza di attrazione del Sole sui satelliti è *compensata dalla forza apparente* del rif.

Oppure: nel rif. di Giove, che è in caduta libera, il campo gravitazionale del Sole *si cancella*.

## Un problema

Se la forza di attrazione del Sole influenzasse la caduta dei gravi, di quanto si sposterebbe il punto di caduta di un sasso lasciato dalla Torre Pendente (52 m) tra la mattina e la sera?



*Soluzione:*

Stiamo supponendo che sul sasso che cade agisca, oltre al campo gravitazionale della Terra, anche quello del Sole; ma che invece non agisca la forza apparente dovuta al moto orbitale (accelerato) della Terra.

Allora la risposta è facile: il campo gravitazionale della Terra è diretto in verticale e vale 9.8 N/kg.

Quello del Sole vale  $6 \times 10^{-3}$  N/kg e cambia direzione nel corso del giorno, ma alla mattina e alla sera è orizzontale.

Perciò l'angolo del campo risultante rispetto alla verticale è

$$\alpha \simeq 6 \times 10^{-3} / 9.8 \simeq 6 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

La traiettoria di caduta sarebbe ancora rettilinea, ma formerebbe l'angolo  $\alpha$  con la verticale, e il punto di caduta si sposterebbe quindi di

$$52 \text{ m} \times 6 \times 10^{-4} \text{ rad} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.2 \text{ cm:}$$

verso est la mattina, verso ovest la sera.

Uno spostamento facilmente osservabile.

## Applicazioni del principio di equivalenza

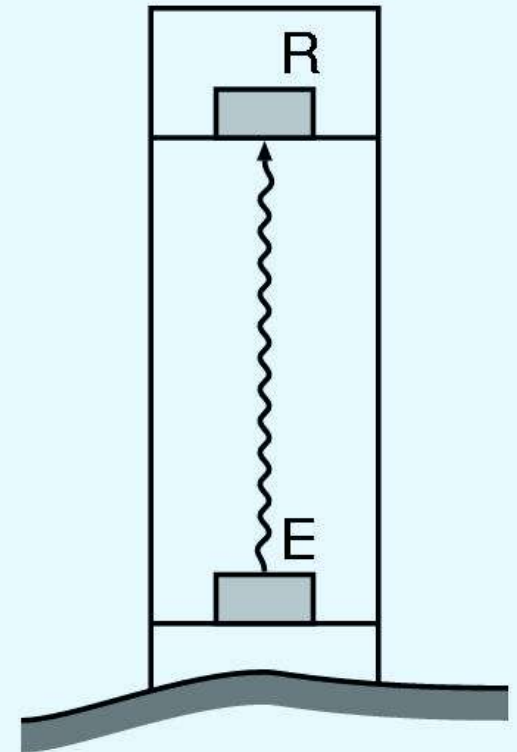
La prima applicazione del PE è il *redshift gravitazionale* (1911).

Confrontando due esperimenti uguali, in cui la radiazione si propaga “verso l'alto”, fatti uno sulla Terra e l'altro nell'astronave accelerata, E. dimostra che *la frequenza della radiazione ricevuta sarà minore di quella emessa*.

(Va da sé che E. non parla di astronavi...)

La prima verifica sperimentale è stata fatta solo nel 1960 (Pound e Rebka).

Una seconda applicazione è la *deflessione gravitazionale* della luce: vediamola come problema.





## Problema

Servirsi del PE (ascensore di Einstein) per spiegare la deflessione gravitazionale della luce.

*Soluzione:*

L'ascensore in caduta libera è un RI; perciò se nell'ascensore si monta un proiettore che manda un fascio di luce orizzontale, esso incontrerà la parete opposta *alla stessa altezza*.

Se sparo un proiettile nel rif. dell'ascensore, che è *inerziale*, esso si muove in linea retta, ma se lo guardo *da terra* vedo una *traiettoria curva*.

Questo non a causa della gravità, ma solo per ragioni cinematiche.

L'ascensore si muove verso il basso di moto accelerato e percorre spazi verticali proporzionali ai *quadrati* dei tempi, mentre il proiettile percorre spazi orizzontali *proporzionali* semplicemente ai tempi.

Perciò la traiettoria del proiettile, vista da terra, è una *parabola*.

*Attenzione:* per ragionare come Einstein dobbiamo *capovolgere* il filo logico cui siamo abituati.

Parto dal fatto che so come si muove il proiettile nella cabina, che è un RI. Poi guardo come si muove la cabina rispetto al rif. terrestre, e *compongo i due moti*.

Per la luce la situazione è analoga: cambiano solo gli ordini di grandezza dei parametri, causa l'elevata velocità della luce.

- Nel rif. (inerziale) dell'ascensore  $x' = ct, y' = 0$ .
- Moto dell'ascensore rispetto alla Terra:  $x = 0, y = \frac{1}{2} gt^2$ .

Componendo i due moti:

$$x = ct, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 = (g x^2) / (2 c^2).$$

Se  $x = 10$  m, risulta  $y \simeq 5 \times 10^{-5}$  m e la deflessione angolare

$$dy / dx = gx / c^2 \simeq 10^{-14} \text{ rad.}$$

Visti i numeri, verificare sperimentalmente questo effetto risulta impossibile.

Occorre quindi trovare il modo per amplificarlo.

## L'equivalenza è solo locale

L'equivalenza tra l'ascensore in caduta libera e un riferimento inerziale *non è esatta*.

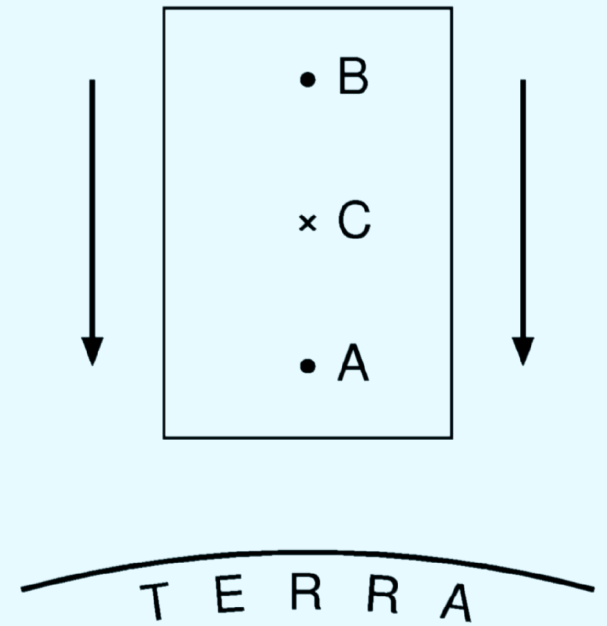
Il campo gravitazionale in A è più intenso che in C, mentre in B è meno intenso; quindi la pallina A cade con accelerazione maggiore dell'ascensore, quella in C con accelerazione minore.

Nel riferimento dell'ascensore la pallina A è accelerata *verso il basso*, B *verso l'alto*.

Perciò la gravità non si cancella esattamente, e il rif. dell'ascensore non equivale a un rif. inerziale in assenza di gravità.

O meglio, l'equivalenza è *approssimata*: con approssimazione tanto migliore quanto più le dimensioni della cabina sono piccole.

Per questo motivo si parla di equivalenza *locale*.



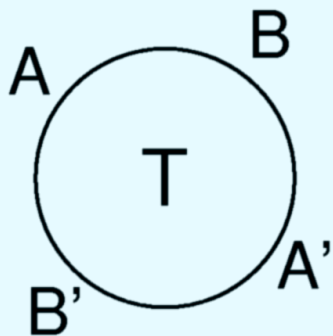
## La forza di marea

Il residuo di forza di gravità si chiama *forza di marea*, perché fornisce la spiegazione delle maree.

La Terra “cade” verso la Luna, e il campo gravitazionale della Luna in A è più intenso che al centro della Terra, mentre in A' è più debole: come nell'ascensore.

Se non ci fosse il campo della Terra, una pallina in A si muoverebbe verso la Luna, e una in A' si allontanerebbe in verso opposto.

Ⓛ



Invece succede solo che le due palline *pesano meno* che se la Luna non ci fosse.

Per questa ragione l'acqua in A e in A' si solleva (alta marea).

In B e in B' si abbassa, ma non ho spiegato perché...

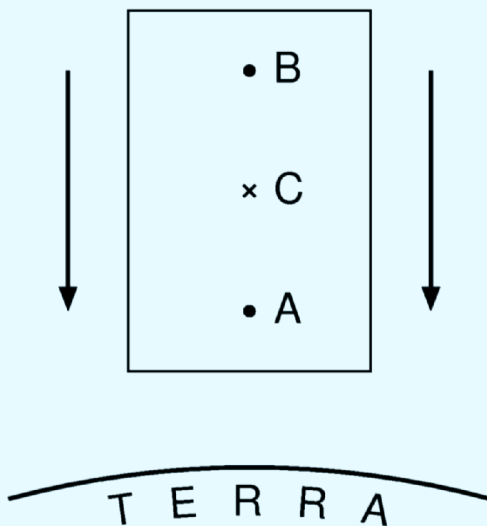
## La curvatura dello spazio-tempo

La forza di marea permette di arrivare in modo elementare alla curvatura dello spazio-tempo.

Il grafico a destra mostra i diagrammi orari delle due palline A e B: una accelera verso l'alto, l'altra verso il basso.

I due diagrammi *si allontanano*.

Basta interpretare questo fatto come una *deviazione di due geodetiche* nello spazio-tempo, ed è fatta.



Purtroppo il tempo non ce lo consente...

